Concours blanc

Exercice 1

Q1 . $n = \frac{m}{M}$

AN : $n = \frac{10^{-2}}{2.10^{-3}} = \underline{5 \text{ mol}}$.

Le gaz étant considéré comme parfait :

$P = \frac{nRT}{V}$

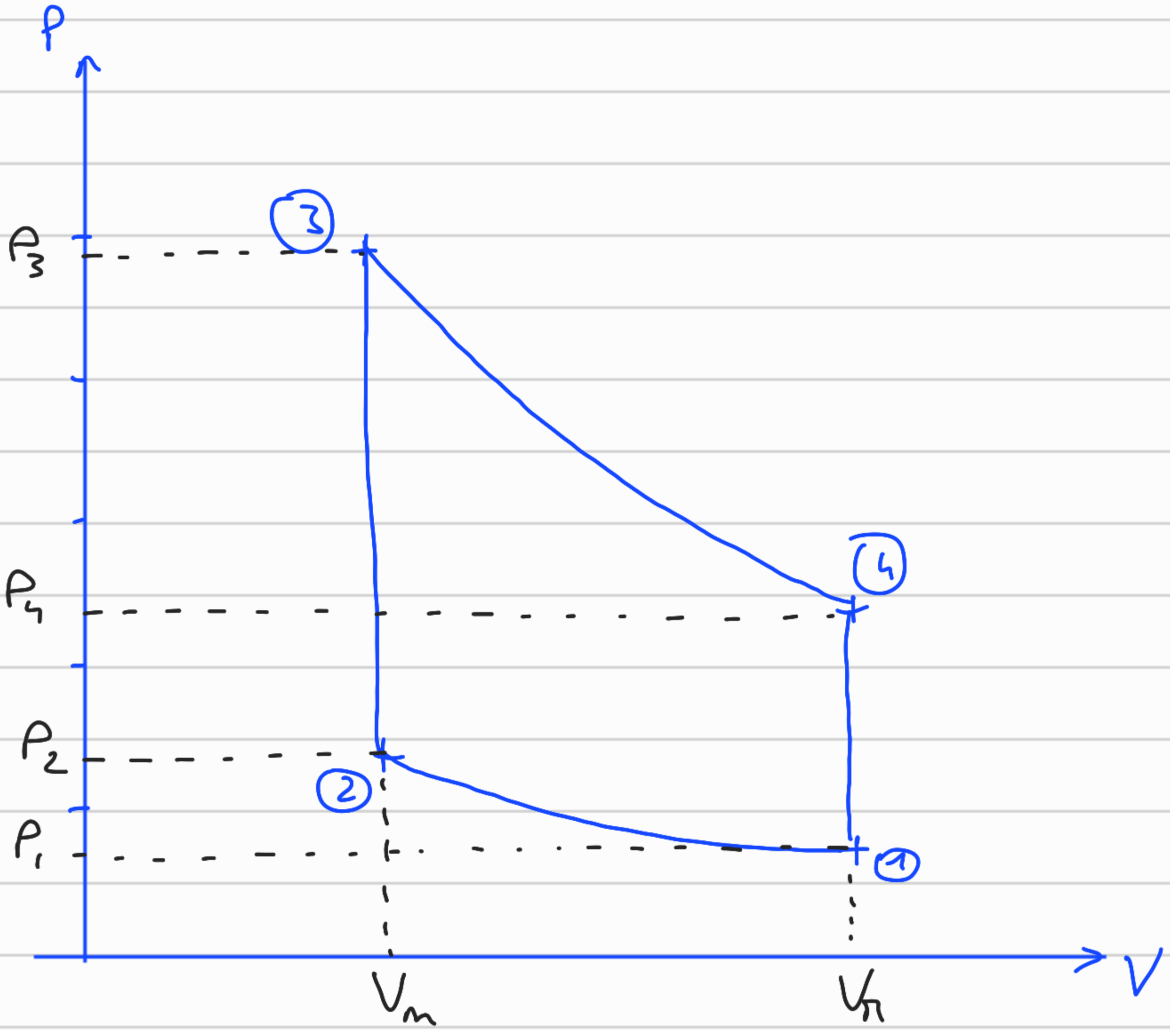
* état 1 : $T_f = 313$ K $\Rightarrow P_1 = \frac{5.8{,}314.313}{2.10^{-3}} = \underline{6{,}51.10^{6} \text{ Pa}}$
  $V_1 = V_m$

* état 2 : $T_f = 313$ K $\Rightarrow P_2 = \frac{5.8{,}314.313}{10^{-3}} = \underline{1{,}30.10^{7} \text{ Pa}}$
  $V_2 = V_m$

* état 3 : $T_c = 1173$ K $\Rightarrow P_3 = \frac{5.8{,}314.1173}{10^{-3}} = \underline{4{,}88.10^{7} \text{ Pa}}$
  $V_3 = V_m$

* état 4 : $T_c = 1173$ K $\Rightarrow P_4 = \frac{5.8{,}314.1173}{2.10^{-3}} = \underline{2{,}43.10^{7} \text{ Pa}}$
  $V_4 = V_m$

Q2.



Q3. * Sur une transformation isotherme pour un gaz parfait on a $\boxed{\Delta U_{ab} = 0}$ (1ère loi de Joule).

* D'après le 1er principe de la thermodynamique $\Delta U = W + Q$.

* On a donc $W_{ab} = -Q_{ab}$.

