Chapitre 1

Correction du TD n°1

Exercice 1 :

Q1. Le temps de vol correspond à la durée d'un trajet aller-retour de l'impulsion lumineuse.
On a donc $2 D_{TL} = c . \tau$ soit $D_{TL} = \frac{c \tau}{2}$

AN : $D_{TL} = \frac{3{,}00.10^{8} . 2{,}56}{2}$

$D_{TL} = 3{,}84 . 10^{8}$ m

Q2. On peut négliger l'incertitude sur c devant l'incertitude sur τ. On a donc $u(D_{TL}) = \frac{c . u(\tau)}{2}$

AN : $u(D_{TL}) = \frac{3{,}00.10^{8} . 100.10^{-12}}{2} = 1{,}5.10^{-2}$ m

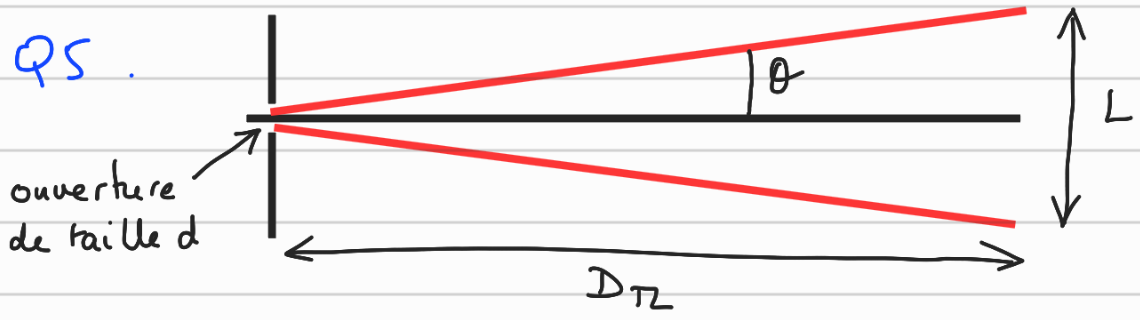
Q3. Le phénomène de diffraction est responsable de la divergence du faisceau.

Q4. D'après la formule de la diffraction $\sin\theta = \frac{\lambda}{d}$

AN : $\sin\theta = \frac{532.10^{-9}}{1{,}2.10^{-2}} \simeq 4{,}3.10^{-5}$

$\theta \simeq 2{,}5.10^{-3}$ °

Q5.



$\tan\theta = \dfrac{L/2}{D_{TL}}$ or $\sin\theta \simeq \tan\theta$ (car $\theta \ll 1\,\text{rad}$)

soit $\dfrac{\lambda}{d} = \dfrac{L/2}{D_{TL}} \Leftrightarrow L.d = 2\lambda.D_{TL}$

$L = \dfrac{2\lambda D_{TL}}{d}$ AN : $L = \dfrac{2.532.10^{-9}.3{,}84.10^{8}}{1{,}2.10^{-2}}$

$L = 3{,}4.10^{4}$ m

soit $L = 34$ km

Exercice 2 :

Q1. $\lambda_0 = cT = \dfrac{c}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \dfrac{c}{\lambda_0}$

AN : $\nu_{rouge} = \dfrac{2{,}998.10^{8}}{656{,}3.10^{-9}} = 4{,}568.10^{14}\ Hz$

$\nu_{bleu} = \dfrac{2{,}998.10^{8}}{486{,}1.10^{-9}} = 6{,}167.10^{14}\ Hz$

Les fréquences ne dépendent pas de l'indice du milieu.

Q2. $v = \dfrac{c}{n}$

donc $v_{rouge} = \dfrac{c}{n_{rouge}}$ et $v_{bleu} = \dfrac{c}{n_{bleu}}$

AN : $\left.\begin{aligned} v_{rouge} &= \dfrac{2{,}998.10^{8}}{1{,}504} = 1{,}993.10^{8}\,m.s^{-1} \\ v_{bleu} &= \dfrac{2{,}998.10^{8}}{1{,}521} = 1{,}971.10^{8}\,m.s^{-1} \end{aligned}\right\}$ dans le crown

$$\left.\begin{array}{l} v_{rouge} = \dfrac{2{,}998.10^{8}}{1{,}612} = 1{,}860.10^{8}\,m.s^{-1} \\[2ex] v_{bleu} = \dfrac{2{,}998.10^{8}}{1{,}671} = 1{,}794.10^{8}\,m.s^{-1} \end{array}\right\} \text{dans le flint}$$

