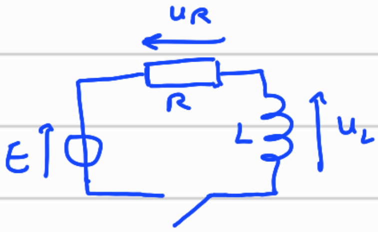
Correction du TD n°4

Exercice 1

Q1.



Q2 Analyse dimensionnelle : $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ et $u_R = Ri$

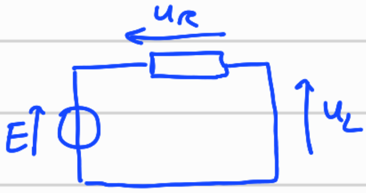
donc $[L]\cdot\dfrac{I}{T} = [R]\cdot I$ soit $\dfrac{[L]}{[R]} = T$

$$\boxed{\left[\frac{L}{R}\right] = T}$$

La grandeur $\frac{L}{R}$ a la dimension d'un temps. C'est un temps caractéristique du circuit RL série.

Q3. En régime permanent la bobine est équivalente à un fil :

à $t = +\infty$



soit $u_L(+\infty) = 0\ V$

En faisant une loi des mailles on obtient :

$E - Ri(+\infty) = 0 \iff \boxed{i(+\infty) = \dfrac{E}{R}}$

Q4. D'après la loi des mailles dans le circuit représenté à la question 1 :

$E - u_R - u_L = 0$

$E - Ri - L\dfrac{di}{dt} = 0$ que l'on peut mettre sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}}$$

On résoud cette equation différentielle :

* équation homogène : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$

solution : $i_H(t) = Ae^{-t/L/R} = A e^{-\frac{R}{L}t}$

* solution particulière : on cherche 1 solution de la forme du 2^{nd} membre, c'est à dire une constante :
$i_p(t) = B$ avec B = constante.
on obtient : $\frac{R}{L} \cdot B = \frac{E}{L}$ soit $B = \frac{E}{R}$

* solution complète : $i(t) = i_H(t) + i_p(t)$
$i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$

on détermine la constante A avec les conditions initiales : la continuité de l'intensité du courant dans la bobine impose $i(0^+) = i(0^-) = 0$
On a donc $0 = Ae^{-0} + \frac{E}{R}$ soit $A = -\frac{E}{R}$

* Solution complète : $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Q5. A t_m $i(t_m) = 0{,}95\, i(\infty) = 0{,}95 \frac{E}{R}$

Soit $0{,}95 \frac{E}{R} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t_m}\right)$

$0{,}95 = 1 - e^{-\frac{R}{L}t_m}$

$e^{-\frac{R}{L}t_m} = 0{,}05$

$$\boxed{t_m = -\frac{L}{R} \ln(0{,}05)}$$

AN : $t_m = -\frac{39{,}96.10^{-3}}{2{,}0.10^3} \times \ln 0{,}05$

$t_m = 6{,}0 . 10^{-5}$ s   soit $\underline{t_m = 60\,\mu s}$

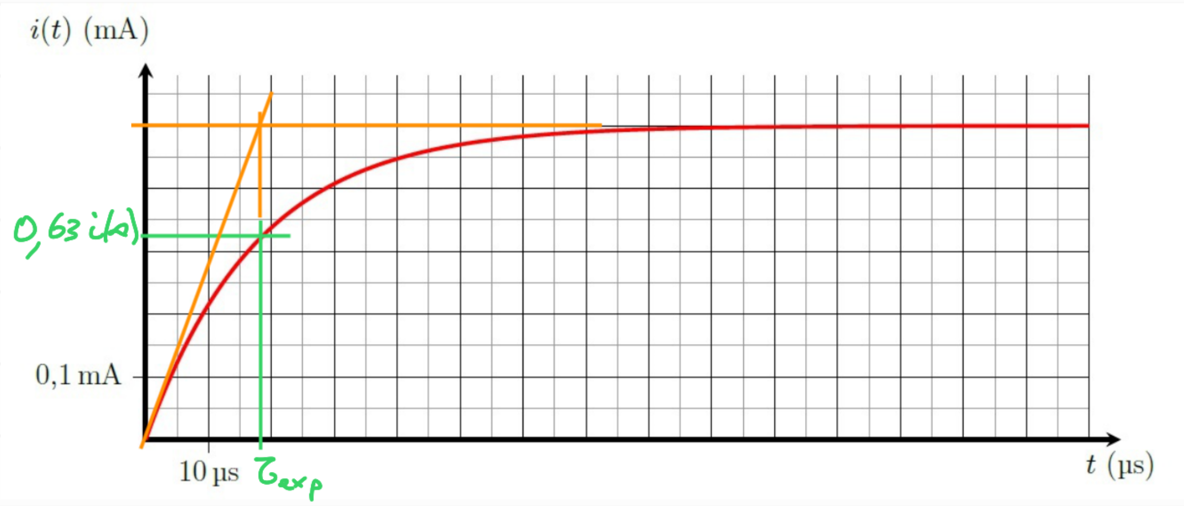
Q6. a) Pour déterminer $i(\infty)$ on trace l'asymptote et on obtient $i(\infty) = 0{,}5$ mA.
On avait montré que $i(\infty) = \frac{E}{R}$.
Avec les données, on calcule la valeur théorique de $i(\infty)$:

$$i(\infty) = \frac{1{,}0}{2{,}0.10^3} = 5{,}0.10^{-4}\text{ A} = 0{,}5\text{ mA}.$$

b) Détermination graphique de τ : 2 méthodes.

<u>1ère méthode</u> : On calcule $0{,}63 \times i(\infty)$ et on cherche son l'abscisse.

$$0{,}63 \times 0{,}50.10^{-3} = 3{,}2.10^{-4}\text{ A} = 0{,}32\text{ mA}$$



on obtient $\tau \approx 18\,\mu s$.

Avec les données on calcule τ_{th} : $\tau_{th} = \frac{L}{R}$

AN : $\tau_{th} = \frac{39{,}96.10^{-3}}{2{,}0.10^3} = 2{,}0.10^{-5}\text{ s} = 20\,\mu s$.

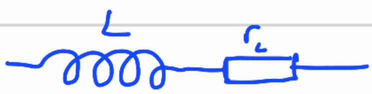
<u>Remarque</u> : sur votre copie il faut déterminer plus précisément les abscisses et les ordonnées

sur la courbe en utilisant les échelles du graphique : 1cm représente .... µs (horizontalement)
1cm représente ... mA (verticalement).

2ème méthode : on trace la tangente à l'origine, elle coupe l'asymptote en $t = \tau$.

On obtient donc $\tau_{exp} \approx 18\,\mu s$ ce qui est inférieur à $\tau_{th} = 20\,\mu s$.

c) Cet écart peut s'expliquer par le fait qu'on a négligé les résistances internes de la bobine et du générateur :



et

La résistance totale du circuit est donc $R + r_L + r_g$.

$$\tau_{exp} = \frac{L}{R + r_L + r_g}$$

Soit $$r_L + r_g = \frac{L}{\tau_{exp}} - R$$

AN : $$r_L + r_g = \frac{39{,}96 \cdot 10^{-3}}{18 \cdot 10^{-6}} - 2{,}0 \cdot 10^{3}$$

$$\underline{r_L + r_g = 220\ \Omega}$$

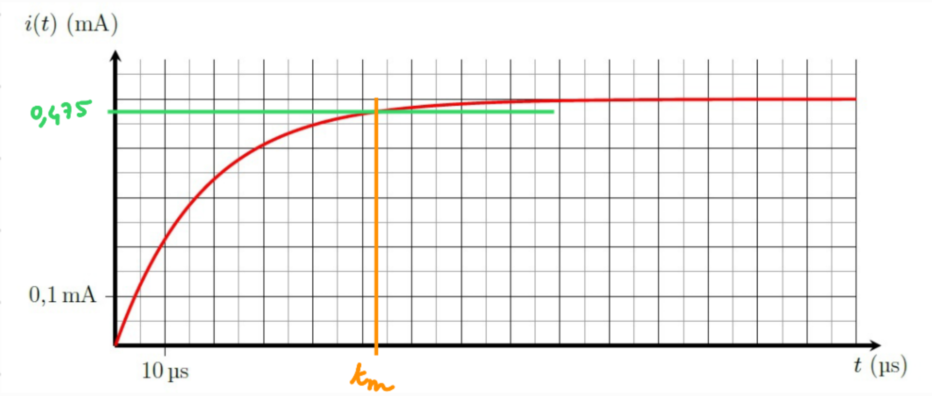
Remarque : détermination graphique de t_m :
Pour déterminer t_m graphiquement on cherche à quelle date i vaut 0,95 % de sa valeur maximale $i(\infty)$.

