

TD du chapitre 5

Exercice 1 :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) + x_{eq}$$

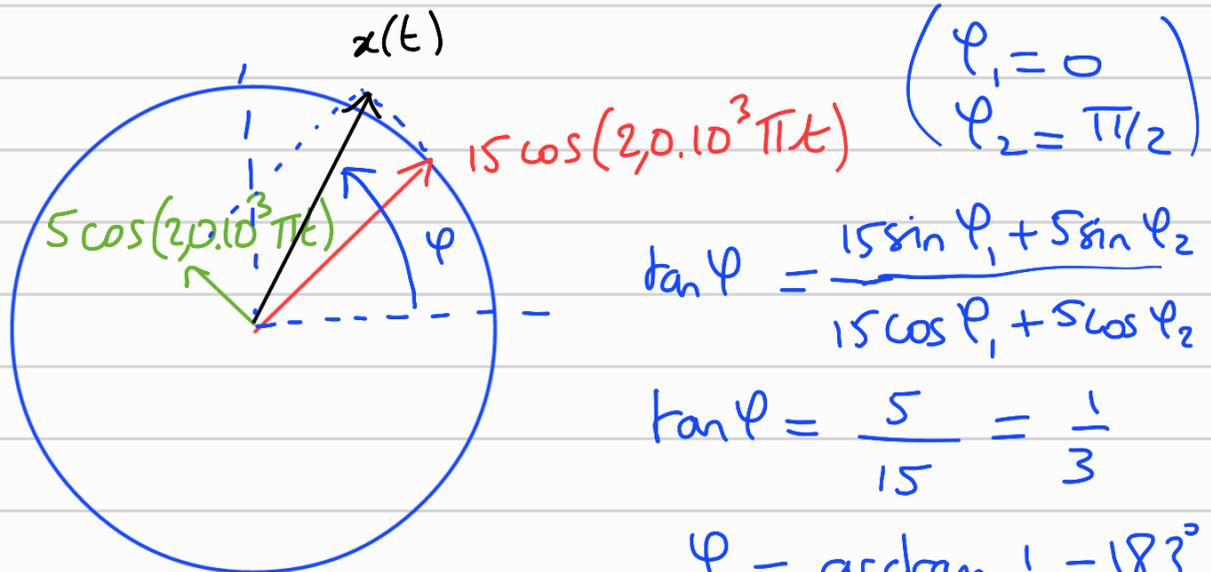
amplitude pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ phase à l'origine
position d'éq. = valeur moyenne

Q1. a) $X_m = 15$
 $T = 2\pi / 100\pi = 0,02 \text{ s}$; $f = 50 \text{ Hz}$.
 $\varphi = 0,5 \text{ rad}$

b) $X_m = 5$
 $T = 2\pi / 7,854 \cdot 10^6 = 8,00 \cdot 10^{-7} \text{ s}$; $f = 1,25 \cdot 10^6 \text{ Hz}$
 $\varphi = -\pi/2 \text{ rad}$. car $\sin x = \cos(x - \pi/2)$

c) $X_m = 2$
 $T = 2\pi / 120\pi = 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ s}$; $f = 60 \text{ Hz}$
 $\varphi = -\pi/4 - \pi/2 = -3\pi/4$

d) $x(t) = 15 \cos(2,0 \cdot 10^3 \pi t) + 5 \cos(2,0 \cdot 10^3 \pi t + \pi/2)$



$(-\sin x = \cos x + \pi/2)$

$$x(t) = \sqrt{15^2 + 5^2 + 2 \cdot 15 \cdot 5 \cdot \cos \pi/2} \cdot \cos(2,0 \cdot 10^3 \pi t + 18,3)$$