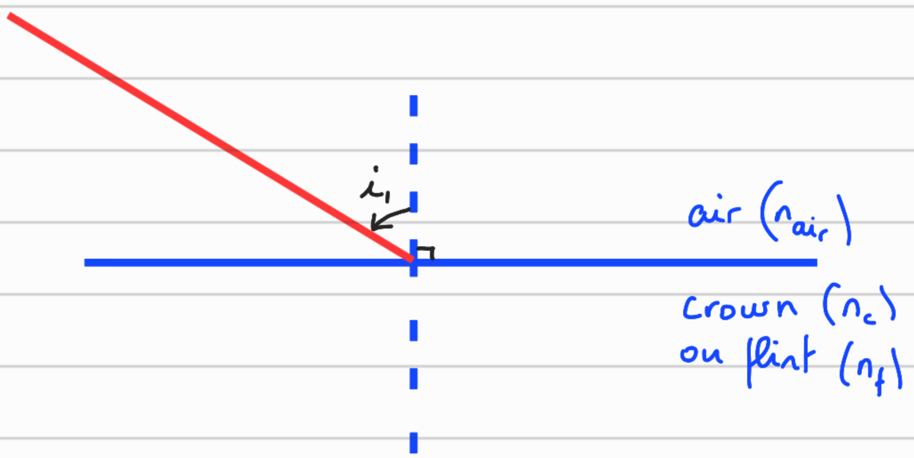
et $\lambda = \dfrac{v}{\nu}$ donc $\lambda_{rouge} = \dfrac{v_{rouge}}{\nu_{rouge}}$

et $\lambda_{bleu} = \dfrac{v_{bleu}}{\nu_{bleu}}$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{rouge} = \dfrac{1{,}993.10^{8}}{4{,}568.10^{14}} = 4{,}363.10^{-7}\,m = 436{,}3\ nm \\[2ex] \lambda_{bleu} = \dfrac{1{,}971.10^{8}}{6{,}167.10^{14}} = 3{,}196.10^{-7}\,m = 319{,}6\ nm \end{array}\right\} \text{crown}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{rouge} = \dfrac{1{,}860.10^{8}}{4{,}568.10^{14}} = 4{,}072.10^{-7}\,m = 407{,}2\ nm \\[2ex] \lambda_{bleu} = \dfrac{1{,}794.10^{8}}{6{,}167.10^{14}} = 2{,}909.10^{-7}\,m = 290{,}9\ nm \end{array}\right\} \text{flint}$$

Q3.



D'après la loi de Snell-Descartes $n_{air}.\sin i_1 = n_c.\sin i_{2,c}$

$n_{air} \sin i_1 = n_f.\sin i_{2,f}$

on détermine $i_{2,c}$ et $i_{2,f}$ pour les radiations rouge et bleu.

$\sin i_{2,c,rouge} = \frac{n_{air}}{n_{c,rouge}} \sin i_1$ AN : $\sin i_{2,c,rouge} = \frac{1,000}{1,504} \cdot \sin 60°$

$\sin i_{2,c,bleu} = \frac{n_{air}}{n_{c,bleu}}$ AN : $\sin i_{2,c,bleu} = \frac{1,000}{1,521} \cdot \sin 60°$

on obtient $\left.\begin{array}{l} i_{2,c,rouge} \approx 35,2° \\ i_{2,c,bleu} \approx 34,7° \end{array}\right\} \Delta i_{2,c} = 0,5°$ pour le crown

on détermine de même $i_{2,f,rouge}$ et $i_{2,f,bleu}$:

$\left.\begin{array}{l} i_{2,f,rouge} \approx 32,5° \\ i_{2,f,bleu} \approx 31,2° \end{array}\right\} \Delta i_{2,f} = 1,3°$ pour le flint.

$\Delta i_{2,f} > \Delta i_{2,c}$ donc le flint est plus dispersif que le crown.

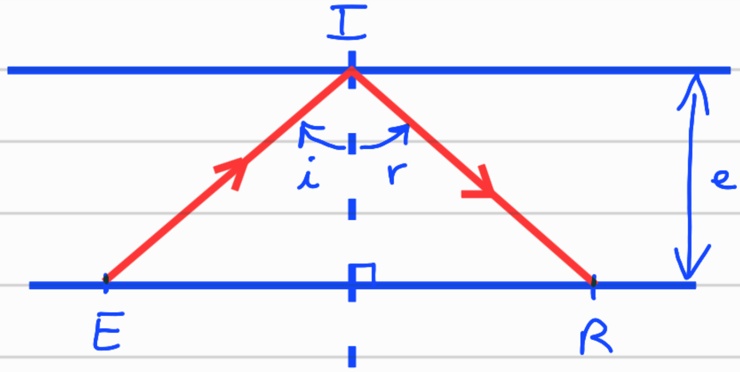
Exercice 3 :

Q1. Il y a réflexion totale en I si $\sin i > \frac{n_{air}}{n_v}$

AN : avec $n_{air} = 1,0$ et $n_v = 1,5$

$\sin i > \frac{1}{1,5}$ soit $i > 42°$.

