TD 2 Correction

Exercice 5 :

Q1 La distance d_{CR} cristallin-rétine étant fixe, c'est la vergence du cristallin qui varie lorsque l'objet observé se déplace.

* En appliquant la relation de conjugaison au centre pour un objet situé au PR ($\overline{OA}$ tend vers $-\infty$)

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'_{max}} \quad \text{soit} \quad \boxed{V_{min} = \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{d_{CR}}}$$

AN : $V_{min} = \dfrac{1}{16{,}7.10^{-3}} = \underline{59{,}9\ \delta}$.

* Pour un objet situé au PP ($\overline{OA} = -25$ cm) on obtient :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'_{min}} \quad \text{soit} \quad \boxed{V_{max} = -\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{d_{CR}}}$$

AN $V_{max} = -\dfrac{1}{-0{,}25} + \dfrac{1}{16{,}7.10^{-3}} = \underline{63{,}9\ \delta}$

Q2 * A 33 ans, $V_{max} = 59,9 + 4 = 63,9\ \delta$

$\Rightarrow$ PP à 25 cm (Q1)

* A 45 ans $V_{max} = 59,9 + 1 = 60,9\ \delta$

On applique la relation de conjugaison pour déterminer le PR :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{d_{cR}} = V_{max}$$

$$\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{d_{cR}} - V_{max} = \frac{1 - d_{cR} \cdot V_{max}}{d_{cR}}$$

$$\overline{OA} = \frac{d_{cR}}{1 - d_{cR} \times V_{max}}$$

AN : $\overline{OA} = \frac{16,7 \cdot 10^{-3}}{1 - 16,7 \cdot 10^{-3} \times 60,9} = \underline{-0,981}\ m$

* A 70 ans $V_{max} = 59,9 + 0,25 = 60,15\ \delta$

Ce qui donne $\overline{OA} = \frac{16,7 \cdot 10^{-3}}{1 - 16,7 \cdot 10^{-3} \times 60,15} \simeq \underline{-3,71 m}$

Q3.

avec $\theta_l = 1'$ d'arc (pouvoir séparateur de l'œil), et d_{pp} = distance de l'œil au PP.

on a donc $\tan\theta_l = \dfrac{AB_{min}}{d_{pp}} \approx \theta_l$

Soit : $AB_{min} = \theta_l \times d_{pp}$

avec $\theta_l = 1'$ d'arc $= \dfrac{1}{60}^{\circ} = \dfrac{1}{60} \times \dfrac{2\pi}{360} = 2{,}9.10^{-4}$ rad

AN : à 33 ans $AB_{min} = 2{,}9.10^{-4} \times 0{,}25$
$= 7{,}3.10^{-5}$ m
$= \underline{73\ \mu m}$

à 45 ans $AB_{min} = 2{,}9.10^{-4} \times 0{,}981$
$= 2{,}8.10^{-4}$ m
$= \underline{280\ \mu m}$.

à 70 ans $AB_{min} = 2{,}9.10^{-4} \times 3{,}71$
$= 1{,}1.10^{-3}$ m
$= \underline{1{,}1\ mm}$.

Q4. Le PR de cette personne étant situé à 11 cm, il voit sans fatigue les objets situés 11 cm devant l'œil.
Le verre de lunette aura donc pour rôle de former l'image d'un objet situé à l'infini à cet endroit, c'est à dire 11 cm devant l'œil.

On a donc

$$A_\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} \underset{\substack{= 11\text{cm} \\ \text{devant} \\ \text{l'œil.}}}{A_1} \xrightarrow{\mathcal{L}_{crist.}} A' \text{ sur la rétine}$$

Or A_1 est aussi situé dans le plan focal image de $\mathcal{L}_1$ (objet A à l'∞)
donc $\overline{O_1A_1} = f'_1$

Or $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1}$

(avec O_2 = centre optique de la lentille modélisant le cristallin).

d'où $\boxed{f'_1 = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1}}$

AN : $f'_1 = 1 + (-11) = -10$ cm $=$ $\underline{-0{,}1 \text{ m}}$

On détermine alors la vergence du verre de lunette :

$$\boxed{V = \frac{1}{f'}}$$

AN : $V = -\frac{1}{0,1} = \underline{-10\ \delta}$.

Q5. Le verre correcteur permet de former l'image d'un objet à l'infini sur le PR de l'œil non corrigé.