$= 0$

$$x(t) = 15,8 \cos(2,0 \cdot 10^3 \pi t + 18,3)$$

$$Q2. X_m = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \text{ cm}$$

$$x_{\text{eq}} = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} = \frac{5+1}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$4T = 100 \text{ s} \Rightarrow T = 2,50 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\varphi = 0 \text{ car } x(0) = x_{\max}$$

$$x(t) = 2 \cos(2,5t)$$

$$X_m = 0,75 \text{ cm} \quad \left(= \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{1,75 - 0,25}{2} \right)$$

$$x_{\text{eq}} = 1 \text{ cm}$$

$$2T = 7 \times 2 = 14 \text{ s} \Rightarrow T = 7 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{7} = 0,90 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{à } t=0 \quad x(0) = 1,4 \text{ cm}$$

$$x(0) = X_m \cdot \cos(0 + \varphi) + x_{\text{eq}} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{x(0) - x_{\text{eq}}}{X_m}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{1,4 - 1}{0,75} = 0,53$$

$$\text{donc } \varphi = \pm 1,0 \text{ rad.}$$

$$\text{or à } t=0 \quad x \text{ diminue donc } \dot{x}(0) < 0$$

$$\text{or } \dot{x}(t) = -X_m \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{soit à } t=0 \quad \dot{x}(0) = -X_m \omega \cdot \sin \varphi \quad \text{donc } -X_m \omega \sin \varphi < 0$$

$$\text{d'où } \sin \varphi > 0 \Rightarrow \varphi = +1 \text{ rad.}$$

$$x(t) = 0,75 \cdot \cos(0,90t + 1)$$

Méthode : pour $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

- si $\dot{x}(0) > 0$ (x est croissant, m se déplace selon $+x$)

$$\Rightarrow \varphi < 0$$

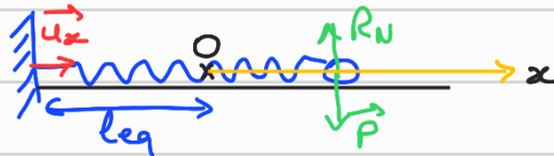
- si $\dot{x}(0) < 0$ (x est décroissant, m se déplace selon $-x$)

$$\Rightarrow \varphi > 0$$

Q3. $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ avec $s\left(\frac{T}{4}\right) = A/2$
 $\Rightarrow \frac{A}{2} = A \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \varphi = \pm \arccos(1/2) = \pm \frac{\pi}{3}$

$\varphi = -\pi/6$ ou $-5\pi/6$. Or le signal est croissant à $T/4$
 $\Rightarrow s'(t) > 0 \Rightarrow -A\omega \sin(\pi/2 + \varphi) > 0 \Rightarrow \cos \varphi > 0 \Rightarrow \underline{-5\pi/6}$

Exercice 2:



Q1. * On étudie le système {masse} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

* Bilan des actions mécaniques:

- poids : \vec{P} vertical vers le bas de norme $P = mg$

- réaction normale : \vec{R}_N verticale vers le haut, de norme égale à mg .

- force de rappel élastique : \vec{F}_d horizontale, de sens et norme dépendant de la position de la masse : $\vec{F}_d = -k(l - l_0) \vec{u}_x$ avec \vec{u}_x vect. unitaire dans le sens de l'allongement du ressort.

A l'équilibre, d'après le principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F}_d = \vec{0}$.

En projetant sur (Ox) on a $-k(l_{eq} - l_0) \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = 0$
 soit $-k(l_{eq} - l_0) = 0$

$\Rightarrow l_{eq} = l_0$.

Q2. D'après le schéma : $l(t) = l_{eq} + x(t)$

donc $\vec{F}_d = -k(l_{eq} + x(t) - l_0) \vec{u}_x$
 $= -k(l_0 + x(t) - l_0) \vec{u}_x = -kx(t) \vec{u}_x$

$\vec{F}_d = -kx(t) \vec{u}_x$

Q3. On applique le principe fondamental de la dynamique au système {masse} dans le référentiel terrestre supposé galiléen:

$$\vec{P} + \vec{R}_r + \vec{F}_{el} = m\vec{a}$$

En projetant sur (O_x) on a: $-kx(t) = m\ddot{x}(t)$

On met sous forme canonique: $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. avec $\omega_0 = \text{pulsation propre} = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Q4. $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Q5. Amplitude: $A = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{1,4 - (-1,4)}{2} = 1,4 \text{ cm}$

$$2T = 7s \Rightarrow T = 3,5s \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{3,5} = 1,8 \text{ rad.s}^{-1}$$

A $t=0$ $x(0) = -0,6 \text{ cm}$ et x est décroissante.

$$-0,6 = 1,4 \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = -0,43$$

$$\varphi = \pm 2,0 \text{ rad.}$$

or $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ d'où $\dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin \varphi$

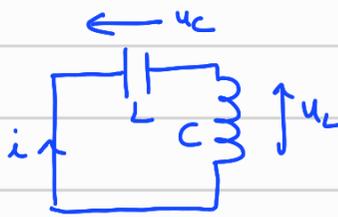
$\dot{x} < 0$ donc $\sin \varphi > 0 \Rightarrow \varphi = +2,0 \text{ rad.}$

$$x(t) = 1,4 \cos(1,8t + 2,0)$$

Q6 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow m\omega_0^2 = k$.