Q2. D'après la loi de Snell-Descartes $i = -r$



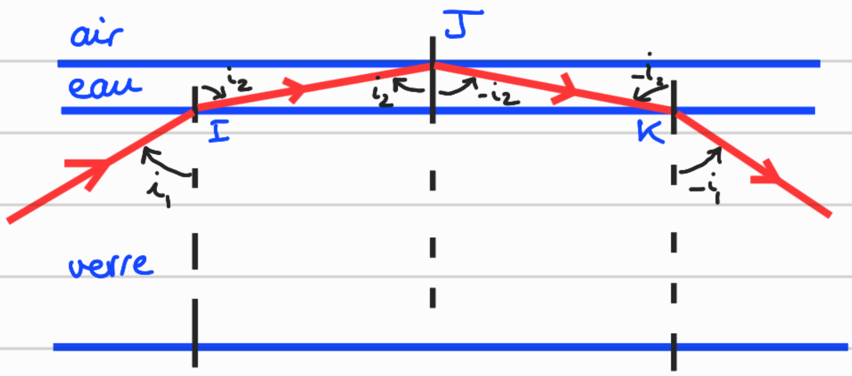
(angle $i \neq 60°$ sur le schéma)

le triangle EIR est donc isocèle, et $\frac{ER/2}{e} = \tan i$

Soit $ER = 2 e \tan i$

AN : $ER = 2.5{,}0.10^{-3}.\tan 60° = 1{,}7.10^{-2} m = 1{,}7 cm$

Q3.



le schéma n'est pas à l'échelle.

A l'interface verre-eau, on a $n_v . \sin i_1 = n_{eau} . \sin i_2$

Soit $\sin i_2 = \frac{n_v}{n_{eau}} . \sin i_1$

AN : $\sin i_2 = \frac{1{,}5}{1{,}33} . \sin 60°$ et on obtient $i_2 = 78°$

Remarque : l'angle limite vaut maintenant $\arcsin\left(\frac{1{,}33}{1{,}5}\right) \simeq 62°$ donc pour $i = 60°$, le rayon réfracté existe, les 2 conditions pour avoir réflexion totale ne sont pas remplies.

L'analyse géométrique permet de déterminer l'angle d'incidence à l'interface eau-air, il vaut i_2

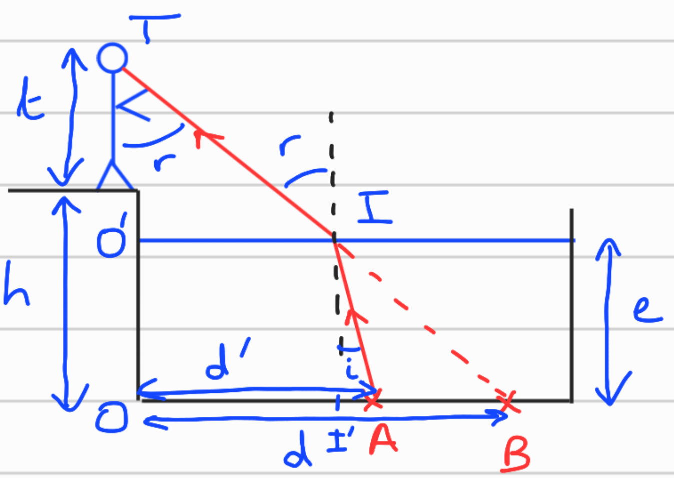
(angles alternes internes).
A l'interface eau-air, l'angle limite vaut 49°
$\left(\sin i_{lim} = \frac{1}{1{,}33}\right)$.

Les 2 conditions sont donc remplies pour avoir le phénomène de réflexion totale en J.
L'angle réfléchi est égal à l'angle d'incidence en valeur absolue, soit 78°
Au point K (interface eau-air), l'angle d'incidence vaut également 78° par symétrie.
L'application de la loi de Descartes est donc similaire à celle du point I et on obtient un angle de réfraction égal à 60°.

Le rayon lumineux n'arrive donc plus sur le détecteur, il a été décalé d'une distance $2e' \tan i_2$.
AN : $2e' \tan i_2 = 2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot \tan 78° = 9{,}4 \cdot 10^{-3}\,m = 9{,}4\,mm$.
Le détecteur perçoit cette "extinction" du faisceau et déclenche les essuies-glace grâce à un système de commande.

Exercice 4 :

Schéma de la situation :



A = position réelle de l'objet

B = position de l'objet perçue par l'observateur.