On lit $i(\infty) = 0{,}5 \text{ mA}$

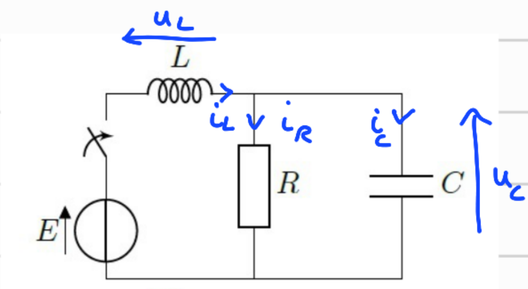
d'où $\quad 0{,}95\, i(\infty) = 0{,}475 \text{ mA}$.

On cherche donc l'abscisse du point d'ordonnée $0{,}475$ mA.

$i(t_m) = 53\ \mu s$.



Exercice 2 :

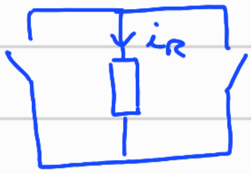


à $t = 0^-$

$i_L(0^-) = 0 \text{ A}$

$i_C(0^-) = 0 \text{ A}$

$u_C(0^-) = 0 \text{V}$ car $i_R(0^-) = 0 \text{ A}$



Par continuité de u_C et i_L, on a donc :

$u_C(0^+) = 0 \text{ V}$

$i_L(0^+) = 0 \text{ A}$

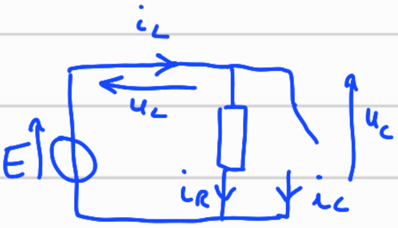
donc $\quad i_R(0^+) + i_C(0^+) = 0 \qquad$ or $\quad i_C = C \dfrac{du_C}{dt}$

$$\frac{u_C(0^+)}{R} + C \left.\frac{du_C}{dt}\right)_{0^+} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{du_C}{dt}\right)_{0^+} = 0 .$$

Et $\quad u_L(0^+) + u_C(0^+) = E$

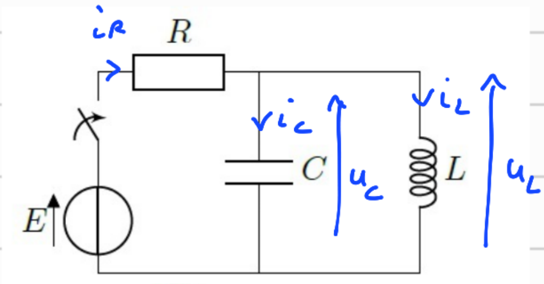
soit $\quad u_L(0^+) = E = L \left.\dfrac{di_L}{dt}\right)_{0^+} \quad \Rightarrow \quad \left.\dfrac{di_L}{dt}\right)_{0^+} = \dfrac{E}{L}$

Pour $t \to \infty$ on a le circuit équivalent :

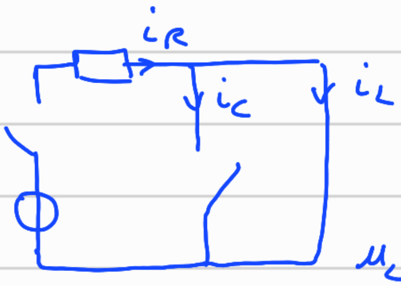


$$i_C(\infty) = 0\,A$$
$$i_L(\infty) = i_R(\infty) = \frac{E}{R}$$

$$u_C(\infty) = E$$
$$u_L(\infty) = 0\,V$$



à $t = 0^-$:



$$i_C(0^-) = 0\,A$$
$$i_R(0^-) = 0\,A$$
$$i_L(0^-) = 0\,A$$
$$u_L(0^-) = u_C(0^-) = 0\,V$$

Par continuité : $i_L(0^+) = 0\,A$

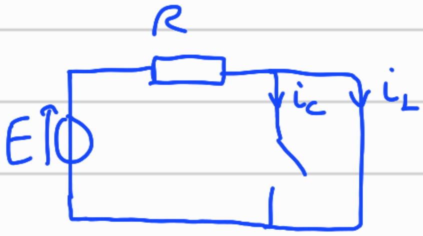
$$u_C(0^+) = 0\,V \Rightarrow L\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = 0\,A.s^{-1}$$

soit $\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = 0\,A.s^{-1}$

$$i_R(0^+) = \frac{E}{R} = i_C(0^+) = C\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0^+}$$

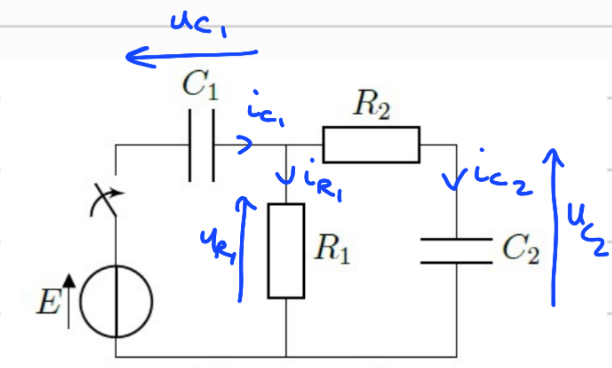
soit $\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0^+} = \frac{E}{RC}$

A $t \to \infty$ le circuit est équivalent à :

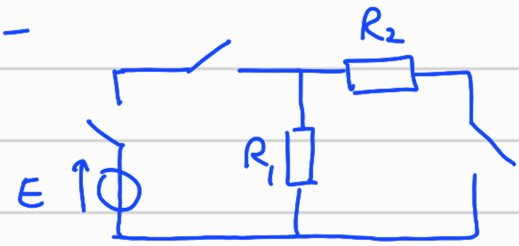


$$i_C(\infty) = 0\,A$$
$$\Rightarrow i_R(\infty) = i_L(\infty) = \frac{E}{R}$$

$$u_L(\infty) = u_C(\infty) = 0\,V$$



à $t = 0^-$



$i_{C_1}(0^-) = 0\,A = i_{C_2}(0^-)$

$i_{R_1}(0^-) = 0\text{ A}$

donc $u_{C_2}(0^-) = 0\text{ V}$

et $u_{C_1}(0^-) = 0\text{ V}$ (cond. déchargé)

Par continuité à $t = 0^+$ $u_{C_1}(0^+) = 0$

$u_{C_2}(0^+) = 0$

donc $u_{R_1}(0^+) = E$

et $i_{R_1}(0^+) = \frac{E}{R_1}$

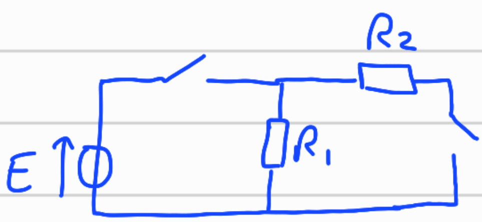
$$u_{R_2}(0^+) = E \Rightarrow i_{C_2}(0^+) = \frac{E}{R_2} = C\left.\frac{du_{C_2}}{dt}\right|_{0^+}$$

$$\left.\frac{du_{C_2}}{dt}\right|_{0^+} = \frac{E}{R_2 C}$$

$$i_{C_1}(0^+) = i_{R_2}(0^+) + i_{C_2}(0^+) = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} = C\left.\frac{du_{C_1}}{dt}\right|_{0^+}$$

$$\left.\frac{du_{C_1}}{dt}\right|_{0^+} = \frac{E}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

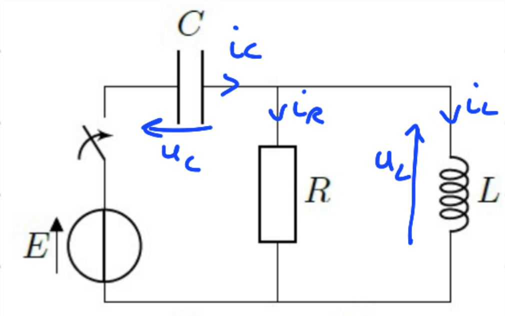
A $t \to \infty$:



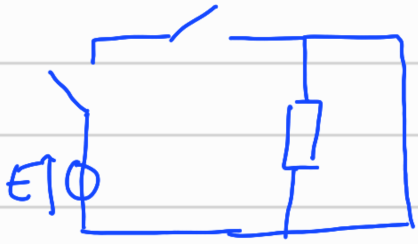
$i_{C_2}(\infty) = i_{C_1}(\infty) = 0\text{ A}$ donc $i_{R_1}(\infty) = 0\text{ A}$

donc $u_{R_1}(\infty) = 0\text{ V}$

$u_{C_1}(\infty) = E$ et $u_{C_2}(\infty) = 0\text{ V}$



à $t = 0^-$



$i_C(0^-) = 0 \qquad u_L(0^-) = 0$

$i_R(0^-) = 0 \quad$ donc $\quad i_L(0^-) = 0$

Par continuité à $t = 0^+$:

$u_C(0^+) = 0\,V$ (cond. déchargé car $u_C(0^-) = u_L(0^-) = 0V$).