* Et $W_{ab} = \int -P_{ext}\, dV = \int -P\, dV$

avec $P = \frac{nRT}{V} \Rightarrow W_{ab} = -nRT \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V}$

$\boxed{W_{ab} = -nRT \ln \frac{V_b}{V_a}}$ et $\boxed{Q_{ab} = nRT \ln \frac{V_b}{V_a}}$

Q4. * Sur une transformation isochore $W_{cd} = \int -P_{ext} dV = 0$
* D'après le 1er principe $\Delta U_{cd} = Q_{cd} + W_{cd}$

Soit $Q_{cd} = \int n C_{v,m} dT = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_d - T_c)$

$\boxed{W_{cd} = 0}$ $\boxed{Q_{cd} = \Delta U_{cd} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_d - T_c)}$

Q5. $1 \to 2$ et $3 \to 4$ sont isothermes $\Rightarrow$ on applique les résultats de la Q3 :

$W_{1\to2} = -nRT_f \ln \frac{V_m}{V_n}$ et $W_{3\to4} = -nRT_c \ln \frac{V_n}{V_m}$

AN : $W_{1\to2} = -5 . 8{,}314 . 313 . \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{9{,}02 . 10^3 \text{ J}}$

$W_{3\to4} = -5 . 8{,}314 . 1173 \ln\left(\frac{2}{1}\right) = \underline{-3{,}38 . 10^4 \text{ J}}$

$2 \to 3$ et $4 \to 1$ sont isochores $\Rightarrow$ on applique les résultats de la Q4 :

$W_{2\to3} = W_{4\to1} = 0.$

Q6. Pour les isothermes, d'après la Q3 :

$Q_{1\to2} = -W_{1\to2} = \underline{-9{,}02 . 10^3 \text{ J}}$

$Q_{3\to4} = -W_{3\to4} = \underline{3{,}38 . 10^4 \text{ J}}$

Pour les isochores, d'après la Q4 :

$$Q_{2\to3} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_c - T_f) \quad AN : Q_{2\to3} = \frac{5.8{,}314}{1{,}4-1}(1173-313) = \underline{8{,}94.10^4 J}$$

$$Q_{4\to1} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_c) \quad AN : Q_{4\to1} = \frac{5.8{,}314}{1{,}4-1}(313-1173) = \underline{-8{,}94.10^4 J}$$

Q7. Le contact thermique avec la source chaude a lieu sur les transformations 2→3 et 3→4.

$$\Rightarrow \boxed{Q_c = Q_{2\to3} + Q_{3\to4}}$$

AN : $Q_c = \underline{1{,}23.10^5 J}$

Le contact thermique avec la source froide a lieu sur les transformations 1→2 et 4→1

$$\Rightarrow \boxed{Q_f = Q_{12} + Q_{41}}$$

AN : $Q_f = \underline{-9{,}84.10^4 J}$

Q8. Sur un cycle $\Delta U = 0$ car U est une fonction d'état.
D'où $Q_c + Q_f + W = 0$

$$\boxed{W = -Q_c - Q_f}$$

AN : $W = -2{,}5.10^4\ J$

$W < 0$ c'est bien un moteur !

Q9. $$\boxed{e_{sr} = \frac{-W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}}$$

AN : $e_{sr} = \underline{0{,}201}$ (résultat avec les valeurs non arrondies)

Q10. D'après Q6, on a bien $Q_{23} + Q_{41} = 0$.
$\Rightarrow$ Ces transferts thermiques se compensent.

Q11. $Q_{2\to3}$ est récupérée par échange interne donc elle n'est plus "couteuse"

Et $$W = W_{1\to2} + \underbrace{W_{2\to3}}_{\text{nul car isochore}} + W_{3\to4} + \underbrace{W_{4\to1}}_{\text{nul car isochore}}$$

$$\Rightarrow W = W_{1\to2} + W_{3\to4} < 0$$

D'où $$\boxed{e = -\frac{W_{1\to2} + W_{3\to4}}{Q_{3\to4}}}$$

Q12 AN : $e = 0{,}733$

Q13. Dans un cycle de Carnot (ditherme réversible) on a les égalités :

$$-W = Q_f + Q_c \quad \text{et} \quad \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$$

le rendement de Carnot d'un moteur $e_c = -\frac{W}{Q_c}$ peut donc s'exprimer en fonction des températures par $\boxed{e_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}}$

Q14 $$e = \frac{-W_{3\to4}}{Q_{3\to4}} - \frac{W_{1\to2}}{Q_{3\to4}}$$

Or $3 \to 4$ est isotherme $\Rightarrow W_{3\to4} = -Q_{3\to4}$

Et on a également $$\begin{cases} W_{1\to2} = -nRT_f \ln \frac{V_m}{V_n} \\ W_{3\to4} = -nRT_c \ln \frac{V_n}{V_m} = -Q_{3\to4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e = 1 - \frac{-nRT_f \ln V_m/V_n}{-nRT_c \ln V_m/V_n}$$

$$\boxed{e = 1 - \frac{T_f}{T_c} = e_c}$$

Q15 a) Soit S la section du régénérateur.
Déterminons le nombre de particules contenues dans le régénérateur selon les 2 modèles :

* Modèle à température uniforme T_r :

$$N = \mathcal{N}_A \times \frac{PSL}{RT_r}$$

* Modèle du gradient de température :

$$N = \int_0^L S . dx . \rho(x)$$

avec $\rho(x) = \mathcal{N}_A \times \frac{n}{V} = \mathcal{N}_A \times \frac{P}{RT(x)}$