<u>On cherche d'.</u>

* Au point I, la lumière traverse le dioptre et passe dans un milieu moins réfringent $\Rightarrow$ le rayon s'écarte de la normale, selon la loi de Snell-Descartes :

$$n_{eau} \cdot \sin i = n_{air} \cdot \sin r$$

$$\Rightarrow \sin i = \frac{1}{n_{eau}} \cdot \sin r \quad (n_{air} \approx 1)$$

* Géométrie :

- dans le triangle TOB : l'angle OTB vaut r et $\tan OTB = \dfrac{d}{t+h}$

$$\tan r = \frac{d}{t+h}$$

- dans le triangle TO'I : $\tan r = \dfrac{O'I}{t+h-e}$

- dans le triangle I'IA : $\tan i = \dfrac{d'-OI'}{e}$

et $OI' = O'I \Rightarrow \tan i = \dfrac{d'-O'I}{e}$

$$d' - O'I = e \cdot \tan i$$

$$d' = e \cdot \tan i + O'I = e \tan i + \tan r (t+h-e)$$

$$d' = e \left(\frac{\sin i}{\cos i} \right) + \frac{d}{t+h} (t+h-e)$$

$$\boxed{d' = e \frac{1/n_{eau} \sin r}{\sqrt{1 - \frac{1}{n_{eau}^2} \sin^2 r}} + \frac{d}{t+h}(t+h-e)}$$

Remarque : on pourrait chercher l'expression littérale de $\sin r$ en fonction de d, t, h $\left(1+\tan^2 r = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 r}}\right)$
mais les calculs seraient longs.

$\Rightarrow$ On calcule d'abord r numériquement

$$r = \arctan\left(\frac{d}{t+h}\right)$$

AN : $r = \arctan\left(\frac{1}{1{,}80+1{,}5}\right) = 16{,}9°$

on fait l'AN pour d' avec cette valeur

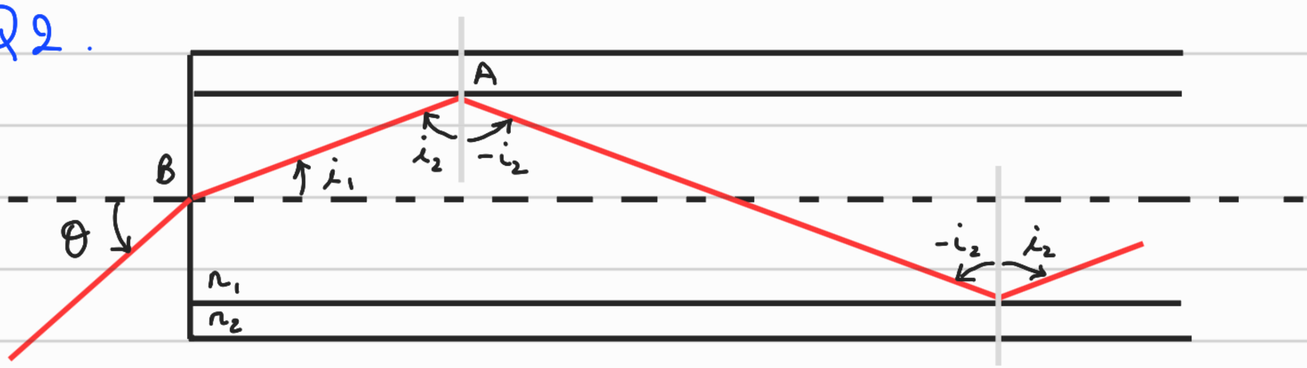
AN : $d' = 1 \dfrac{1/1{,}33 \cdot \sin 16{,}9}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 16{,}9}{1{,}33^2}}} + \dfrac{1}{1{,}80+1{,}5}(1{,}80+1{,}5-1)$

$\underline{d' = 0{,}92 \text{ m}}$

Exercice 5

Q1. c'est le phénomène de réflexion totale qui permet de guider la lumière dans la fibre.
Ce phénomène n'est possible que si $n_1 > n_2$
(matériau constitutif de la gaine moins réfringent que celui du cœur.)

Q2.