Soit $A_\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_{corr}} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_{crist}} A'$ sur la rétine

A_1 situé au PR de l'œil

La vergence des verres correcteurs étant $V = +2\ \delta$, on a donc $f'_{corr} = 0,50\ m$

$\overline{O_1A_1} = f'_{corr} = 0,50\ m = 50\ cm$

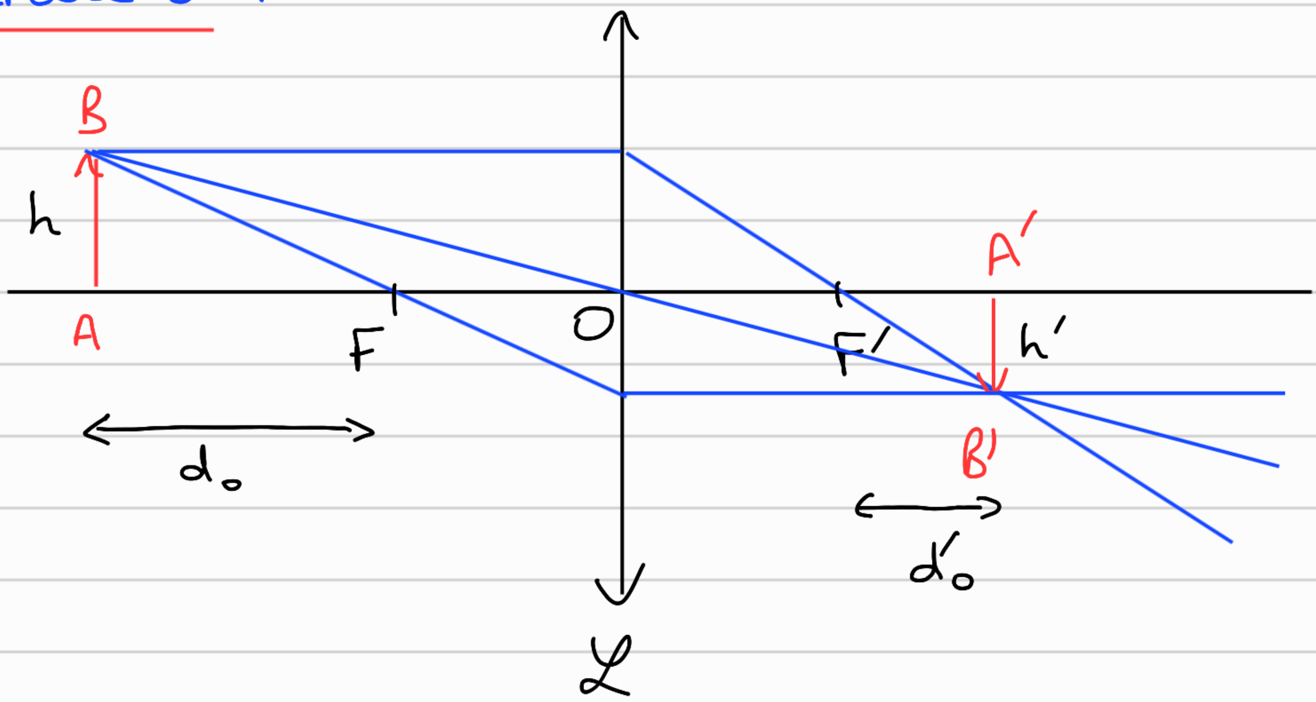
et $PR = \overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}$

AN : $PR = -1 + 50 = 49\ cm$

Le PR est donc situé 49 cm derrière le cristallin.

Exercice 6 :

Q1.



D'après le théorème de Thalès :

* $\frac{h}{h'} = \frac{d_o}{f'}$ $\Rightarrow$ $\boxed{d_o = f' \frac{h}{h'}}$

AN : $d_o = 50.10^{-3} \cdot \frac{2}{35.10^{-3}} = \underline{2,86 \text{ m}}$

* $\frac{h}{h'} = \frac{d_o + f'}{d'_o + f'}$ $\Rightarrow$ $d'_o + f' = \frac{h'}{h}(d_o + f')$

$$\boxed{d'_o = \frac{h'}{h}(d_o + f') - f'}$$

AN : $d'_o = \frac{35.10^{-3}}{2}\left(2,86 + 50.10^{-3}\right) - 50.10^{-3} = 8,75.10^{-4} \text{ m}$

$d'_o = 0,875$ mm (obtenu avec la valeur exacte de d_o)