On obtient : $\mathcal{N}_A . \frac{P.S.L}{RT_r} = \mathcal{N}_A \frac{P.S}{R} \int_0^L \frac{dx}{T_c + \frac{x}{L}(T_f - T_c)}$

Après simplification :

$$\frac{L}{T_r} = \int_0^L \frac{dx}{T_c + \frac{x}{L}(T_f - T_c)} = \frac{L}{T_f - T_c} \left[\ln \left(T_c + \frac{x}{L}(T_f - T_c)\right)\right]_0^L$$

$$\frac{1}{T_r} = \frac{1}{T_f - T_c} \left(\ln \left(T_c + T_f - T_c\right) - \ln T_c \right)$$

$$\frac{1}{T_r} = \frac{\ln (T_f / T_c)}{T_f - T_c} = \frac{\ln (T_c/T_f)}{T_c - T_f}$$

Soit $\boxed{T_r = \dfrac{T_c - T_f}{\ln(T_c/T_f)}}$

b) AN : $T_r = \dfrac{1173 - 313}{\ln\left(\frac{1173}{313}\right)} = \underline{651\ K}$

c) $n = n_c + n_r + n_f = \dfrac{P}{R}\left(\dfrac{V_c}{T_c} + \dfrac{V_r}{T_r} + \dfrac{V_f}{T_f}\right)$

$$\boxed{P = \frac{nR}{\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_f}{T_f}}}$$

d) $W_{1\to 2} = \displaystyle\int_1^2 -P_{ext}\, dV = \int_1^2 -P dV$ car isotherme

Sur la transformation $1 \to 2$ $V_c = 0$, $V_r = cte$

$$\Rightarrow P = \frac{nR}{\frac{V_r}{T_r} + \frac{V_f}{T_f}}$$

$$W_{1\to 2} = -nR \int_1^2 \frac{dV}{\frac{V_r}{T_r} + \frac{V_f}{T_f}} = -nRT_f \left[\ln\left(\frac{V_f}{T_f} + \frac{V_r}{T_r}\right)\right]_1^2$$

Dans l'état 1 $V_f = V_n$

Dans l'état 2 $V_f = V_m$

$$\Rightarrow W_{1\to 2} = -nRT_f \left(\ln\left(\frac{V_m}{T_f} + \frac{V_r}{T_r}\right) - \ln\left(\frac{V_n}{T_f} + \frac{V_r}{T_r}\right)\right)$$

$$W_{1\to2} = nRT_f \ln \left(\frac{\frac{V_n}{T_f} + \frac{V_r}{T_r}}{\frac{V_m}{T_f} + \frac{V_r}{T_r}} \right)$$

$$\boxed{W_{1\to2} = nRT_f \ln \left(\frac{V_n + \frac{T_f}{T_r} V_r}{V_m + \frac{T_f}{T_r} V_r} \right)}$$

AN : $W_{1\to2} = 5{,}0 . 8{,}314 . 313 \ln \left(\frac{2 + \frac{313}{651} 0{,}2}{1 + \frac{313}{651} . 0{,}2} \right) = \underline{8{,}44.10^{3} \, J}$

$$W_{3\to4} = \int -P_{ext} \, dV = \int -P \, dV \text{ car isotherme}$$

et sur la transformation 3→4 $V_f = 0$ donc

$$P = \frac{nR}{\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_r}{T_r}}$$

e) $W_{3\to4} = -nR \int_3^4 \frac{dV}{\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_r}{T_r}} = -nRT_c \left[\ln \left(\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_r}{T_r} \right) \right]_3^4$

Au point 3 : $V_c = V_m$

Au point 4 : $V_c = V_n$

$$W_{3\to4} = -nRT_c\left(\ln\left(\frac{V_n}{T_c}+\frac{V_r}{T_r}\right)-\ln\left(\frac{V_m}{T_c}+\frac{V_r}{T_r}\right)\right)$$

$$W_{3\to4} = nRT_c \ln\left(\frac{\frac{V_m}{T_c}+\frac{V_r}{T_r}}{\frac{V_n}{T_c}+\frac{V_r}{T_r}}\right)$$

$$\boxed{W_{3\to4} = nRT_c \ln\left(\frac{V_m+\frac{T_c}{T_r}V_r}{V_n+\frac{T_c}{T_r}V_r}\right)}$$

AN : $W_{3\to4} = 5{,}0 . 8{,}314 . 1173 \ln\left(\frac{1+\frac{1173}{651}0{,}2}{2+\frac{1173}{651}.0{,}2}\right) = \underline{-2{,}69.10^3 J}$

f) $W_{V_r=0} = -2{,}5.10^4 J$

$W_{V_r\neq0} = 8{,}44.10^3 - 2{,}69.10^4 = -1{,}85.10^4 J$

On a donc $|W_{V_r\neq0}| < |W_{V_r=0}|$.

le travail récupéré est inférieur en présence d'un régénérateur non idéal. Cela est dû au fait que le volume mort ne peut pas être modifié donc ne contribue pas au travail ($\delta W = -pdV$). L'aire du cycle sur le diagramme de Clapeyron est moins importante.