Q3. Le rayon est guidé dans la fibre si $n_1 \sin i_2 > n_2$ (réflexion totale en A), c'est à dire qu'il n'existe pas d'angle i_3 vérifiant $n_1 . \sin i_2 = n_2 . \sin i_3$.

$$n_1 \sin i_2 > n_2 \iff n_1 \cos i_1 > n_2 \quad (\text{car } i_1 + i_2 = 90°)$$

$$\iff n_1 \sqrt{1-\sin^2 i_1} > n_2 \iff \sin i_1 < \sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

Or il y a réfraction à l'entrée dans la gaine en B : $n_0 \sin\theta = n_1 \sin i_1$

soit $\sin\theta = \frac{n_1}{n_0} \sin i_1$ donc $\sin\theta < \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$

La condition de réflexion totale est donc possible pour les rayons contenus dans un cône de demi-angle au sommet θ_{max} tel que

$$\sin\theta_{max} = \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

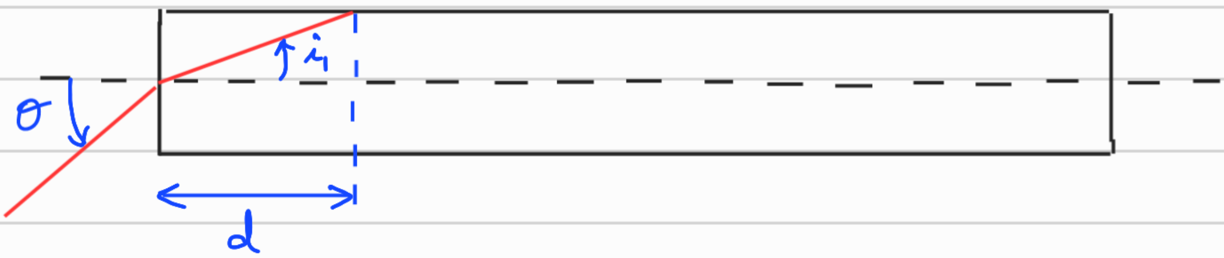
Q4. $ON = n_0 \sin\theta_{max} = n_1\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

AN : $ON = \sqrt{1{,}456^2 - 1{,}410^2} = 0{,}3631$ (ce qui correspond à $\theta_{max} \approx 21°$)

Q5. a) Le rayon qui sortira en premier de la fibre est celui qui rentre selon la normale (confondue avec l'axe Ox).

La lumière se propage à la vitesse $v_1 = \frac{c}{n_1}$ dans le cœur. Le rayon le plus rapide mettra donc $\tau_1 = \frac{L}{c/n_1} = \frac{n_1 L}{c}$ pour parcourir la fibre.

b) Le rayon qui sortira en dernier est celui qui parcourra la plus grande distance dans la fibre, c'est celui qui arrive avec l'angle θ le plus élevé θ_{max}.



Pour chaque tronçon de fibre de longueur d, ce rayon parcourt la distance $\frac{d}{\cos i_1}$

Pour la fibre complète, le rayon aura donc parcouru la distance $D = \frac{L}{\cos i}$

or $\cos i_1 = \sqrt{1 - \sin^2 i_1}$ et $n_1 \sin i_1 = n_0 \sin \theta_{max}$

$\Leftrightarrow \sin i_1 = \frac{n_0}{n_1} \sin \theta_{max}$ soit $D = \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_1} \sin \theta_{max}\right)^2}}$

En remplaçant $n_0 \sin\theta_{max}$ par son expression ($ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$) on obtient $D = \dfrac{L}{\sqrt{1 - \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}}} = \dfrac{n_1 L}{n_2}$

Et la durée du parcours pour ce rayon est $\tau_2 = \dfrac{n_1 L}{n_2 c/n} = \dfrac{n_1^2 L}{c n_2}$

c) $\delta t = \tau_2 - \tau_1 = \dfrac{n_1^2 L}{c n_2} - \dfrac{n_1 L}{c} = \dfrac{n_1 L}{c}\left(\dfrac{n_1}{n_2} - 1\right)$

soit $\boxed{\delta t = \dfrac{n_1 L}{c}\left(\dfrac{n_1}{n_2} - 1\right)}$

AN : $\delta t = \dfrac{1,456 . 1000}{3,00 . 10^8}\left(\dfrac{1,456}{1,410} - 1\right) = 1,58 . 10^{-7}\ s$

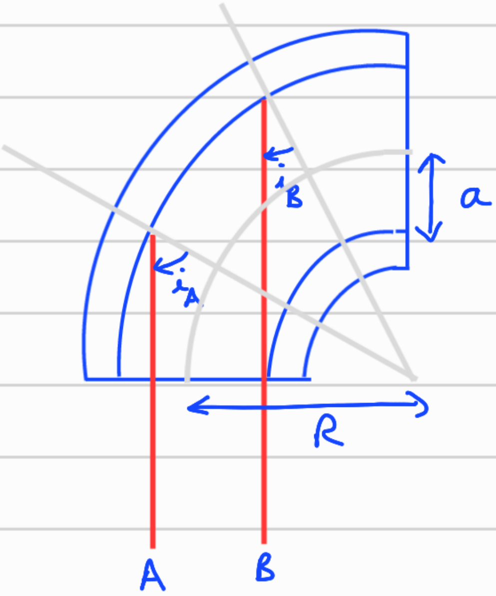
$\underline{\delta t = 0,158\ \mu s}$

Q6. Pour que les impulsions soient séparées en sortie de la fibre, il faut que la durée séparant 2 impulsions soit supérieure à l'élargissement δt : $T > \delta t$ (en supposant $T_1 \ll T$) !
Soit $T_{min} = 0,158\ \mu s$ ce qui correspond à $6,32 . 10^6$ bits/s, ce qui est inférieur mais proche de la transmission 4G.