<u>Remarque</u> : on peut aussi utiliser les relations de conjugaison et du grandissement

$$-\frac{1}{(-f'-d_0)} + \frac{1}{f'+d'_0} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \frac{h'}{h} = \frac{d'_0+f'}{-f'-d_0} \quad :$$

qui est un système 2 équations 2 inconnues

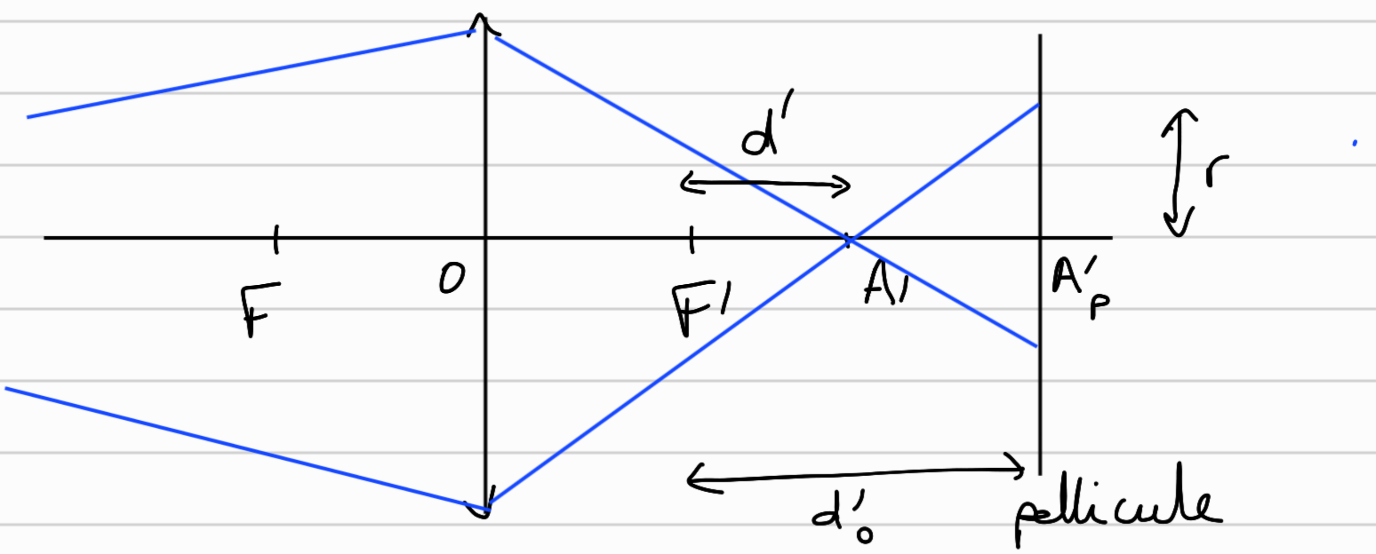
Q2. On détermine la position de l'image A' avec la relation de conjugaison de Newton :

$$\overline{FA}.\overline{F'A'} = -f'^2 \qquad \text{or} \qquad \overline{FA} = -d$$

$$(-d).\overline{F'A'} = -f'^2 \quad \Rightarrow \quad d' = \frac{f'^2}{d}$$

Pour $d > d_0$ $\qquad d' < d'_0$

L'image se trouve donc avant la pellicule



D'après le Théorème de Thalès

$$\frac{r}{R} = \frac{A'A'_P}{OA'} = \frac{d'_0 - d'}{f' + d'} \quad (\text{pour } d > d_0)$$

$$r = R \, \frac{d'_0 - d'}{f' + d'} \quad \text{or} \quad \frac{f'}{2R} = N \Rightarrow R = \frac{f'}{2N}$$

$$r = \frac{f'}{2N} \, \frac{d'_0 - d'}{f' + d'} \qquad d'_0 = \frac{f'^2}{d_0}$$

Or $d \gg f'$ donc A' est proche de F'

$d' \ll f'$.

$$r = \frac{f'}{2N} \, \frac{f'^2/d_0 - f'^2/d}{f'}$$

$$\boxed{r = \frac{f'^2}{2N}\left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d}\right)}$$

Remarque : pour $d < d_0$ $\quad d'_0 < d$

donc $r = \frac{f'^2}{2N}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_0}\right)$

Q3. Sur la pellicule r ne doit pas dépasser $r_{max} = \frac{10^{-3}}{25} = 4.10^{-5}$ m soit 40 µm. (agrandissement d'1 facteur 25).