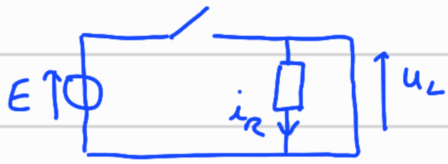
$i_L(0^+) = 0\,A$

donc $\quad u_R(0^+) = E \quad \Rightarrow \quad i_R(0^+) = \frac{E}{R} = i_C(0^+) = C \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0^+}$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0^+} = \frac{E}{RC}$$

et $\quad L \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = E \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = \frac{E}{L}$

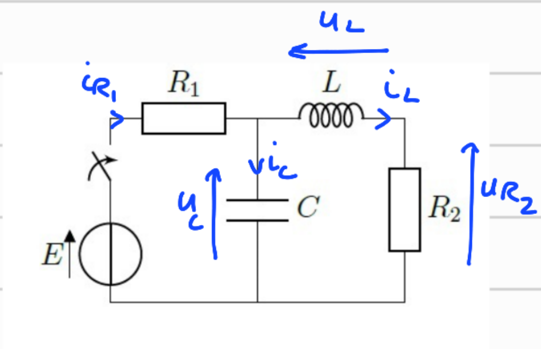
A $t \to \infty$



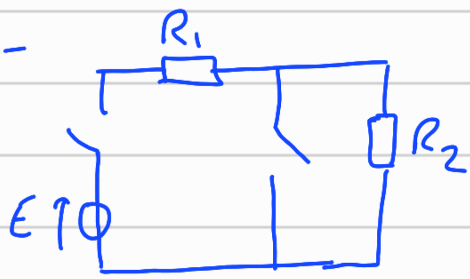
$i_C(\infty) = 0\,A$

$u_L(\infty) = 0\,V$

$u_R(\infty) = 0\,V \Rightarrow i_R(\infty) = 0\,A \Rightarrow i_L(\infty) = 0\,A$



A $t = 0^-$



$\left.\begin{array}{l} i_C(0^-) = 0\,A \\ i_{R_1}(0^-) = 0\,A \end{array}\right\} \begin{array}{l} i_L(0^-) = 0\,A \\ u_{R_2}(0^-) = 0V = u_C(0^-) \end{array}$

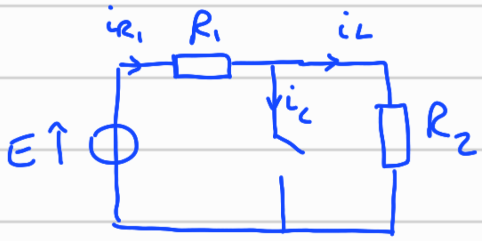
Par continuité à $t = 0^+$:

$\left.\begin{array}{l} i_L(0^+) = 0 \text{ A} \\ u_C(0^+) = 0 \text{ V} \end{array}\right\}$ $u_L(0^+) = 0\,\text{V} = L \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} \Rightarrow \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = 0\,\text{A.s}^{-1}$

$u_{R_1}(0^+) = E \Rightarrow i_{R_1}(0^+) = i_C(0^+) = \frac{E}{R_1} = C \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0^+}$

$\Rightarrow \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{0^+} = \frac{E}{R_1 C}$

Pour $t \to \infty$:

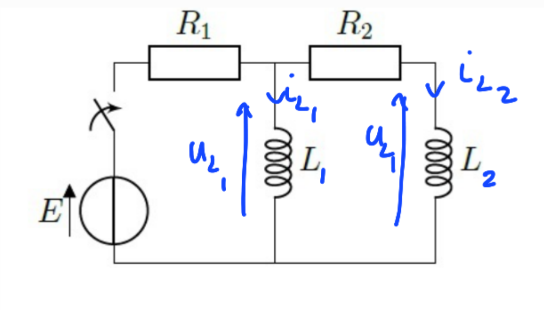


$i_C(\infty) = 0$ A

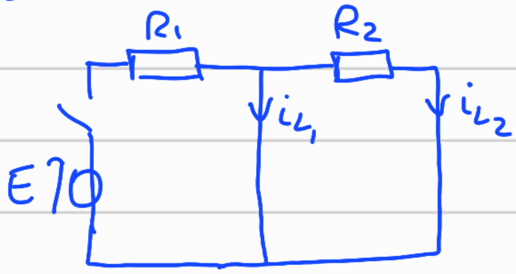
$u_L(\infty) = 0$ V

donc $i_{R_1}(\infty) = i_L(\infty) = E/(R_1+R_2)$

et $u_C(\infty) = E \frac{R_2}{R_1+R_2}$ (pont diviseur de tension).



à $t = 0^-$



$u_{L_1}(0^-) = 0\,\text{V} \Rightarrow i_{L_2}(0^-) = 0$ A

$i_{R_1}(0^-) = 0$ A

$i_{L_1}(0^-) = 0$ A

$u_{L_2}(0^-) = 0$ V

Par continuité à $t = 0^+$:

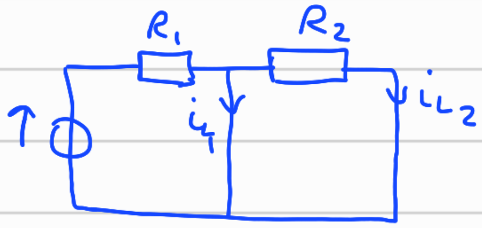
$i_{L_1}(0^+) = 0$ A et $i_{L_2}(0^+) = 0$ A

donc $i_{R_1}(0^+) = 0$ A et $u_{L_1}(0^+) = E = L_1 \left.\frac{di_{L_1}}{dt}\right|_{0^+}$

donc $\left.\frac{di_{L_1}}{dt}\right|_{0+} = \frac{E}{L}$

et $u_{L_2}(0^+) = E = L_2 \left.\frac{di_{L_2}}{dt}\right|_{0+} \Rightarrow \left.\frac{di_{L_2}}{dt}\right|_{0+} = \frac{E}{L_2}$

Pour $t \to \infty$:



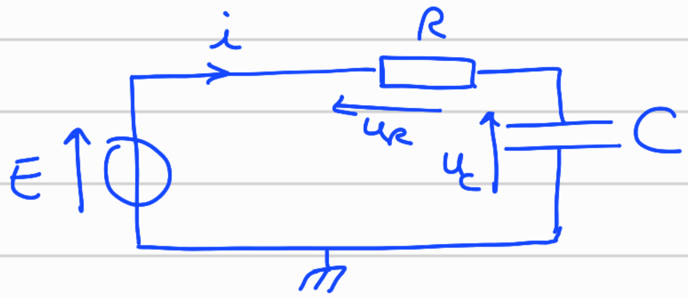
$i_{L_2}(\infty) = 0A$ car $u_{L_1}(\infty) = 0V$

$i_{L_1}(\infty) = \frac{E}{R_1}$

$u_{L_2}(\infty) = 0\ V$

Exercice 3 :

Q1. On observe la charge du condensateur.