Exercice 6 :

Q1 . Si on courbe fortement la fibre, des rayons peuvent arriver sur l'interface coeur-gaine avec un angle inférieur à l'angle limite de réflexion totale. Ils sont alors réfractés et passent dans la gaine. Dans ce cas l'énergie lumineuse est perdue.

Q2



$i_A > i_B$ donc si $i_B > i_{lim}$ alors tous les rayons subiront une réflexion totale

Il faut donc $i_B > i_{lim}$

$\Leftrightarrow \sin i_B > \sin i_{lim}$

or $\sin i_{lim} = \frac{n_2}{n_1}$

Il faut donc $\sin i_B > \frac{n_2}{n_1}$

or $\sin i_B = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{R-a}{R+a}$

Il faut donc $\frac{R-a}{R+a} > \frac{n_2}{n_1}$

$\Leftrightarrow n_1(R-a) > n_2(R+a) \Leftrightarrow R(n_1 - n_2) > a(n_2 + n_1)$

$\Leftrightarrow \boxed{R > a\frac{n_1+n_2}{n_1-n_2}}$

Tant que le rayon de courbure R reste supérieur à $R_{min} = a\frac{n_1+n_2}{n_1-n_2}$ alors la lumière est guidée dans la fibre.

Exercice 7 :

Q1. Voir cours.

Q2. Voir cours + ex 3.

Q3. A l'interface air-eau on a $\sin i = n \sin r$
d'après la loi de Snell-Descartes.
En différenciant cette expression : $\cos i \, di = n \cos r \, dr$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dr}{di} = \frac{1}{n} \frac{\cos i}{\cos r}}$$

Q4. $n_{air} < n_{eau}$ donc la réflexion totale est possible à l'interface eau-air

Q5. D'après les lois de Snell-Descartes et l'orientation des angles :

$$\left.\begin{array}{l} r = -\alpha \text{ (triangle isocèle)} \\ \alpha = -\beta \\ \beta = -\gamma \end{array}\right\} \alpha = -\beta = \gamma = -r$$

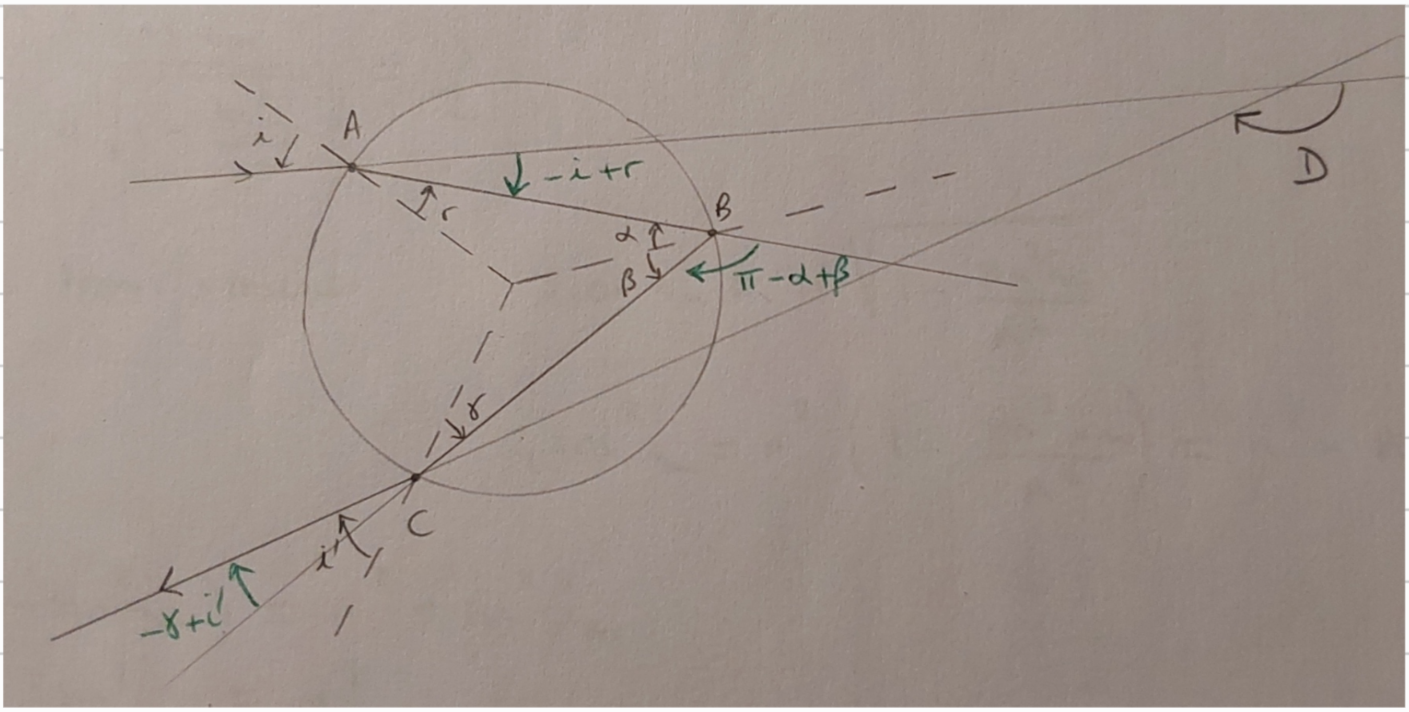
En utilisant ces égalités dans les lois de Snell-Descartes,
on a : $\sin i' = n \sin \gamma = n \sin(-r) = -n \sin r = -\sin i$