Or pour $d \to \infty$ $r = \frac{(50.10^{-3})^2}{2.11}\left(\frac{1}{2,86}\right)$

$r = 3,97.10^{-5}$ m. soit 39,7 µm.

c'est proche de la limite acceptable.

Tous les objets situés au delà de d_0 seront nets.

Pour $d < d_0$ on cherche d_{min} tel que :

$$r_{max} = \frac{f'^2}{2N}\left(\frac{1}{d_{min}} - \frac{1}{d_0}\right)$$

$$\frac{2N\,r_{max}}{f'^2} = \frac{1}{d_{min}} - \frac{1}{d_0}$$

$$\frac{1}{d_{min}} = \frac{2N\,r_{max}}{f'^2} + \frac{1}{d_0}$$

$$\boxed{d_{min} = \frac{1}{\frac{2N\,r_{max}}{f'^2} + \frac{1}{d_0}}}$$

AN : $d_{min} = \dfrac{1}{\dfrac{22.4{,}0.10^{-5}}{(50.10^{-3})^2} + \dfrac{1}{286}} = \underline{1{,}43\ m}$

Les objets compris entre 1,43 m après F' et l' infini seront nets.
C' est la profondeur de champ.

Question bonus : déterminer la profondeur de champ en fonction de l'ouverture N et montrer que si N ↗ la profondeur de champ diminue et inversement :

$$\text{prof. de champ} = p(N) = d_{max} - d_{min}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{d_0} - \frac{2Nr_{max}}{f'^2}} - \frac{1}{\frac{1}{d_0} + \frac{2Nr_{max}}{f'^2}}$$

$$= \frac{4Nr_{max}/f'^2}{1/d_0^2 - \frac{4N^2r_{max}^2}{f'^4}}$$

On pose $A = \dfrac{2r_{max}}{f'^2}$ et $B = \dfrac{1}{d_0^2}$

$$p(N) = \frac{2AN}{B - A^2N}$$

On étudie les variations de $p(N)$:

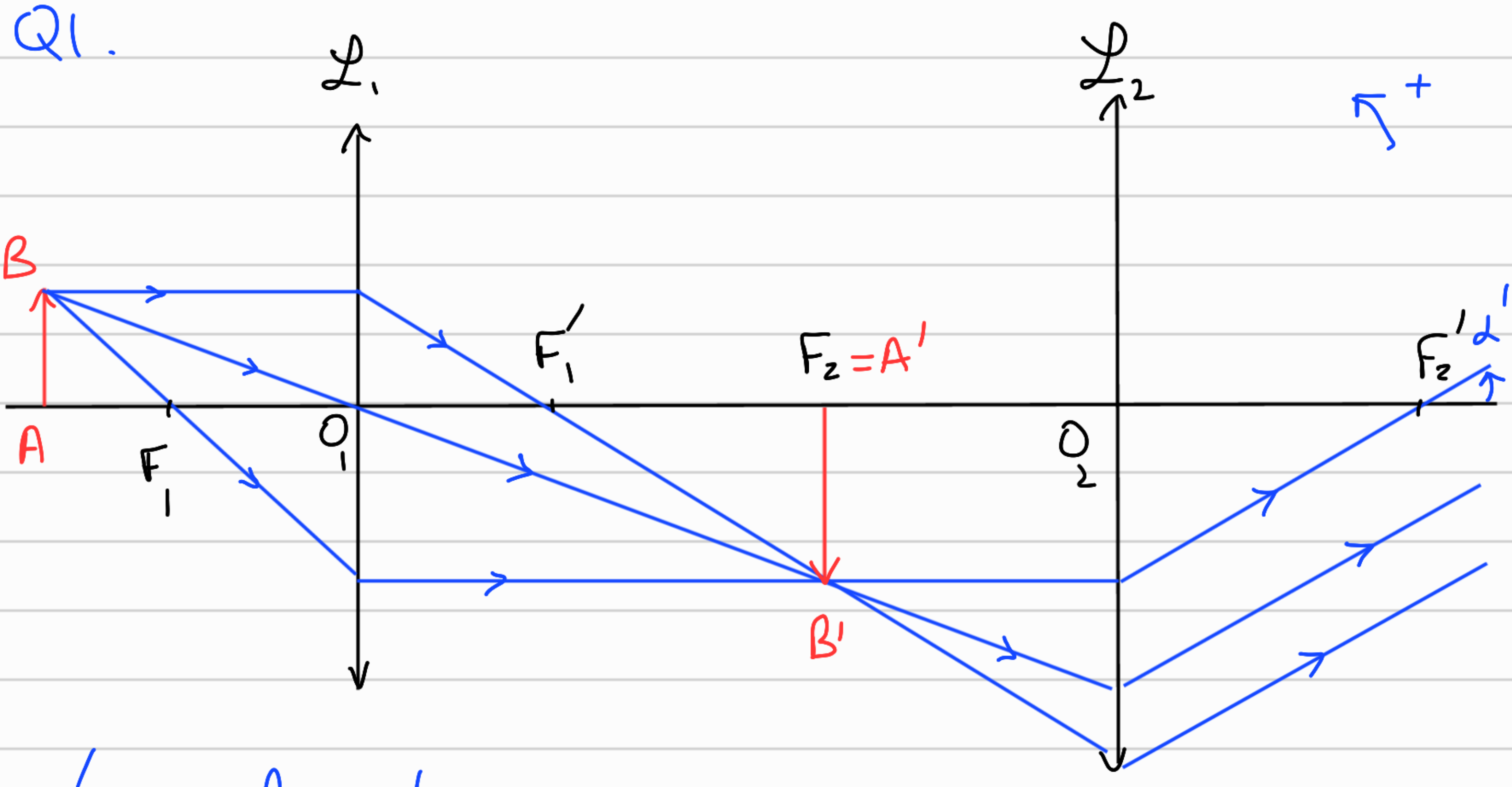
$$p'(N) = \frac{2AB - 6A^3N}{(B - A^2N)^2}$$