AN: $k = 0,050 \times 1,8^2 = \underline{0,162 \text{ N.m}^{-1}}$

Exercice 3 :



Q1. $u_c + u_L = 0$ d'après la loi des mailles :

$$u_c + L \frac{di}{dt} = 0$$

or $i = C \frac{du_c}{dt}$ d'après la loi intensité-tension du condensateur :

$$u_c + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0}$$

Q2. $u_c(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

On détermine les constantes A et B avec les conditions initiales :

* à $t = 0^+$ $u_c = U_0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur

donc $U_0 = A$

* à $t = 0^+$ $\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i(0^+) = 0$ par continuité de

l'intensité traversant la bobine :

donc $0 = B\omega_0 \Rightarrow B = 0$

on a donc $\boxed{u_c(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

* fréquence des oscillations : $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

AN : $f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{25 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = 318,3 \text{ Hz} = \underline{3,2 \cdot 10^2 \text{ Hz}}$ avec 2 c.s.

* amplitude des oscillations : $\underline{U_m = U_0 = 6 \text{ V}}$

$$Q3. \quad i(t) = C \frac{duc}{dt} = -CU_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{Amplitude : } I_m = CU_0 \omega_0$$

$$\text{AN: } I_m = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 3,2 \cdot 10^2 = 0,192 \text{ A} = \underline{\underline{192 \text{ mA}}}$$

Exercice 4 :

Oscillateur harmonique horizontal : $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

or à $t=0$ $\dot{x}=0 \Rightarrow \varphi=0$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$E_{p,d} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$E_c = E_{p,d} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$\Leftrightarrow \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{k}{m} \cos^2(\omega_0 t)$$

or $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc $E_c = E_{p,d}$ pour $\sin^2(\omega_0 t) = \cos^2(\omega_0 t)$

$$\text{soit } |\sin(\omega_0 t)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (= |\cos(\omega_0 t)|)$$

$$\text{soit } \boxed{|x(t)| = \frac{A}{\sqrt{2}}}$$

$$Q2. \quad E_c = E_{p,d} \text{ pour } \sin(\omega_0 t) = \pm \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \omega_0 t = \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}$$

donc 4 fois par cycle

$$\text{Soit } t_1 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{3\pi}{4}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2\omega_0}$$

Entre 2 réalisations il s'écoule $\Delta t = \frac{\pi}{2\omega_0}$

Q3. Pour $x = \frac{A}{2}$ on a $\frac{A}{2} = A \cos(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \quad (\Rightarrow \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{4} = 1 - \sin^2(\frac{\omega_0 t}{t}))$$

$$\Rightarrow \sin(\omega_0 t) = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \quad \text{AN: } E_c = \frac{1}{2} m (A\omega_0)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} m A^2 \omega_0^2$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cos^2(\omega_0 t) \quad \text{AN: } E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k A^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{k A^2}{8}$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{k}{2} A^2$$

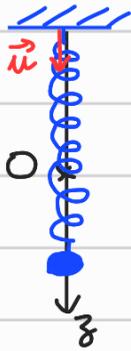
$$\% E_c = \frac{\frac{3}{8} m A^2 \omega_0^2}{\frac{k}{2} A^2} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\% E_c = \frac{3 \cdot 2 m A^2 k}{8 k m A^2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Pour un déplacement de $\frac{A}{2}$, 75% de l'énergie est sous forme d'énergie cinétique.

Exercice 5

Q1.



système {masse} ; référentiel terrestre
supposé galiléen.