$$\Leftrightarrow \boxed{i' = -i}$$

Q6. $D = -i + r + \pi - \alpha + \beta - \gamma + i'$ ce qui donne

$D = -i + r + \pi + r + r + r - i = \pi + 4r - 2i \; [2\pi]$

pour avoir $-180 < D < 180$



Q7. les rayons émergents sont parallèles quel que soit l'angle d'incidence i si la déviation D est indépendante de i.

Q8. La condition précédente se traduit par $\frac{dD}{di} = 0$.

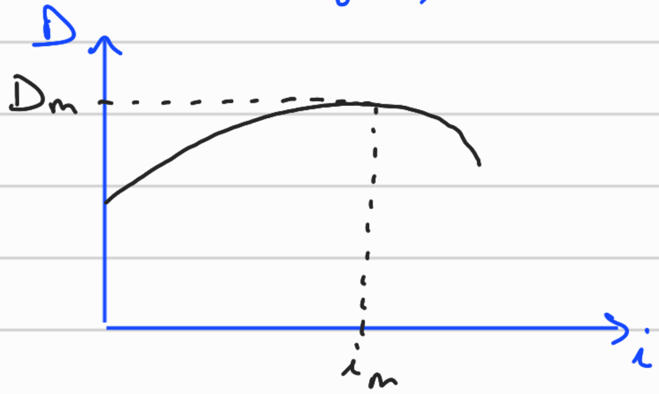
Q9. $D = \pi + 4r - 2i$

pour $i = 0$ $\quad r = 0 \Rightarrow D = \pi$

pour $i = \frac{\pi}{2}$ $\quad r = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow D = 4\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$

$= 195°$ pour $n = 1{,}33$

Tracé de $D = f(i)$ à la calculatrice :



On trouve la valeur de i_m en résolvant $\frac{dD}{di} = 0$

$$\frac{dD}{di} = 0 \Leftrightarrow 4\frac{dr}{di} - 2 = 4 \cdot \frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r} - 2$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{n}\frac{\cos i}{\sqrt{1-\sin^2 r}} - 2$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{n}\frac{\cos i}{\sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}}} - 2$$

donc $\frac{dD}{di} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos i_m}{n\sqrt{1-\frac{\sin^2 i_m}{n^2}}} = \frac{1}{2}$