..... $p'(N) < 0$ pour $N > -0{,}06$.

or N est positif donc $p(N)$ est une fonction décroissante : si $N \nearrow$ la profondeur de champ diminue.

Exercice 7 :

Q1.



(en plus le rayon passant par O_1)

Q2. D'après l'énoncé $G = 10$

Or $G = \frac{\alpha'}{\alpha} \simeq \frac{\tan\alpha'}{\tan\alpha}$

avec $\left.\begin{array}{l} \tan\alpha' = \frac{-\overline{A'B'}}{f_2'} \\ \text{et } \tan\alpha = -\frac{\overline{A'B'}}{\delta} \end{array}\right\} G = \frac{\delta}{f_2'}$

$\Rightarrow \boxed{f_2' = \frac{\delta}{G}}$

AN: $f_2' = \frac{25.10^{-2}}{10} = \underline{2{,}5.10^{-2}\ m}$

Q3. $\gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}} \Rightarrow \overline{O_1A} = \frac{\overline{O_1A'}}{\gamma_1}$

Et d'après la relation de conjugaison

$-\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{f_1'}$

$(1-\gamma_1)\frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{f_1'}$

Or $\overline{O_1A'} = \overline{O_1F_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'F_2} = f_1' + \Delta$

$$\frac{1-\gamma_1}{f_1'+\Delta} = \frac{1}{f_1'}$$

$$(1-\gamma_1) f_1' = f_1' + \Delta \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_1' = -\frac{\Delta}{G}}$$

AN : $f_1' = -\dfrac{16.10^{-2}}{-40} = \underline{4{,}0\,10^{-3}\ m}$

Q4. $\overline{O_1A} = \dfrac{\overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'F_2}}{\gamma_1} = \dfrac{f_1' + \Delta}{\gamma_1}$

AN : $\overline{O_1A} = \dfrac{4{,}0.10^{-3} + 16.10^{-2}}{-40} = \underline{-4{,}1.10^{-3}\ m}$

Q5. Un œil emmétrope voit les objets situés entre le PP (à δ) et l'∞.

La position de AB correspondant à une observation à l'∞ est $\overline{O_1A} = -4{,}1.10^{-3}\ m$ (Q4).

Pour les objets donnant une image finale au PP on a :

$$A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1'B_1' \xrightarrow{\mathcal{L}_2} PP.$$