Q16. a) Le transfert serait idéal si la chaleur du compartiment chaud était intégralement transmise au compartiment froid.
Toute perte thermique vers l'extérieur ou vers le régénérateur rend le transfert non idéal.

b) $$e = -\frac{W_{1\to2} + W_{3\to4}}{Q_{3\to4} + x\,Q_{2\to3}}$$

avec
$$W_{1\to2} = -nRT_f \ln\frac{V_m}{V_n}$$
$$W_{3\to4} = -nRT_c \ln\frac{V_n}{V_m}$$
$$Q_{3\to4} = nRT_c \ln\frac{V_n}{V_m}$$
$$Q_{2\to3} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_c - T_f)$$

$$e = \frac{nRT_f \ln(V_m/V_n) + nRT_c \ln(V_n/V_m)}{nRT_c \ln\left(\frac{V_n}{V_m}\right) + x\frac{nR}{\gamma-1}(T_c - T_f)}$$

$$\boxed{e = \frac{1 - T_f/T_c}{1 + \frac{x}{\gamma-1}\,\frac{(1-T_f/T_c)}{\ln V_n/V_m}}}$$ soit $$\boxed{C_2 = \frac{x}{(\gamma-1)\ln(V_n/V_m)}}$$

c) AN : $$C_2 = \frac{0,1}{0,4\ln(2)} = \underline{0,361}$$

d) Lors de la transformation 2 → 3 le gaz reçoit le transfert thermique $(1-x)Q_{2\to 3}$, et le cuivre reçoit donc $(x-1)Q_{2\to 3}$ de la part du gaz, ce qui élève sa température de ΔT telle que :

$$\rho_{Cu} V . c_{Cu} \Delta T = (x-1) Q_{2\to 3}$$

$$\boxed{\Delta T = \frac{(x-1)\frac{nR}{\gamma-1}(T_c - T_f)}{\rho_{Cu} . V . c_{Cu}}}$$

AN : $\Delta T = \dfrac{(0{,}1-1)\frac{5 . 8{,}314}{0{,}4}(1173-313)}{8913 . 0{,}6.10^{-3} . 387} = \underline{-38{,}9\text{ K}}$.

Q17 a) Comparaison du flux surfacique provenant de l'environnement et celui provenant du soleil :

* $P_{s,amb} = \sigma T_{amb}^4$

AN : $P_{s,amb} = 5{,}67.10^{-8} . 313^4 = 544 \text{ W.m}^{-2}$

* $P_{s.sol} = \dfrac{\phi_{sol}}{S}$ avec $\phi_{sol} = \pi \dfrac{d^2}{4} . \varphi_s$

et $S = \pi \dfrac{D^2}{4}$

$\rightarrow P_{s,sol} = \left(\dfrac{d}{D}\right)^2 \varphi_s$

AN : $P_{s,sol} = \left(\dfrac{10}{9{,}2}\right)^2 . 1000 = 2{,}5.10^6 \text{ W.m}^{-2}$

$$\frac{P_{s,sol}}{P_{s,amb}} \approx 5000$$

On peut donc négliger le rayonnement provenant de l'environnement.

b) Bilan énergétique pour la surface réceptrice :

$$\underbrace{\Phi_s\, dt}_{\text{reçu de la parabole}} - \underbrace{\Phi_r\, dt}_{\text{rayonnée selon Stefan}} - \underbrace{\Phi_{c.c}\, dt}_{\text{échange conducto-convectif}} = m c\, dT$$

$$\left(\varphi_s \frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi D^2}{4} . \sigma T^4 - h . \frac{\pi D^2}{4}(T - T_{amb})\right) dt = m c\, dT$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\varphi_s \pi d^2}{4 m.c} - \frac{\pi D^2 . \sigma T^4}{4 m.c} - \frac{h \pi D^2}{4 m.c}(T - T_{amb})$$

c) $\frac{dT}{dt} = 0$ pour $\varphi_s d^2 - \sigma D^2 . T^4 - h D^2 (T - T_{amb}) = 0$

$$h = \frac{-\sigma D^2 T^4 + \varphi_s d^2}{D^2 (T - T_{amb})}$$

AN : $h = \frac{-5{,}67.10^{-8} . 0{,}2^2 . 2473^4 + 1000 . 10^2}{0{,}2^2 (2473 - 313)} = \underline{1{,}76 . 10^2 \text{ W.K}^{-1}\text{m}^{-2}}$

Q18 a) Bilan énergétique pour la surface réceptrice :

$$\underbrace{\Phi_s\,dt}_{\text{reçu de la parabole}} - \underbrace{\Phi_r\,dt}_{\text{rayonnée selon Stefan}} - \underbrace{\Phi_{c.c}\,dt}_{\text{échange conducto-convectif}} - P_c\,dt = m\,c\,dT$$

En régime permanent $P_c = \Phi_s - \Phi_r - \Phi_{cc}$

$$P_c = \varphi_s \frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi D^2}{4}\sigma T^4 - \frac{h\pi D^2}{4}(T - T_{amb})$$

b) AN : $P_c = \frac{1000.\pi.10^2}{4} - \frac{\pi.0{,}2^2}{4}.5{,}67.10^{-8}.1173^4$

$$- \frac{1{,}76.10^2.\pi.0{,}2^2}{4}(1173-313) = 7{,}04.10^4\ W$$

c) $P_e = \eta.\frac{W}{\Delta t} = \eta.e.P_c$

AN : $P_e = 0{,}95.0{,}41.7{,}04.10^4 = \underline{2{,}74.10^4\ W}$.