D'après la loi des mailles :

$E - u_R - u_C = 0$ avec $u_R = Ri = R\frac{dq}{dt} = RC\frac{du_C}{dt}$

$\Rightarrow RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E$

$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$

* Solution de l'équation homogène :

$$u_{c,H} = Ke^{-t/RC}$$

* Solution particulière : $u_{c,p} = E$

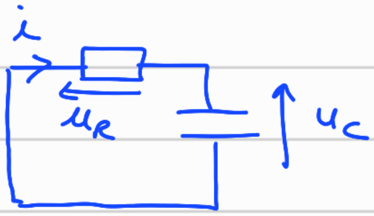
* Solution complète : $u_c(t) = E + Ke^{-t/\tau}$

Conditions initiales : $u_c(0) = 0$ (condensateur initialement déchargé)

$\Rightarrow$ $0 = E + K$

$\Rightarrow$ $$\boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Q2. On est dans le régime libre du circuit RC :



$$u_c + u_R = 0$$

$$u_c + RC\frac{du_c}{dt} = 0$$

Forme canonique : $\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_c = 0$

Solution générale : $u_c(t) = k' e^{-t/\tau}$

Condition initiale $u_c(0) = E$

$E = k'$ $\Rightarrow$ $\boxed{u_c(t) = E e^{-t/\tau}}$

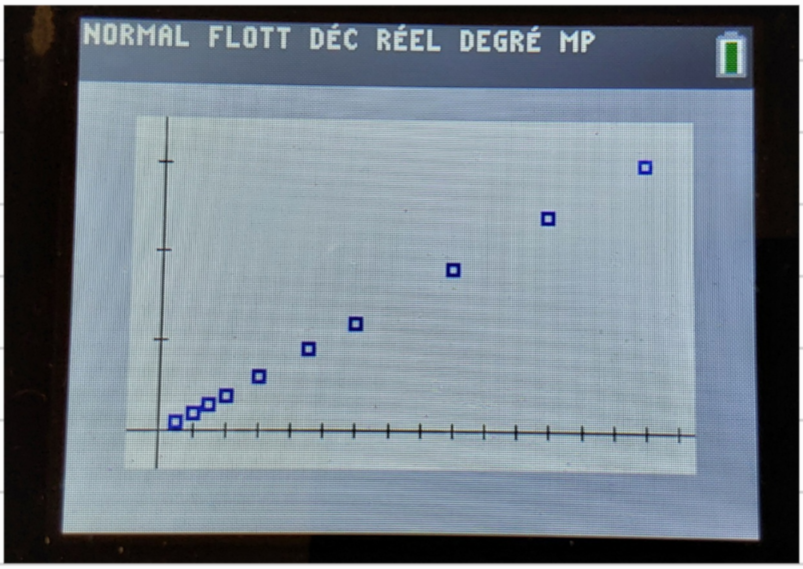
$$\frac{E}{u_c} = e^{t/\tau}$$

$$\ln\left(\frac{E}{u_c}\right) = \frac{t}{\tau}$$

$\Rightarrow$ La représentation graphique de $\ln\left(\frac{E}{u_c}\right)$ en fonction de t devrait être une droite de coefficient directeur $\frac{1}{\tau}$ et d'ordonnée à l'origine nulle.

Q3 . On détermine $\ln\left(\frac{E}{u_c}\right)$ pour chaque mesure :

t(s)	5	10	15	20	30	45	60	90	120	150
$\ln\left(\frac{E}{u_c}\right)$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,60	0,90	1,20	1,80	2,40	3,00



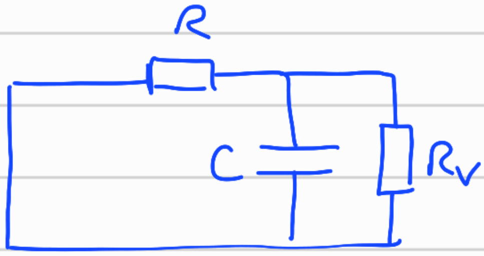
La relation est bien linéaire.
Calcul de la pente : $a = \frac{3}{150} = 0{,}02\ s^{-1}$

(ou régression linéaire avec la calculatrice).

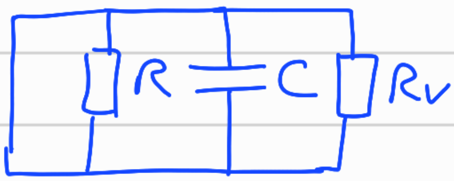
Or $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{10^7 \cdot 10^{-5}} = 0{,}01\ s^{-1}$

$\Rightarrow$ l'écart est significatif.

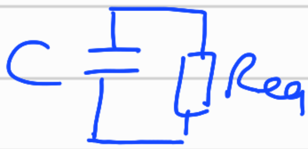
Q4. En régime libre le seul composant qui n'apparaît pas dans le circuit est le voltmètre utilisé pour mesurer u_c :



Ce qui est équivalent à



soit



avec $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} \iff R_{eq} = \frac{R.R_V}{R+R_V}$

La constante de temps de ce circuit est donc $\tau = R_{eq}C$

On résoud : $\dfrac{R.R_V}{R+R_V} . C = \dfrac{1}{\tau}$

$$R.R_V C = \frac{1}{\tau} R + \frac{1}{\tau} R_V$$

$$R_V \left(RC - \frac{1}{\tau} \right) = \frac{R}{\tau}$$

$$R_V = \frac{R/\tau}{RC - 1/\tau} = \frac{R}{RC\tau - 1}$$

AN : $R_V = \dfrac{10^7}{10^7 . 10^{-5} . 0{,}02 - 1} = \underline{1{,}01 . 10^5 \, \Omega}$.

Q5 On aurait eu un accord parfait entre théorie et expérience si

$R_{eq} \simeq R$ soit $\dfrac{R}{1 + R/R_V} \simeq 1$

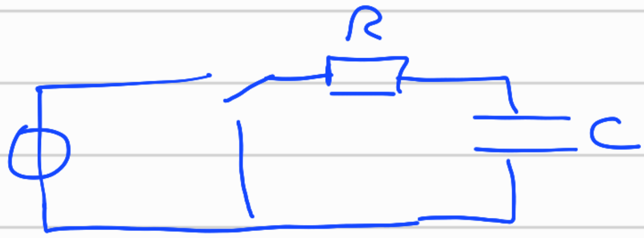
Ce qui est valable pour $\underline{R_V \gg R}$.

Q6. Modèle du GBF :

Q7.

Q8 Pour des condensateurs en parallèle, on ajoute les capacités pour avoir la capacité équivalente : $C_{eq} = C + C_0$.

Le circuit peut être modélisé par



à condition

que $r \ll R$ et $R_0 \gg R$
et $C_0 \ll C$ $\Rightarrow$ valable avec ces valeurs.

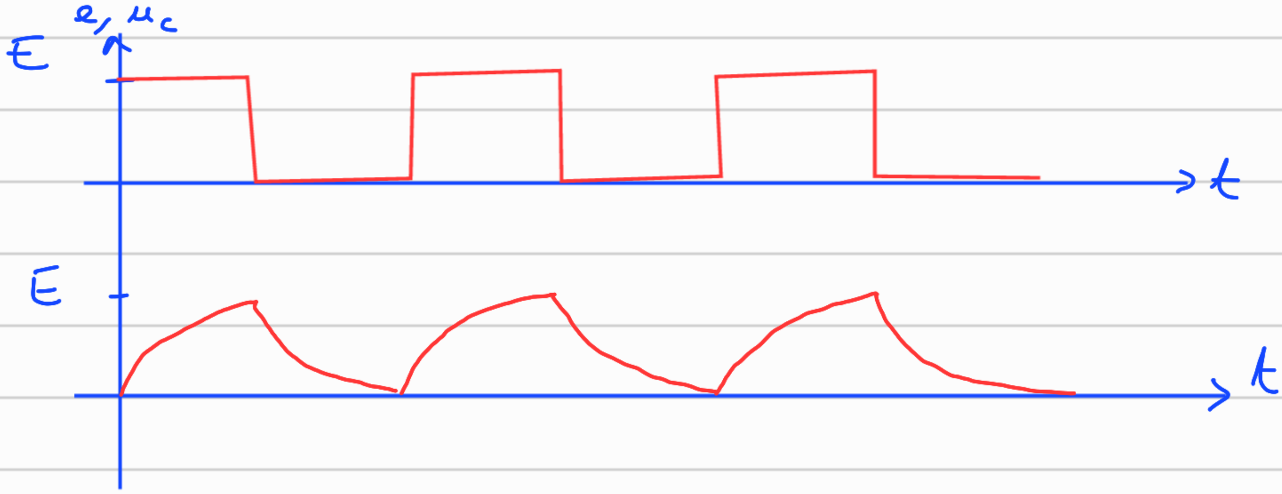
Q9. Il faut choisir un signal créneau entre 0 et 10 V (sortie 50 Ω).