On applique la relation de conjugaison deux fois :

$$\overline{F_1A_1} \cdot \overline{F_1'A_1'} = -f_1'^2$$

et $$\overline{F_2A_1'} \cdot \overline{F_2'A_1''} = -f_2'^2$$

avec $$\overline{F_2'A_1''} = -\delta$$

et $$\overline{F_2A_1'} = \overline{F_2F_1'} + \overline{F_1'A_1'} = -\Delta + \overline{F_1'A_1'}$$

$$\left.\begin{array}{l} (\overline{F_1'A_1'} - \Delta) \cdot (-\delta) = -f_2'^2 \\ \text{et} \quad \overline{F_1'A_1'} = -\dfrac{f_1'^2}{\overline{F_1A_1}} \end{array}\right\} \quad \frac{f_1'^2}{\overline{F_1A_1}} + \Delta = -\frac{f_2'^2}{\delta}$$

$$\frac{f_1'^2}{\overline{F_1A_1}} = -\frac{f_2'^2}{\delta} - \Delta = -\frac{f_2'^2 - \delta\Delta}{\delta}$$

$$\overline{F_1A_1} = -\frac{\delta f_1'^2}{f_2'^2 + \delta\Delta} = -\frac{f_1'^2}{\Delta + \dfrac{f_2'^2}{\delta}}$$

et $$\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F_1} + \overline{F_1A_1}$$

$$\boxed{\overline{O_1A_1} = -f_1' - \frac{f_1'^2}{\Delta + \dfrac{f_2'^2}{\delta}}}$$

La latitude de mise au point est

donc : $\overline{AA_1} = \overline{AO_1} + \overline{O_1A_1}$

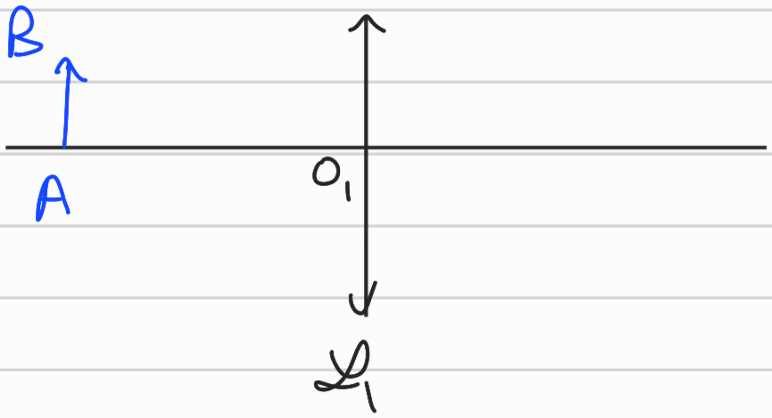
$$\boxed{\overline{AA_1} = -\frac{f_1'+\Delta}{\gamma_1} - f_1' - \frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'^2}{\delta}}}$$

AN : $\overline{AA_1} = -\frac{0{,}4+16}{40} - 0{,}4 - \frac{0{,}4^2}{16+\frac{25^2}{25}} = -8{,}2.10^{-1}$ cm
(en cm)

Latitude de mise au point : 8,2 mm.

Q6. Pour $\overline{O_1A} = -4{,}1$ mm

et une lamelle de microscope de largeur 1 cm, on a $\overline{AB}_{max} = 5$ mm
u d'environ 45°



($\tan u \simeq 1$)

Avec un angle de 45° on n'est pas dans les conditions de Gauss. Il faut corriger des aberrations de sphéricité.

Q7.

$$O_1 \xleftrightarrow{\mathcal{L}_2} C \quad \text{(cercle oculaire)}$$

La relation de conjugaison donne

$$\overline{F_2O_1} \cdot \overline{F_2'C} = -f_2'^2$$

$$\left(\overline{F_2O_2} + \overline{O_2O_1}\right) \overline{F_2'C} = -f_2'^2$$

$$(f_2' + \Delta)\, \overline{F_2'C} = -f_2'^2$$

$$\boxed{\overline{F_2'C} = -\frac{f_2'^2}{f_2' + \Delta}}$$

AN : $\overline{F_2'C} = -\dfrac{2{,}5^2}{2{,}5 + 16} = -3{,}38 \cdot 10^{-1}\ \text{cm}$

$$\underline{\overline{F_2'C} = -3{,}38\ \text{mm}}$$

La taille du cercle oculaire est telle que $\dfrac{D'}{D} = \dfrac{\overline{O_2C}}{\overline{O_2O_1}}$

$$D' = D \cdot \frac{\overline{O_2F_2'} + \overline{F_2'C}}{-\Delta}$$

$$D' = D\, \frac{f_2' - f_2'^2 / f_2' + \Delta}{-\Delta}$$

$$D \cdot \frac{f_2'^2 + \Delta f_2' - f_2'^2}{-(f_2' + \Delta)\Delta} = \frac{-D f_2'}{f_2' + \Delta}$$

le cercle oculaire est le plus petit cercle où arrivent tous les rayons

$\Rightarrow$ c'est là que le faisceau de lumière est le plus concentré !