Q19. a) le sodium étant en équilibre diphasique, il est à la température de vaporisation et le transfert thermique qu'il reçoit sert à la vaporisation :

$$P_c = \frac{\Delta_{vap}H.n}{\Delta t} = \frac{\Delta_{vap}H\,m}{M(Na).\Delta t}$$

$$\boxed{\frac{m}{\Delta t} = \frac{P_c \, M(Na)}{\Delta_{vap} H}}$$

AN : $\frac{m}{\Delta t} = \frac{70.10^3 \, . \, 22{,}96.10^{-3}}{99{,}2.10^3} = 0{,}0162 \ kg.s^{-1}$

$= \underline{162 g.s^{-1}}$

b) le sodium vaporisé va repasser à l'état liquide au contact de la source chaude du moteur Stirling, libérant ainsi la même quantité d'énergie que celle qu'il avait absorbé en se vaporisant. Cela permet de transporter sans pertes la puissance captée par S_r sur la surface des tubes d'échanges.

Exercice 2 :

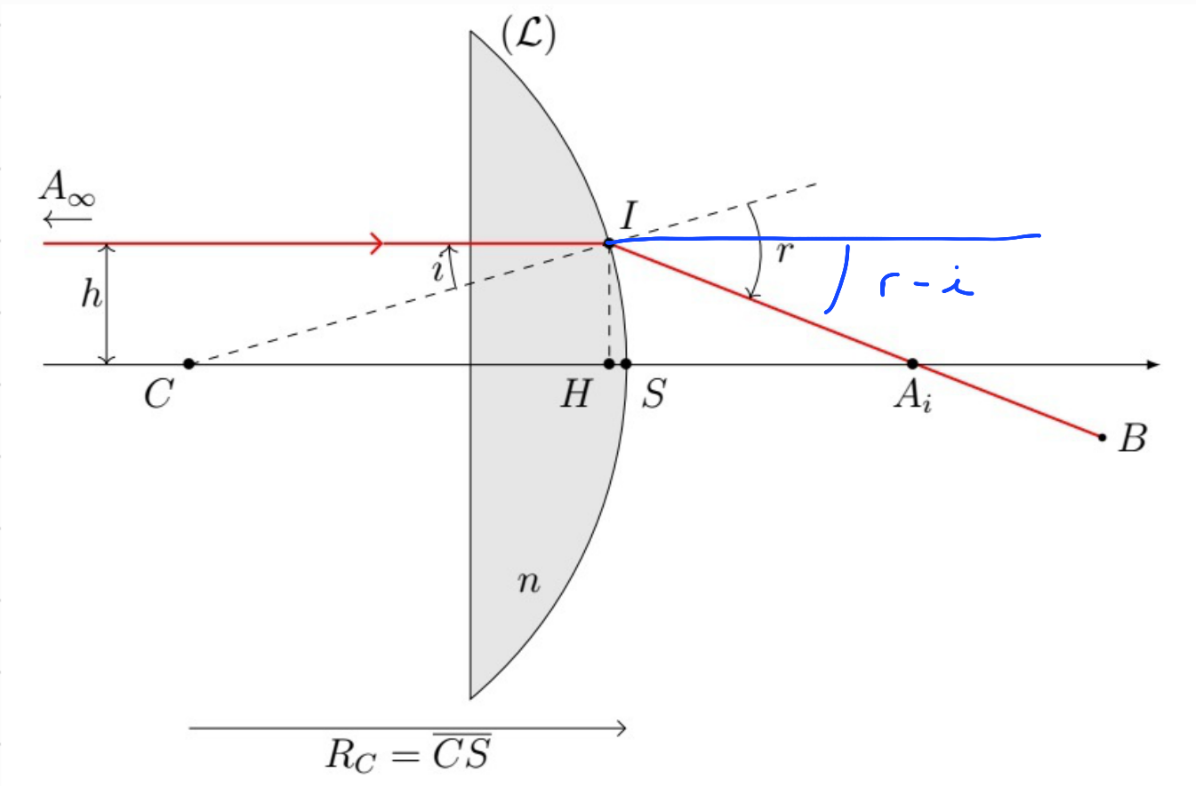
Q1. D'après la loi de Snell-Descartes
$n \sin i = \sin r$.

Q2. $\boxed{CH = R_c \cdot \cos i}$

$$\frac{HI}{HA_i} = \tan(r-i)$$

$$HA_i = \frac{HI}{\tan(r-i)}$$

$$\boxed{HA_i = \frac{R_c \sin i}{\tan(r-i)}}.$$



Q3. On en déduit $\boxed{\underline{CA_i} = R_c\left(\cos i + \frac{\sin i}{\tan(r-i)}\right)}$

Q4 a) Pour $HI \ll R_c$ $\quad \sin i \ll 1$

d'où $\sin i \approx i$ et $\cos i \approx 1$

On a aussi $\sin r \approx r$ d'où $ni \approx r$

De même $r-i \ll 1$ d'où $\tan(r-i) \approx r-i$

Soit $\tan(r-i) \approx (n-1)i$

On obtient $\underline{CA_i} \approx R_c\left(1 + \frac{i}{(n-1)i}\right)$

$$\Leftrightarrow \underline{CA_i} \approx R_c \frac{ni - i + i}{(n-1)i}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{CA_i} \approx R_c \frac{n}{n-1}}$$

$\underline{CA_i}$ est donc indépendant de i.

b) $f_i = \underline{SF_i} = \underline{SC} + \underline{CA_i} = -R_c + R_c\frac{n}{n-1}$