Q10. Pour observer complètement la charge, il faut $\frac{T}{2} > \tau$ $\Rightarrow T > 2\tau$

$f < \frac{1}{2\tau}$

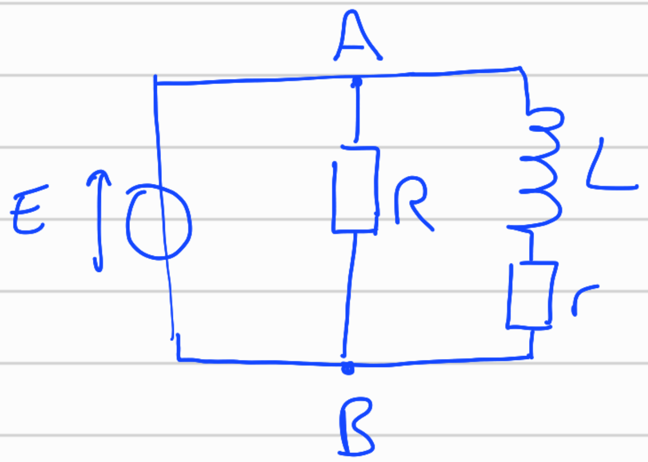
Or $\tau = RC$ AN : $\tau = 10^4 . 10^{-8} = 10^{-4}$ s

$f < 5000$ Hz.



Exercice 6 :

Q1



$$E = u_r + u_L = u_R$$

$$E = r i_L + L \frac{di_L}{dt} = R i_R$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{r}{L} i_L = \frac{E}{L}$$

$$i_L(t) = K e^{-t/\tau} + \frac{E}{r} \qquad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

Condition initiale : $i_L(0^+) = 0 \text{ A}$

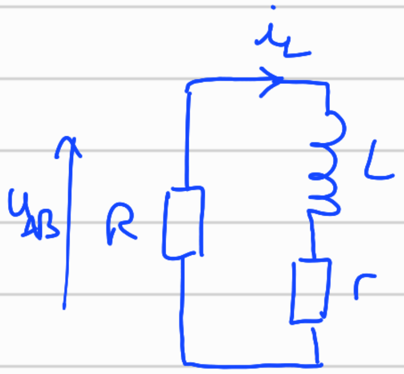
$$\Rightarrow \quad 0 = K + \frac{E}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_L(t) = \frac{E}{r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

$$\boxed{i_R(t) = \frac{E}{R}}$$

Q2 a) Au bout d'un temps très long $\left(t_2 \gg \frac{L}{R}\right)$

$i_L \to \frac{E}{r}$ $\Rightarrow$ nouvelle condition initiale.



Loi des mailles :

$$u_L + u_r + u_R = 0$$

$$L\frac{di_L}{dt} + (r+R)i_L = 0$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{r+R}{L} i_L = 0$$

$$i_L(t) = K' e^{-t/\tau'} \quad \text{avec } \tau' = \frac{L}{r+R}$$

à $t = t_2$ $\quad i_L(t_2^+) = i_L(t_2^-) = \frac{E}{r}$

$$\frac{E}{r} = K'$$

$$\Rightarrow \boxed{i_L(t) = \frac{E}{r} e^{-(t-t_2)/\tau'}}$$

et $u_{AB} = -Ri_L = -\frac{ER}{r} e^{-(t-t_2)/\tau'}$

b) Pour $t - t_2 \ll \tau'$ $u_{AB} \simeq -\frac{RE}{r}$

qui peut être supérieur à E.

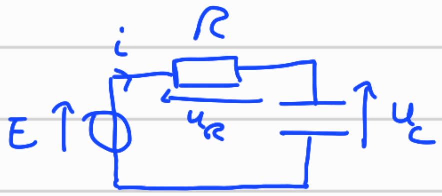
c) Si on ne met pas de résistance R (résistance de décharge) cela revient à avoir une résistance infinie et $\frac{R}{r} \to \infty$.

$\Rightarrow$ il apparaît alors une très grande différence de potentiel à l'ouverture de l'interrupteur, qui est susceptible de provoquer l'ionisation de l'air et ainsi former une étincelle.

d) temps très long $\simeq$ très grand devant τ.

Exercice 5

Q1. Initialement la lampe au néon est éteinte donc le circuit est équivalent à :



Avec une loi des mailles, on obtient :

$$E = u_c + u_R = u_c + Ri = u_c + RC\frac{du_c}{dt}$$

Soit sous forme canonique :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{E}{RC}$$

Résolution : $u(t) = Ae^{-t/RC} + E$

Condition initiale : $u(0^+) = 0V$ donc $A = -E$

$$\boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

Q2. La lampe au néon s'allume pour $u_c > U_a$

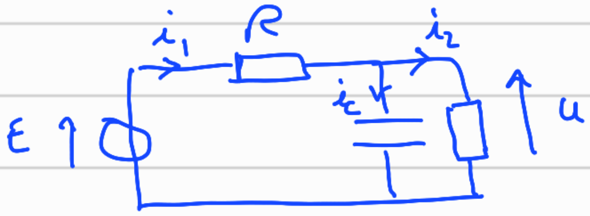
On résoud l'équation $U_a = E\left(1 - e^{-t_0/RC}\right)$

$$\frac{U_a}{E} = 1 - e^{-t_0/RC} \iff e^{-t_0/RC} = 1 - \frac{U_a}{E} = \frac{E - U_a}{E}$$

$$-\frac{t_0}{RC} = \ln\left(\frac{E - U_a}{E}\right)$$

$$\boxed{t_0 = RC \ln\left(\frac{E}{E-U_a}\right)}$$

Q3. Après allumage, le circuit devient :



Loi des mailles ① : $E = u + Ri_1$

Loi des mailles ② $u = r i_2$

Loi des noeuds : $i_1 = i_c + i_2$

Soit $E = u + R(i_c + i_2) = u + R\left(C\frac{du}{dt} + \frac{u}{r}\right)$

$$E = \left(1 + \frac{R}{r}\right)u + RC\frac{du_c}{dt} = \left(\frac{r+R}{r}\right)u + RC\frac{du_c}{dt}$$

Sous forme canonique : $\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{r+R}{rRC}u = \frac{E}{RC}}$

Q4. La lampe au néon s'éteint si $u_c < U_e$

Résolution de l'équation différentielle avec la condition initiale $u_c(t_0) = U_a$.

L'équation différentielle a pour solution

$u_c(t) = A e^{-\frac{t(R+r)}{rRC}} + \frac{Er}{R+r}$ (analogie avec l'eq.

différentielle de la question Q1 avec $\tau = \frac{rRC}{R+r}$)

$$u_c(t_0) = U_a = Ae^{-t_0\frac{(R+r)}{rRC}} + \frac{Er}{R+r}$$

$$\Leftrightarrow \quad Ae^{-t_0\frac{(R+r)}{rRC}} = U_a - \frac{Er}{R+r}$$

$$A = \left(U_a - \frac{Er}{R+r}\right) e^{t_0\left(\frac{R+r}{rRC}\right)}.$$

$$\boxed{u_c(t) = \frac{Er}{R+r} + \left(U_a - \frac{Er}{R+r}\right) e^{-(t-t_0)\frac{R+r}{rRC}}}$$

* 1^{er} cas : si $u_c(t)$ est croissante, la lampe ne s'éteindra pas car $U_e < U_a$.

on calcule $\frac{du_c}{dt}$: $\frac{du_c}{dt} = -\left(\frac{R+r}{rRC}\right)\left(U_a - \frac{Er}{r+R}\right) e^{-(t-t_0)\frac{R+r}{rRC}}$

$$\frac{du_c}{dt} > 0 \Leftrightarrow U_a - \frac{Er}{r+R} < 0$$

$$U_a < \frac{Er}{r+R}$$

donc si $\boxed{U_a < \frac{Er}{r+R}}$ la lampe reste allumée.