Q10. $2\cos i_m = n\sqrt{1-\frac{\sin^2 i_m}{n^2}}$

$$4\cos^2 i_m = n^2\left(1-\frac{\sin^2 i_m}{n^2}\right) = n^2 - \sin^2 i_m$$

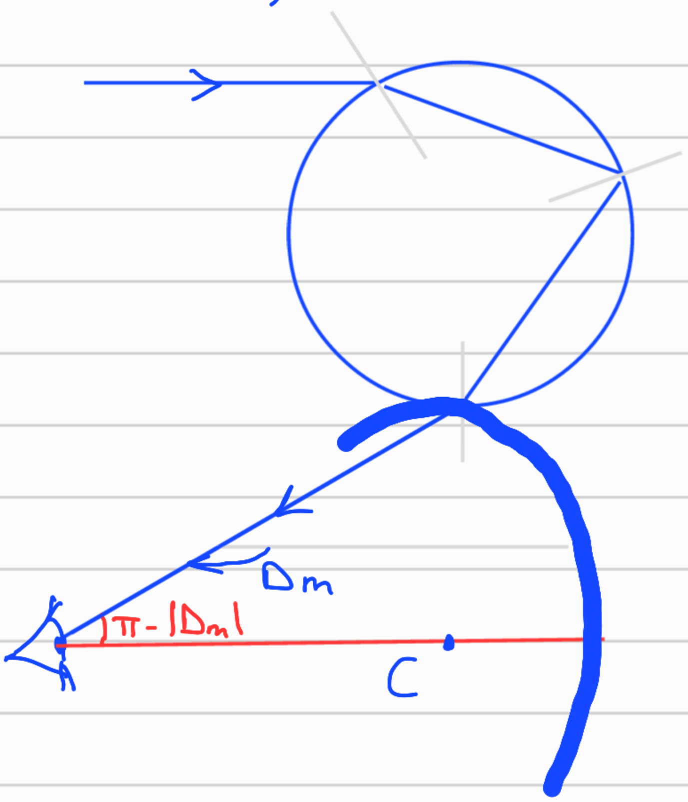
$$4(1-\sin^2 i_m) = n^2 - \sin^2 i_m$$

$$4 - 3\sin^2 i_m = n^2 \Leftrightarrow \sin^2 i_m = \frac{4-n^2}{3}$$

donc $\boxed{\sin i_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}}$

AN: $\sin i_m = \sqrt{\frac{4-1{,}33^2}{3}}$ on obtient $\underline{i_m = 60°}$

Q11. L'observateur voit apparaître un ensemble de portions de cercles concentriques sur le ciel (en avion on voit des cercles entiers).
le centre de ces cercles, noté C se trouve sur la droite issue de l'oeil de l'observateur et parallèle aux rayons lumineux issus du Soleil.
En tout point de ces cercles, l'angle entre un rayon lumineux qui atteint l'observateur et la direction initiales des rayons du soleil est $\pi - D_m$ (voir schéma).



avec $-180 < D_m < 180$

Q12. Pour déterminer l'angle du cône, il faut :

* calculer i_m avec $\sin i_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$

* calculer r avec $\sin r = \frac{\sin i_m}{n}$

* calculer $D_m = \pi + 4r - 2i \ [2\pi]$

* calculer $\pi - |D_m|$ (ou $180 - |D_m|$ si angles en degrés)

AN pour le rouge :

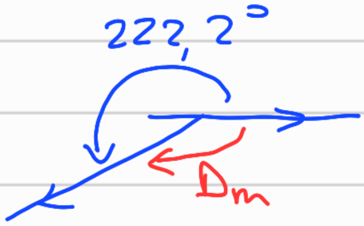
$n_r = 1,3317$

$i_{m,r} = \arcsin \sqrt{\frac{4-1,3317^2}{3}} \Rightarrow i_{m,r} = 59,5°$.

$r_r = \arcsin\left(\frac{\sin i_{m,r}}{1,3317}\right) \Rightarrow r_r = 40,3°$

$D_{m,r} = 180 + 4 \times 40,3 - 2 . 59,5 = 222,2°$

Soit D_m



Pour avoir $-180 < D_m < 180$: $-360 + 222,2°$

$D_m = -137,8°$.

Angle du cône rouge : $180 - 137,8 = 42,2°$

AN pour le violet :

$n_v = 1,3448$

$i_{m,v} = \arcsin\sqrt{\dfrac{4-1,3448}{3}} \Rightarrow i_{m,v} = 58,7°.$

$r_v = \arcsin\left(\dfrac{\sin i_{m,v}}{1,3448}\right) \Rightarrow r_v = 39,5°$

$D_{m,v} = 180 + 4 \times 39,5 - 2 \times 58,7 = 220,6°$

Pour avoir $-180 < D_m < 180$: $-360 + 220,6$

$D_m = -139,4°.$

Angle du cône violet : $180 - 139,4 = 40,6°.$

Q13. Le phénomène de dispersion (l'indice varie en fonction de la longueur d'onde) entraîne un étalement angulaire de l'arc en ciel : chaque couleur forme un cône d'angle différent.

Q14. L'angle du cône rouge est plus grand que l'angle du cône violet.

Les rayons rouges observés par l'oeil proviennent de gouttes de plus haute altitude et ce sont les rayons violets des gouttes de basse altitude qui entrent dans l'oeil. ⇒ Le violet est en dessous du rouge dans l'arc primaire.

Remarque : un arc en ciel secondaire est parfois observé au dessus de l'arc primaire, il correspond au cas où les rayons effectuent une réflexion supplémentaire dans la goutte .

l'arc en ciel secondaire est plus haut (52° au lieu de 41,5°), possède un étalement angulaire plus grand (4°) et est moins intense. l'ordre des couleurs est inversé : le rouge apparait à l'intérieur et le violet à l'extérieur.