$f_i = R_c \frac{n-n+1}{n-1}$

$$\boxed{f_i = \frac{R_c}{n-1}}$$

c) $\boxed{f_i = \frac{1}{V}}$

AN : $f_i = \frac{1}{60} = \underline{1{,}67.10^{-2}\ m}$

$$\boxed{R_c = \frac{n-1}{V}}$$

AN : $R_c = \frac{(1{,}33-1)}{60} = \underline{5{,}50.10^{-3}\ m}$

Q5 a) D'après la loi des sinus dans le triangle CIA_i on a : $\frac{\underline{CI}}{\sin(r-i)} = \frac{\underline{CA_i}}{\sin(\pi-r)}$

or $\sin(\pi - r) = \sin r$ et $\underline{CI} = R_c$

$$\Rightarrow \frac{R_c}{\sin(r-i)} = \frac{\underline{CA_i}}{\sin r}$$

$$\Rightarrow \underline{CA_i} = R_c \frac{\sin r}{\sin(r-i)} = \frac{R_c . n \sin i}{\sin r . \cos i - \cos r . \sin i}$$

$$\Rightarrow \underline{CA_i} = \frac{R_c . n . \sin i}{n \sin i . \cos i - \sqrt{(1-n^2\sin^2 i)} . \sin i}$$

$$\boxed{\underline{CA_i} = \frac{n R_c}{n . \cos i - \sqrt{1-n^2\sin^2 i}}}$$

b) $\tan i = \dfrac{h}{R_c}$

$\Rightarrow$ Pour $\dfrac{h}{R_c} \ll 1$ on a $i \simeq \dfrac{h}{R_c}$

Et en utilisant les développements limités au voisinage de 0 on obtient :

$$\underline{CA_i} \approx \frac{n . R_c}{n\left(1-\frac{i^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{n^2 i^2}{2}\right)}$$

$$\underline{CA_i} \approx \frac{n R_c}{n\left(1-\frac{h^2}{2R_c^2}\right) - \left(1 - \frac{n^2}{2}\frac{h^2}{R_c^2}\right)}$$

$$\underline{CA_i} \approx \frac{n R_c}{n - \frac{n h^2}{R_c^2} - 1 + \frac{n^2 h^2}{2R_c^2}} \approx \frac{n R_c}{(n-1) + \frac{n h^2}{2R_c^2}(n-1)}$$

$$\underline{CA_i} \approx \frac{n R_c}{(n-1)\left(1 + \frac{n h^2}{2R_c^2}\right)}$$

$$\boxed{\underline{CA_i} \approx \frac{n R_c}{n-1}\left(1 - \frac{n h^2}{2R_c^2}\right)}$$

c) $$\eta = \left| \frac{\underline{CA_i}(h) - \underline{CA_i}(h \to 0)}{\underline{CA_i}(h \to 0)} \right|$$

$$\eta = \left| \frac{\frac{n R_c}{n-1}\left(1 - n h^2/2R_c^2\right) - n R_c/n-1}{n R_c/_{n-1}} \right|$$

Soit $\boxed{\eta = \dfrac{n h^2}{2 R_c^2}}$

d) Pour $h \simeq \dfrac{R_c}{2}$ l'approximation $h \ll R_c$ n'est pas valable

On a $h = \dfrac{R_c}{2}$, or $\sin i = \dfrac{h}{R_c}$

$\Rightarrow \sin i = \dfrac{1}{2} \Rightarrow i = 60°$

Et $\cos i = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On utilise la formule de la Q5.a :

$$\underline{CA_i} = \frac{nR_c}{\frac{\sqrt{3}}{2}.n - \sqrt{1-0{,}25n^2}}$$

AN : $\underline{CA_i(h)} = \dfrac{1{,}33 \,.\, 5{,}5.10^{-3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}.1{,}33 - \sqrt{1-0{,}25.1{,}33^2}} = 1{,}81.10^{-2}\,m$

Et $\underline{CA_i}\ h \to 0 = \dfrac{nR_c}{n-1}$

AN : $\underline{CA_i}\ h \to 0 = \dfrac{1{,}33.5{,}5.10^{-3}}{0{,}33} = 2{,}22.10^{-2}\,m$

$\eta = \left| \dfrac{1{,}81 - 2{,}22}{2{,}22} \right| = \underline{0{,}185}$

e) les rayons extrêmes arrivant sur l'oeil convergent à une distance $\eta \times (R_c + f_i)$ devant les rayons arrivant au centre, soit $0{,}185 \times (1{,}67.10^{-2} + 5{,}5.10^{-3}) = \underline{4{,}11.10^{-3}\,m}$
$\Rightarrow$ environ 4mm devant la rétine.

f) Lorsque l'éclairement est faible la pupille est très ouverte, les rayons issus d'un objet éloignés ne convergent pas en un point unique : la lentille n'est plus stigmatique.
Pour voir net plus loin il faut éliminer les rayons marginaux en fermant la pupille.
$\Rightarrow$ on plisse les yeux.

Q6 a) $$-\frac{1}{p_o} + \frac{1}{p_i} = V$$

Relation de conjugaison de Descartes.

la vergence a la dimension L^{-1}, on l'exprime en m^{-1} dans le SI (ou dioptries).

b) la valeur V_{max} correspond à p_o minimum

$$-\frac{1}{-d_{min}} + \frac{1}{\underline{SR}} = V_{max}$$

AN : $V_{max} = \dfrac{1}{0,25} + \dfrac{1}{16,7.10^{-3}} = \underline{63,9\ \delta}$.

c) $-\dfrac{1}{-d_{max}} + \dfrac{1}{\overline{SR}} = V_{min}$

or $d_{max} = +\infty$

$\Rightarrow V_{min} = \dfrac{1}{16,7.10^{-3}} = \underline{59,9\ \delta}$.