* 2ème cas : si u_c est décroissante la lampe s'éteindra si $\lim\limits_{t\to\infty} u < U_e$

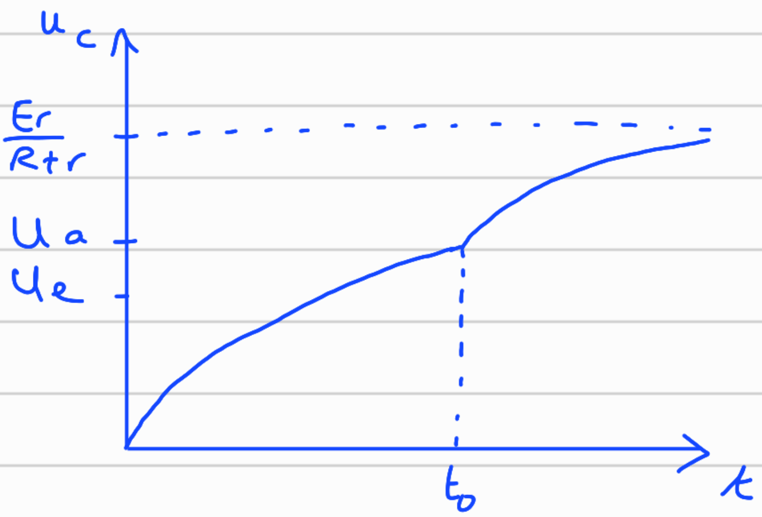
or $\lim\limits_{t\to\infty} u_c = \frac{Er}{r+R}$ donc $\frac{Er}{r+R} < U_e$

donc si $U_a > \frac{Er}{r+R}$ et $U_e > \frac{Er}{r+R}$ la lampe s'éteindra.

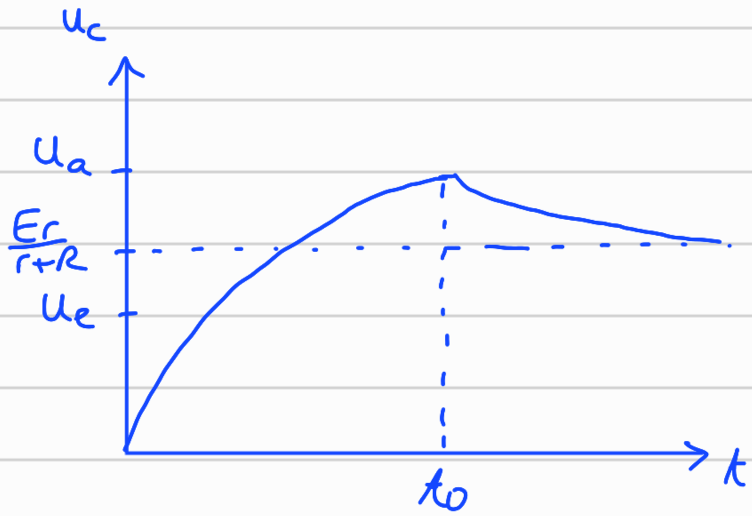
et si $U_a > \frac{Er}{r+R}$ et $U_e < \frac{Er}{r+R}$ la lampe restera allumée.

(dans ce cas $\boxed{U_e < \frac{Er}{r+R} < U_a}$)

Tracés de l' évolution de u_c dans les 2 cas où la lampe reste allumée :



1^{er} cas : la lampe reste allumée : $E_a < \frac{Er}{R+r}$



$2^{ème}$ cas : la lampe reste allumée avec $U_e < \frac{Er}{R+r} < U_a$

Q5. Si $U_a > \frac{Er}{r+R}$ et $U_e > \frac{Er}{r+R}$ la lampe va s'éteindre à l'instant t_1 tel que $u_c(t_1) = U_e$

Soit $$U_e = \frac{Er}{R+r} + \left(U_a - \frac{Er}{r+R}\right) e^{-(t_1-t_0)\frac{R+r}{rRC}}$$

$$U_e - \frac{Er}{R+r} = \left(U_a - \frac{Er}{r+R}\right) e^{-(t_1-t_0)\frac{R+r}{rRC}}$$

$$\frac{U_e(r+R) - Er}{U_a(r+R) - Er} = e^{-(t_1-t_0)\frac{R+r}{rRC}}$$

$$\ln\left(\frac{U_a(r+R) - Er}{U_e(r+R) - Er}\right) = (t_1 - t_0)\frac{R+r}{rRC}$$

$$t_1 - t_0 = \frac{rRC}{R+r} \ln\left(\frac{U_a(r+R) - Er}{U_e(r+R) - Er}\right)$$

$$t_1 = t_0 + \frac{rRC}{R+r} \ln\left(\frac{U_a(r+R) - Er}{U_e(r+R) - Er}\right)$$

or $t_0 = RC \ln\left(\frac{E}{E-U_a}\right)$

soit $$\boxed{t_1 = RC \ln\left(\frac{E}{E-U_a}\right) + \frac{rRC}{R+r} \ln\left(\frac{U_a(r+R) - Er}{U_e(r+R) - Er}\right)}$$

Q6. Quand la lampe s'éteint, on retrouve la situation de départ (circuit RC), avec une nouvelle condition initiale : $u(t_1) = U_e$, que l'on utilise pour déterminer la constante :

$$u_c(t) = A e^{-t/RC} + E$$
$$U_e = A e^{-t_1/RC} + E$$
$$A = (U_e - E) e^{t_1/RC}$$

soit $$u_c(t) = (U_e - E) e^{-(t-t_1)/RC} + E$$

La lampe s'allumera à t_2 tel que $u_c(t_2) = U_a$

soit $$U_a = (U_e - E) e^{-(t_2-t_1)/RC} + E$$

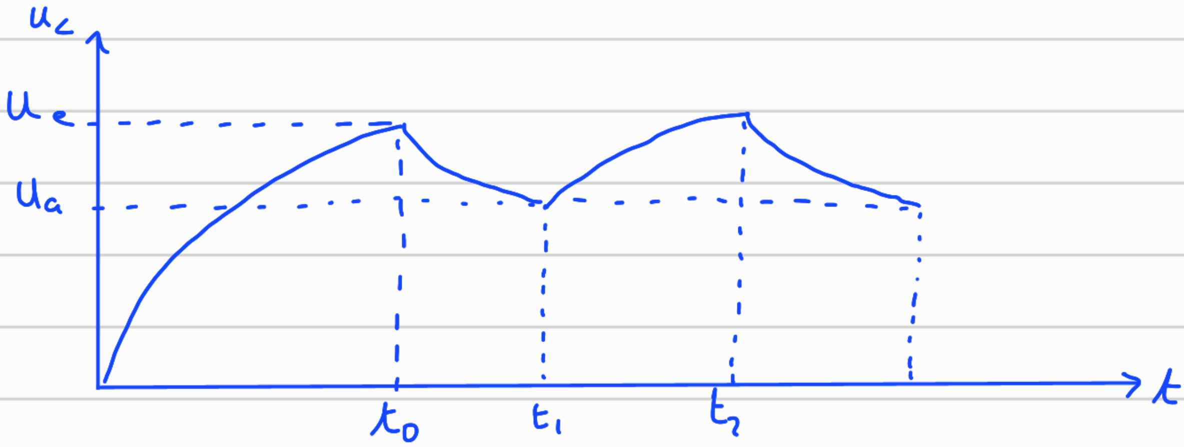
on résoud pour trouver t_2 :

$$\frac{U_a - E}{U_e - E} = e^{-(t_2-t_1)/RC}$$

soit $$\ln\left(\frac{U_e - E}{U_a - E}\right) = \frac{t_2 - t_1}{RC}$$

$$t_2 = t_1 + RC \ln\left(\frac{U_e - E}{U_a - E}\right)$$

La situation redevient identique à celle de t_0 : la tension va décroître jusqu'à E_e :