Q2. A l'équilibre : $\vec{F}_{el} + \vec{P} = \vec{0}$

$$-k(l_e - l_0)\vec{u} + m\vec{g} = \vec{0}$$

Projection sur l'axe vertical (Oz) :

$$-k(l_e - l_0) + mg = 0$$

$$\boxed{l_e = l_0 + \frac{mg}{k}}$$

On vérifie bien qu'à l'équilibre $l_e > l_0$ (la masse étire le ressort).

Q3. D'après le schéma : $l(t) = l_e + z$

$$\text{soit } \vec{F}_{el} = -k(l_e + z - l_0)\vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{el} = -k\left(l_0 + \frac{mg}{k} + z - l_0\right)\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{F}_{el} = -k\left(\frac{mg}{k} + z\right)\vec{u}}$$

Q4 : D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{F}_{el} = m\vec{a}$$

On projette sur l'axe (Oz) :

$$mg - k \left(\frac{mg}{k} + z \right) = m\ddot{z}$$

$$m\ddot{z} + kz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

\Rightarrow équation de l'oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre.

Q5. $z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. On détermine A et B avec les conditions initiales :

$$z(0) = A = 0$$

$$\text{et } \dot{z}(0) = B\omega_0 = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$$z(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Q6. $E_c(t) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2$ or $\dot{z}(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

Q7. $E_{pp} = -mgz = -mg \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

$$E_{p,\text{el}} = \frac{1}{2} k (\ell(t) - \ell_0)^2 = \frac{1}{2} k (\ell_{eq} + z(t) - \ell_0)^2$$

$$\text{or } \ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k} \Rightarrow E_{p,\text{el}} = \frac{1}{2} k \left(z(t) + \frac{mg}{k} \right)^2$$

$$E_{p,\text{el}} = \frac{1}{2} k \left(\frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{mg}{k} \right)^2$$

$$E_p = -mg \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} k \left(\frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{mg}{k} \right)^2$$

$$Q8. \quad E_m = E_c + E_p$$

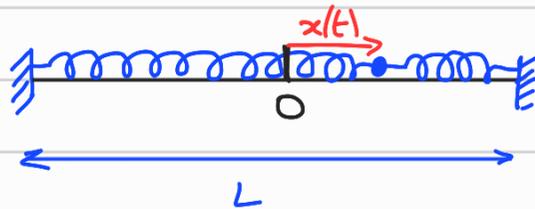
$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2(\omega_0 t) - mg \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k \left(\frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{mg}{k} \right)^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{k v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \cdot \frac{mg}{k} - \frac{mg v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{(mg)^2}{2k}$$

l'énergie mécanique est une constante \Rightarrow elle se conserve.

Exercice 6 :



Q1. On étudie le système {masse} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques :

- poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

- réaction du support \vec{R}_N

- force de rappel élastique 1 : $\vec{f}_1 = -k(l_1 - l_0)\vec{u}$

- force de rappel élastique 2 : $\vec{f}_2 = -k(l_2 - l_0)(-\vec{u})$

$$\vec{f}_2 = k(l_2 - l_0)\vec{u}$$

À l'équilibre $m\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$

On projette suivant la direction horizontale :

$$-k(l_{1eq} - l_0) + k(l_{2eq} - l_0) = 0$$

$$\text{Or } l_1 + l_2 = L \Rightarrow l_1 = L - l_2$$

$$\Rightarrow -k(L - l_{2eq} - l_0) + k(l_{2eq} - l_0) = 0$$

$$-kL + 2kl_{2eq} = 0 \Rightarrow \boxed{l_{2eq} = \frac{L}{2}}$$

Q2. On applique le principe fondamental de la dynamique au système :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = m\vec{a}$$

En projetant suivant \vec{u}_x on obtient :