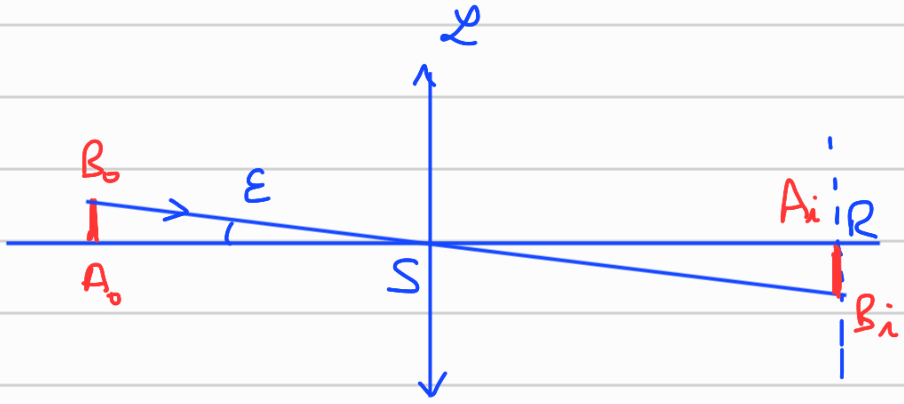
d) Pour l'œil emmetrope $A = \underline{4\ \delta}$.

Q7 a) $V'_{max} = -\dfrac{1}{-d_{min}} + \dfrac{1}{SR}$

AN : $V'_{max} = 62,7\ \delta$ et $V'_{min} = V_{min}$

$A = \underline{2,8\ \delta}$

b)



$\dfrac{A_iB_i}{SR} = \dfrac{A_oB_o}{SA_o} = \tan\varepsilon \simeq \varepsilon$

$A_oB_o = SA_o . \varepsilon$

AN: $A_oB_o = 0{,}35 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = \underline{1{,}4 \cdot 10^{-4}\ m}$

Les caractères imprimés étant espacés de plus de 0,14 mm, l'individu discerne les 2 lettres.

c) Si d'_{min} augmente l'écart minimum entre 2 points pour les discerner séparément augmente et peut devenir supérieur à l'écart entre 2 caractères $\Rightarrow$ on ne peut plus lire.

Q8. a) Il faut que la lentille ajoutée renvoie une image à l'infini pour que la personne voit nettement sans accommoder.

$$A_o \xleftrightarrow{\mathcal{L}_L} A_1 \xleftrightarrow{\mathcal{L}} R$$

avec $A_1 = \infty$ pour voir sans accommoder.

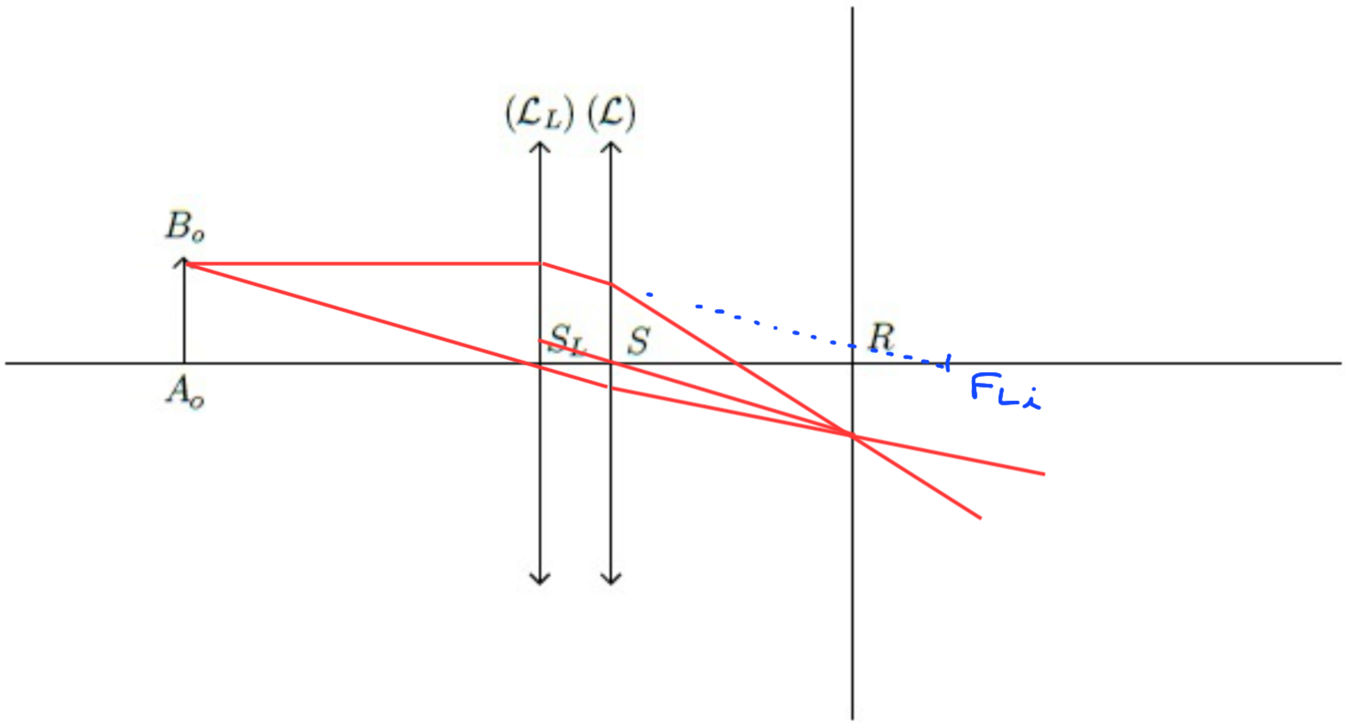
Il faut donc $\overline{S_LA_o} = -f'_L$

Or $\overline{S_LA_o} = \overline{S_LS} + \overline{SA_o}$

AN : $\overline{S_LA_o} = 2 \cdot 10^{-2} - 0{,}25 = -0{,}23\ m$

$V_L = \frac{1}{f'_L}$ AN : $V_L = \underline{4{,}35\ \delta}$

b)



c) Pour voir un objet il faut que son image se forme sur la rétine.