On a donc un phénomène périodique, de période $T = t_2 - t_0$

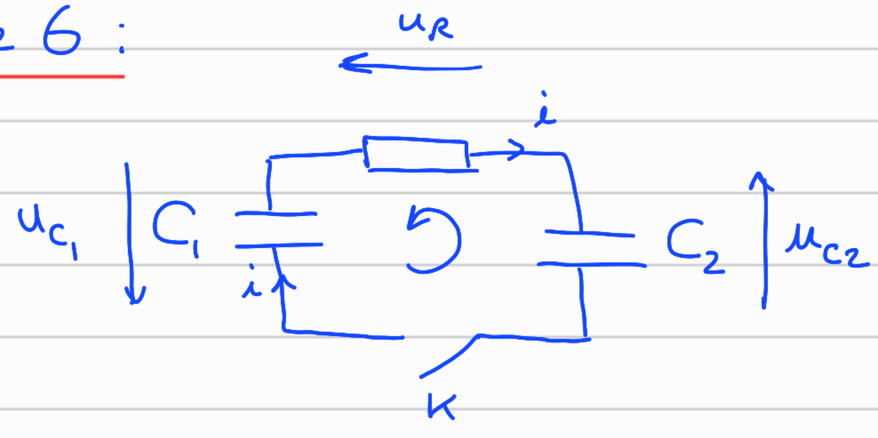
$$T = t_1 + RC\ln\left(\frac{U_e - E}{U_a - E}\right) - RC\ln\left(\frac{E}{E - U_a}\right)$$

avec $t_1 = RC\ln\left(\dfrac{E}{E-U_a}\right) + \dfrac{rRC}{R+r}\ln\left(\dfrac{U_a(r+R)-Er}{U_e(r+R)-Er}\right)$

donc $T = \cancel{RC\ln\left(\dfrac{E}{E-U_a}\right)} + \dfrac{rRC}{R+r}\ln\left(\dfrac{U_a(r+R)-Er}{U_e(r+R)-Er}\right) + RC\ln\left(\dfrac{U_e-E}{U_a-E}\right) \cancel{- RC \times \ln\left(\dfrac{E}{E-U_a}\right)}$

$$\boxed{T = \frac{rRC}{r+R}\ln\left(\frac{U_a(r+R)-Er}{U_e(r+R)-Er}\right) + RC\ln\left(\frac{U_e-E}{U_a-E}\right)}$$

Exercice 6 :



On applique une loi des mailles après la fermeture de K :

$$u_{c_2}(t) + u_R(t) + u_{c_1}(t) = 0$$

En dérivant on obtient : $\frac{du_{c2}}{dt} + R\frac{di}{dt} + \frac{du_{c1}}{dt} = 0$

Or $i = C_2 \frac{du_{c2}}{dt} = C_1 \frac{du_{c1}}{dt}$

Soit $\frac{i}{C_2} + \frac{i}{C_1} + R\frac{di}{dt} = 0$

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i = 0$$

Temps caractéristique de ce circuit :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{1}{R}\left(\frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2}\right)$$

soit $\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}$

Solution générale : $i(t) = Ae^{-t/\tau}$

Conditions initiales : on écrit une loi des mailles à $t = 0^+$:

$$u_{c_1}(0^+) + u_{c_2}(0^+) + u_R(0^+) = 0$$

Or le condensateur 1 est initialement chargé avec la charge q_0, soit $u_{c_1}(0^-) = \frac{q_0}{C_1}$

Et avec la continuité de la tension aux bornes du condensateur, on a $u_{C_1}(0^+) = \frac{q_0}{C_1}$

Avec un raisonnement analogue, on obtient $u_{C_2}(0^-) = \frac{0}{C_2} = u_{C_2}(0^+)$

D'où $\frac{q_0}{C_1} + 0 + Ri(0^+) = 0$

$$\boxed{i(0^+) = -\frac{q_0}{RC_1}}$$

On a donc $-\frac{q_0}{RC_1} = Ae^0 = A$

soit $\boxed{i(t) = -\frac{q_0}{RC_1} e^{-t/\tau}}$ avec $\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1+C_2}$

Au bout d'un temps très long, un nouveau régime permanent est établi :

et $u_R(\infty) = 0$ d'où $u_{C_1}(\infty) = u_{C_2}(\infty)$ soit $\frac{q_1(\infty)}{C_1} = \frac{q_2(\infty)}{C_2}$

Or la charge électrique est conservée :

$q_1(\infty) + q_2(\infty) = q_1(0) + q_2(0) = q_0$.

On a donc le système : $\begin{cases} \frac{q_1(\infty)}{C_1} = \frac{q_2(\infty)}{C_2} \\ q_1(\infty) + q_2(\infty) = q_0 \end{cases}$

$$q_1(\infty) = \frac{C_1}{C_2} q_2(\infty)$$

$$\frac{C_1}{C_2} q_2(\infty) + q_2(\infty) = q_0$$

$$q_2(\infty)\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) = q_0$$

$$\boxed{q_2(\infty) = \frac{C_2}{C_1+C_2} q_0} \quad \text{et} \quad \boxed{q_1(\infty) = \frac{C_1}{C_1+C_2} q_0}$$

Q2. Avant la fermeture de l'interrupteur :

* énergie dans le condensateur 1 : $E_1(0) = \frac{q_0^2}{2C_1}$
* énergie dans le condensateur 2 : $E_2(0) = 0$

$\Rightarrow$ Au total $E_{tot}(0) = \frac{q_0^2}{2C_1}$

Au bout d'un temps infini :

* Energie stockée dans le condensateur 1 :

$$E_1(\infty) = \frac{q_1(\infty)^2}{2C_1} = \left(\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)^2 \frac{q_0^2}{2C_1} = \frac{q_0^2 C_1}{2(C_1+C_2)^2}$$

* Energie stockée dans le condensateur 2 :

$$E_2(\infty) = \frac{q_2(\infty)^2}{2C_2} = \left(\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)^2 \frac{q_0^2}{2C_2} = \frac{q_0^2 C_2}{2(C_1+C_2)^2}$$

Au total : $E_{tot}(\infty) = \frac{q_0^2 C_1}{2(C_1+C_2)^2} + \frac{q_0^2 C_2}{2(C_1+C_2)^2}$

$$= \frac{q_0^2}{2(C_1+C_2)^2}(C_1+C_2) = \frac{q_0^2}{2(C_1+C_2)}$$

On a donc $\Delta E = E_{tot}(\infty) - E_{tot}(0)$

$$= \frac{q_0^2}{2}\left(\frac{1}{C_1+C_2} - \frac{1}{C_1}\right)$$

$$= \frac{q_0^2}{2}\left(\frac{C_1 - C_1 - C_2}{C_1(C_1+C_2)}\right) = \frac{-q_0^2 C_2}{2C_1(C_1+C_2)}$$

$\Rightarrow$ les condensateurs ont perdu l'énergie $\frac{-q_0^2}{2C_1(C_1+C_2)}$.

Calculons l'énergie dissipée dans la résistance :

$$E_R = \int_0^\infty R i^2(t) = \int_0^\infty R\left(-\frac{q_0}{RC_1} e^{-t/\tau}\right)^2 dt$$

$$E_R = \int_0^\infty \frac{R q_0^2}{R^2 C_1^2} e^{-2t/\tau} dt = \frac{q_0^2}{RC_1^2} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt$$

$$E_R = \frac{q_0^2}{RC_1^2}\left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{q_0^2}{RC_1^2}\left(-\frac{\tau}{2}\right)(0-1)$$

$$E_R = \frac{q_0^2}{2RC_1^2} \times \frac{RC_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{q_0^2 C_2}{2C_1(C_1+C_2)} = -\Delta E$$

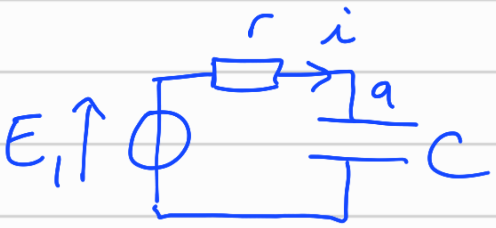
L'énergie perdue par les condensateurs a donc été reçue par la résistance (qui l'a convertie en chaleur par effet Joule).

Exercice 7 :

Q1. On considère une origine des temps au début de chaque période :

Soit Q_0 la charge initiale de la charge :