$$-k(l_1 - l_0) + k(l_2 - l_0) = m\ddot{x}$$

$$\text{or } l_1(t) = l_{eq} + x(t) \text{ et } l_2(t) = l_{eq} - x(t)$$

$$\Rightarrow -k(l_{eq} + x - l_0) + k(l_{eq} - x - l_0) = m\ddot{x}$$

$$-2kx = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0}$$

\Rightarrow équation de l'oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

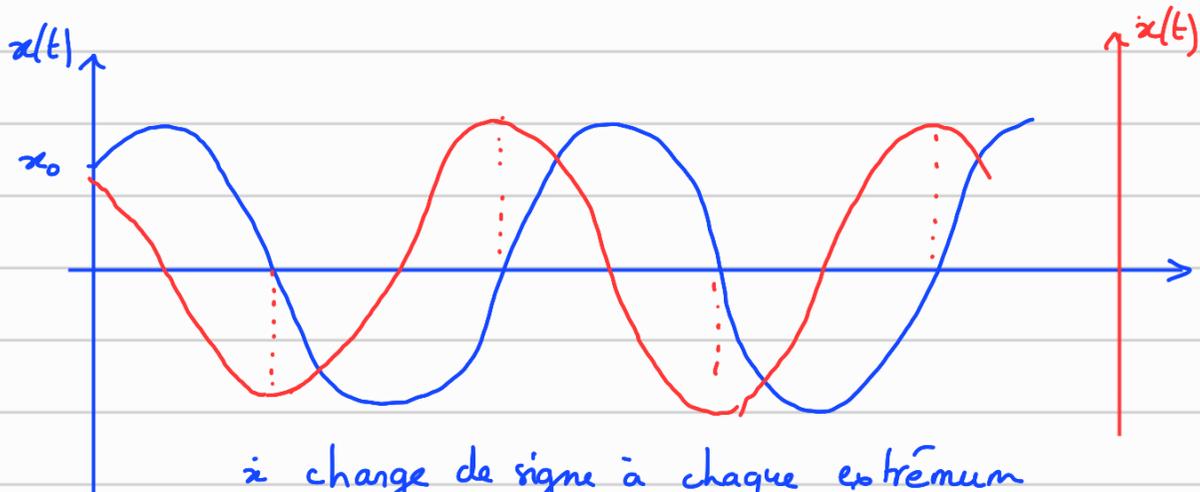
Q3. Solution générale : $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

Conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$

$$x_0 = A \text{ et } B\omega_0 = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t)$$



z change de signe à chaque extrémum de x .

$|z|$ est maximale à chaque passage par la position d'équilibre.

Exercice 7 :

Q1. L'atome de chlore étant beaucoup plus lourd que l'atome d'hydrogène on peut considérer que c'est l'atome d'hydrogène qui bouge.

Q2. On utilise le modèle de l'O.H :
où la liaison est représentée par un ressort.



$$\text{On a } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = m\omega_0^2}$$

$$\text{avec } m = m(\text{H}) = \frac{M(\text{H})}{N_A}$$

$$\text{et } \omega_0 = 2\pi \times f$$

$$\text{AN: } k = \frac{10^{-3}}{602 \cdot 10^{23}} \times (2\pi)^2 \times (8,5 \cdot 10^{13})^2$$

$$\underline{k = 4,7 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}$$

⚠ m en kg dans l'AN.

Q3. L'énergie mécanique de l'OH étant constante, elle vaut l'énergie cinétique lorsque l'énergie potentielle élastique est nulle (l'énergie cinétique est alors maximale).

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{m}} \quad \text{soit} \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{h \cdot f}{m}}$$

$$\text{AN: } v_{\max} = \sqrt{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 8,5 \cdot 10^{13}}{10^{-3} / 6,02 \cdot 10^{23}}}$$

$$v_{\max} = 5,8 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

Q4. Lorsque la vitesse de l'atome H est nulle, son énergie mécanique est égale à son énergie potentielle élastique d'où $E_m = \frac{1}{2} k A^2$

$$A = \sqrt{\frac{2E_m}{k}} \quad \text{soit} \quad A = \sqrt{\frac{h \cdot f}{k}}$$

$$\text{AN: } A = \sqrt{\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 8,5 \cdot 10^{13}}{4,7 \cdot 10^2}}$$

$$\underline{A = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ m}} \quad (= 110 \text{ pm})$$

Comparaison avec la valeur tabulée de la liaison: $d_{\text{H-O}}$
 $\frac{A}{d_{\text{H-O}}} \times 100 = 9\%$

L'amplitude des oscillations correspond donc à environ 9% de la longueur de la liaison.
 (on a aussi $v_{\max} = \omega_0 X_{\max}$)

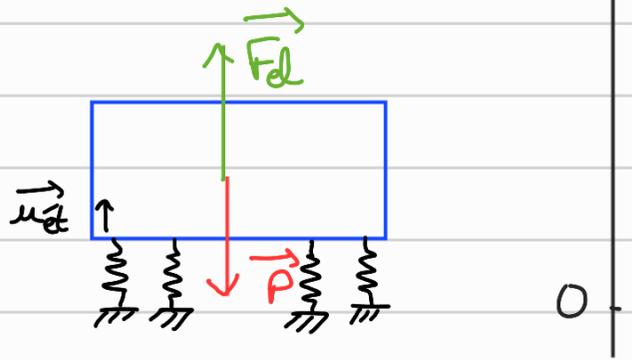
Exercice 8 :

- Q1. Il faut s'intéresser à 2 positions d'équilibre :
- voiture posée au sol \rightarrow les ressorts ont une longueur l_{eq}
 - voiture soulevée à la limite du décollement \rightarrow les ressorts ont une longueur l'_{eq} .

\Rightarrow On cherche $l'_{eq} - l_{eq}$.

* système {carrosserie} étudié dans le référentiel terrestre {supposé} galiléen.

Bilan des forces :



$$\vec{P} = m, \vec{g} = -m, g \vec{u}_z$$

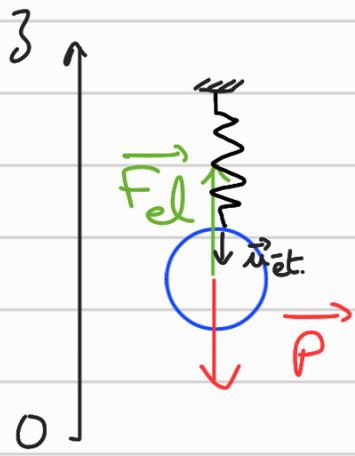
$$\vec{F}_d = -4 k (l - l_0) \vec{u}_z = -4 k (l - l_0) \vec{u}_z$$

A l'équilibre "voiture posée au sol" : $\vec{P} + \vec{F}_d = \vec{0}$

En projection sur O_z : $-m, g - 4 k (l_{eq} - l_0) = 0$

* système {1 roue} étudié dans le référentiel terrestre {supposé} galiléen.

Bilan des forces :



$$\vec{p} = m_2 \vec{g} = -m_2 g \vec{u}_z$$

$$\vec{F}_{el} = -k(l-l_0) \vec{u}_{et} = k(l-l_0) \vec{u}_z$$

(+ \vec{R}_N en cas de contact avec le sol)

A l'équilibre "limite du décollement" ($\Rightarrow \vec{R}_N = \vec{0}$)

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

Projection sur l'axe Oz : $-m_2 g + k(l'_{eq} - l_0) = 0$

On a donc le système :

$$\begin{cases} -m_2 g + k(l'_{eq} - l_0) = 0 \\ -m_1 g - 4k(l_{eq} - l_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k l'_{eq} = m_2 g + k l_0 \\ k l_{eq} = \frac{-m_1 g}{4} + k l_0 \end{cases}$$

$$k l_{eq} = \frac{-m_1 g}{4} + k l_0$$

$$l'_{eq} - l_{eq} = \frac{m_2 g + k l_0 + \frac{m_1 g}{4} - k l_0}{k}$$

$$l'_{eq} - l_{eq} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2 \right) \frac{g}{k}$$

$$\text{AN: } l'_{eq} - l_{eq} = \left(\frac{700}{4} + 37,5 \right) \cdot \frac{981}{6500} = \underline{\underline{0,321 \text{ m}}}$$

Q2. On étudie le système {carrosserie}
dans \mathcal{R}_t galiléen :

$$\text{D'après le PFD: } \Sigma \vec{F} = m_1 \vec{a}$$

$$-m_1 g \vec{u}_z - 4k(l - l_0) \vec{u}_z = m \vec{a}$$

On choisit l'origine du repère au niveau
du point de fixation du ressort sur la roue :

$l = z$ avec $z =$ la hauteur de la
fixation du ressort à
la carrosserie.