* Entre $t = 0$ et $t = T/2$



$$q(t) = K e^{-t/\tau} + CE_1$$

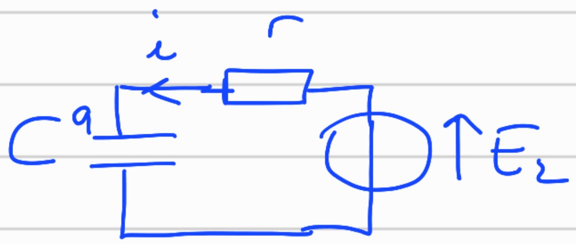
$$Q_0 = K + CE$$

$$\boxed{q(t) = (Q_0 - CE_1) e^{-t/\tau} + CE_1}$$

À $t = T/2$ $\quad q\left(\frac{T}{2}\right) = (Q_0 - CE_1)^{-T/2\tau} + CE_1$

$$= Q'$$

* Entre $t = \frac{T}{2}$ et T :



$$q(t) = K e^{-t/\tau} + CE_2$$

$$q\left(\frac{T}{2}\right) = Q'$$

$$Q' = K e^{-T/2\tau} + CE_2$$

$$K = (Q' - CE_2) e^{T/2\tau}$$

$$q(t) = (Q' - CE_2)\, e^{T/2\tau}\, e^{-t/\tau} + CE_2$$

$$\boxed{q(t) = (Q' - CE_2)\, e^{-\frac{t - T/2}{\tau}} + CE_2}$$

Or $\quad q(T) = Q_0 \Rightarrow Q_0 = (Q' - CE_2)\, e^{-\frac{T}{2\tau}} + CE_2$

$$\begin{cases} Q' = (Q_0 - CE_1)^{-T/2\tau} + CE_1 \\ Q_0 = (Q' - CE_2)\, e^{-T/2\tau} + CE_2 \end{cases}$$

$$Q_0 = \left[(Q_0 - CE_1)\, e^{-T/2\tau} + CE_1 - CE_2\right] e^{-T/2\tau} + CE_2$$

$$Q_0 \left(1 - e^{-T/\tau}\right) = \left(CE_1 \left(1 - e^{-t/2\tau}\right) - CE_2\right) e^{-T/2\tau} + CE_2$$

$$Q_0 = C \, \frac{E_1 \left(1 - e^{-t/2\tau}\right) e^{-T/2\tau} + E_2 \left(1 - e^{-T/2\tau}\right)}{1 - e^{-T/\tau}}$$

$$Q_0 = C \left(1 - e^{-t/2\tau}\right) \frac{E_1 e^{-T/2\tau} + E_2}{\left(1 - e^{-T/2\tau}\right)\left(1 + e^{-T/2\tau}\right)}$$

$$\boxed{Q_0 = C \, \frac{E_2 + E_1 e^{-T/2\tau}}{1 + e^{-T/2\tau}}}$$

$$Q'_0 = \left(C \frac{E_2 + E_1 e^{-T/2\tau}}{1+e^{-T/2\tau}} - CE_1 \right) e^{-T/2\tau} + CE_1$$

$$Q'_0 = \frac{\left(CE_2 + \cancel{CE_1 e^{-T/2\tau}} - CE_1 - \cancel{CE_1 e^{-T/2\tau}} \right) e^{-T/2\tau}}{1+e^{-T/2\tau}} + CE_1$$

$$Q'_0 = \frac{(CE_2 - CE_1) e^{-T/2\tau} + CE_1 + CE_1 e^{-T/2\tau}}{1+e^{-T/2\tau}}$$

$$Q'_0 = \frac{CE_1 + CE_2 e^{-T/2\tau}}{1+e^{-T/2\tau}}$$

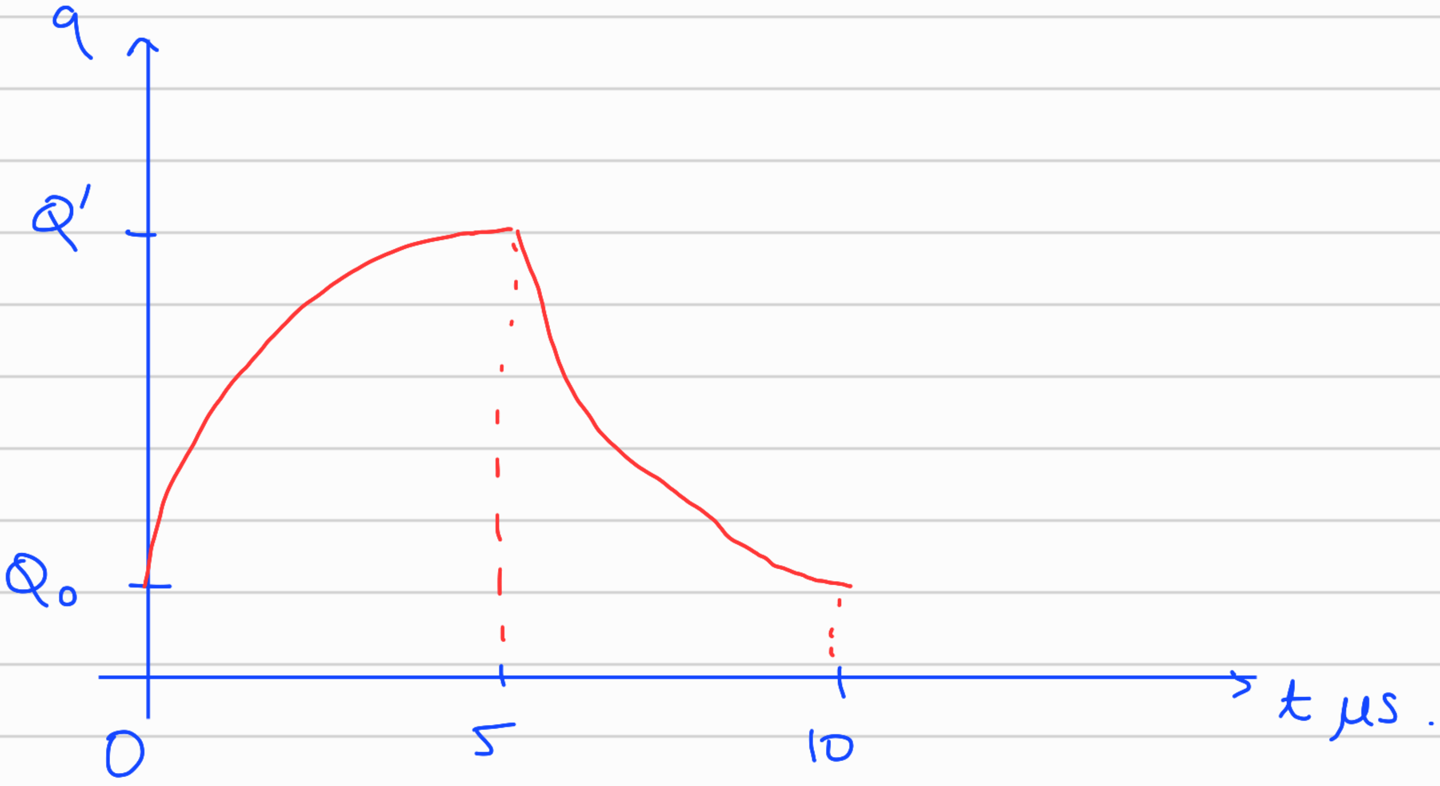
$$\boxed{Q'_0 = C \frac{E_1 + E_2 e^{-T/2\tau}}{1+e^{-T/2\tau}}}$$

Avec les notations proposées :

$$Q_0 = C \frac{E_2 + E_1 e^{-a}}{1+e^{-a}} \quad \text{et} \quad Q'_0 = C \frac{E_1 + E_2 e^{-a}}{1+e^{-a}}$$

AN : $\underline{Q_0 = 1{,}03 \cdot 10^{-8}\,C}$

$\underline{Q'_0 = 4{,}97 \cdot 10^{-8}\,C}$

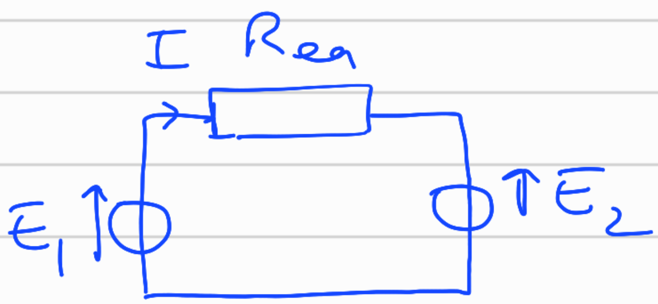


Q2. Le régime étant périodique, le courant moyen traversant le condensateur est nul.

L'intensité moyenne à travers les interrupteurs peut se calculer avec $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

Soit $I = \frac{Q' - Q_0}{T} = \frac{C}{T} \frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}} (E_1 - E_2)$

Q3.



Loi des mailles

$E_1 + R_{eq} I - E_2 = 0$

$R_{eq} = \frac{E_1 - E_2}{I}$

$$R_{eq} = \frac{T}{C} \frac{1+e^{-a}}{1-e^{-a}}$$

Pour $a \gg 1$ $\boxed{R_{eq} \approx \frac{T}{C}}$

* On peut donc faire varier la valeur de la résistance avec la période du signal de commande.

* La valeur de R est inversement proportionnelle à la valeur de C.

$\Rightarrow$ Utile dans les filtres (constante de temps définie par un rapport de capacité, beaucoup plus facile à créer que des valeurs précises de capacités).