En projection sur (O_z)

$$-m_1 g - 4k(z - l_0) = m \ddot{z}$$

On avait au préalable montré que :

$$-m_1 g - 4k(l_{eq} - l_0) = 0$$

$$m_1 g + 4k l_{eq} = 4k l_0 \Rightarrow l_0 = l_{eq} + \frac{m_1 g}{4k}$$

$$-m_1 g - 4k z + 4k \left(l_{eq} + \frac{m_1 g}{4k} \right) = m \ddot{z}$$

$$m \ddot{z} + 4k z = 4k l_{eq}$$

$$\ddot{z} + \frac{4k}{m_1} z = \frac{4k}{m_1} l_{eq}$$

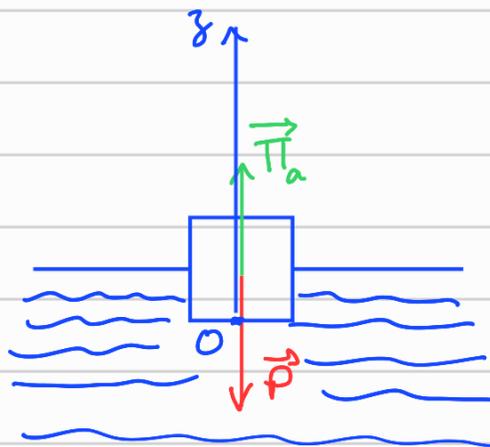
Equation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m_1}}$ et de position d'équilibre $l_{eq} = l_0 - \frac{m_1 g}{4k}$.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{4k}}$$

$$\text{AN: } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{700}{4 \cdot 6500}} = \underline{1,03 \text{ s}}$$

Exercice 9:

Q1. Schéma :



On étudie le système {cube} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$
 $\vec{P}_a = \rho \cdot h \cdot S \vec{u}_z$

avec $h =$ hauteur de cube sous le niveau de l'eau

La 2^{ème} loi de Newton appliquée au système masse dans le référentiel terrestre donne :

$$-mg\vec{u}_z + \rho_c \cdot h \cdot Sg = m\ddot{z}$$

Or d'après l'énoncé, à l'équilibre

$$-mg\vec{u}_z + \rho_c \cdot h_{eq} \cdot Sg \vec{u}_z = \vec{0}$$

$$\text{Soit } h_{eq} = \frac{mg}{\rho_c S g} = \frac{m}{\rho_c \cdot a^2} \quad \text{et } m = \rho_c a^3$$

$$\Rightarrow h_{eq} = \frac{\rho_c a}{\rho_c}$$

Or $h = h_{eq} - z$ (d'après le choix du repère)

$$\text{Soit } -\rho_c a^3 g \vec{u}_z + \rho_c (h_{eq} - z) a^2 g = \rho_c a^3 \ddot{z}$$

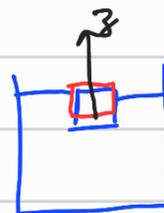
$$\ddot{z} + \frac{\rho_c \cdot g}{\rho_c a} z = -g + \frac{\rho_c \cdot \rho_c \cdot a \cdot a^2 g}{\rho_c \cdot \rho_c a^3} = 0.$$

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\rho_c \cdot g}{a \rho_c} z = 0}$$

$$\text{Q2. } \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{\rho_c \cdot g}{a \rho_c}$$

Solution générale : $z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

Conditions initiales: $z(0) = h_{eq} - h_0$
 $\dot{z}(0) = 0$



$$h_{eq} - h_0 = A$$

$$-B\omega_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$z(t) = (h_{eq} - h_0) \cos(\omega_0 t)$$

Période propre des oscillations: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi a \rho_c}{\rho g}$

Q3. le cube bondit hors de l'eau si $z > h_{eq}$

Soit $h_{eq} < (h_{eq} - h_0) \cos(\omega_0 t)$

or $(h_{eq} - h_0) \cos(\omega_0 t)$ a pour valeur minimale $h_0 - h_{eq}$
(pour $\cos(\omega_0 t) = -1$)

D'où $h_{eq} < h_0 - h_{eq} \quad \Leftrightarrow \quad h_0 > 2h_{eq}$

Or on a la condition $h_0 < a$, il faut donc

$$2h_{eq} < h_0 < a$$

$$\Rightarrow h_{eq} < \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho_c a}{\rho l} < \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \rho_c < \frac{\rho l}{2}$$