* Si l'objet est situé à 25 cm, l'image renvoyée par $\mathcal{L}_L$ est à l'infini ⇒ l'oeil presbyte voit sans accommoder.

* Si l'objet se rapproche, il est alors compris entre F_L et S_L, son image est virtuelle et droite et se rapproche de $\mathcal{L}_L$. L'oeil presbyte pourra voir nettement tant que cette image est située au delà de 1 m de son oeil.

* L'objet le plus proche visible est tel que

$$A_o \xrightarrow{\mathcal{L}_L} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}} R.$$

Avec A_1 compris entre le PR et le PP de l'oeil presbyte :

Avec $\overline{SA_1} \leqslant -d'_{min}$ $\qquad (d'_{min} \geqslant 0)$

$$-\frac{1}{\overline{S_LA_0}} + \frac{1}{\overline{S_LA_1}} = \frac{1}{f'_L}$$

$$-\frac{1}{\overline{S_LA_0}} + \frac{1}{\overline{S_LS} + \overline{SA_1}} = \frac{1}{f'_L}$$

$$\frac{1}{\overline{S_LA_0}} = \frac{1}{\overline{S_LS} + \overline{SA_1}} - \frac{1}{f'_L}$$

Or $\overline{SA_1} \leqslant -d'_{min} \Rightarrow \overline{S_LS} + \overline{SA_1} \leqslant d_L - d'_{min}$

$$\frac{1}{\overline{S_LS} + \overline{SA_1}} \geqslant \frac{1}{d_L - d'_{min}}$$

$$\frac{1}{\overline{S_LA_0}} \geqslant \frac{1}{d_L - d'_{min}} - \frac{1}{f'_L}$$

$$\boxed{\overline{S_LA_0} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{d_L - d'_{min}} - V_L}}$$

AN : $\overline{S_LA_0} \leqslant \dfrac{1}{\frac{1}{0{,}02 - 1} - 4{,}35}$

$\overline{S_LA_0} \leqslant -0{,}186$ m

Et $\overline{SA_o} = \overline{SS_L} + \overline{S_L A_o}$

$\Rightarrow \overline{SA_o} \leqslant -0{,}206 \text{ m}$.

Avec ces lunettes la personne presbyte peut lire des caractère s'ils sont situés au delà de 20,6 cm de son oeil.

d) La lentille $\mathcal{L}_L$ donne une image située en F'_L d'un objet à l'infini avec $\overline{S_L F'_L} = f'_L = 23 \text{ cm}$.

Cette image est donc située derrière la rétine, et ne peut donc pas être vue.

$\Rightarrow$ Ces verres ne permettent pas une vision de loin.

Exercice 3 :

Q1 $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{On}}{dt^2}$

Pour $on(t)$ variant de façon sinusoïdale

$a_m = \omega^2 X_m \Rightarrow \boxed{X_m = \dfrac{a_m}{\omega^2} = \dfrac{a_m}{(2\pi.f)^2}}$

AN : $X_m = \dfrac{5}{(2\pi.200)^2} = \underline{3.10^{-6}\ m}$.

L'énergie maximum récupérable vaut

$E_{cmax} = \frac{1}{2} m V_m^2$ avec $V_m = \dfrac{a_m}{\omega}$

$$\boxed{E_{cmax} = \frac{1}{2} m \left(\frac{a_m}{\omega}\right)^2}$$

AN : $E_{cmax} = 0,5.10^{-3}\left(\dfrac{5}{2\pi.200}\right)^2 = \underline{8.10^{-9}\ J}$

Q2. Bilan des forces sur le système $\{M\}$:

* poids : $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$
* force de rappel élastique : $\vec{F_{el}} = -k(\ell-\ell_0)(-\vec{u_z})$
* force de frottement fluide $\vec{F} = -\lambda \vec{v}_{n/Rs}$.

A l'équilibre le système est immobile
$\Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$

D'après le principe d'inertie appliqué à $\{M\}$ en équilibre on a :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_{el,eq}$$

En projection sur Oz : $-mg + k(l_{eq} - l_0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}}$$

Q3. $\boxed{x(t) = l_{eq} - l(t)}$

$$z(t) = z_B(t) - l(t)$$

$$\boxed{z(t) = z_{Beq} + z_{vib}(t) - l(t)}$$

Q4. le principe fondamental de la dynamique appliqué à $\{M\}$ dans R_t donne :

$$m\vec{a} = -mg\vec{e_z} + k(l - l_0)\vec{e_z} - \lambda(\dot{z} - \dot{z}_{vib})\vec{e_z}$$

En projection sur Oz :

$$m\ddot{z} = -mg + k(l - l_0) - \lambda(\dot{z} - \dot{z}_{vib})$$

Or $\ddot{z} = \ddot{z}_{vib} - \ddot{\ell} = \ddot{z}_{vib} + \ddot{x}$

et $\dot{z} - \dot{z}_{vib} = -\dot{\ell} = \dot{x}$

$$\Rightarrow (\ddot{z}_{vib} + \ddot{x})m = -mg + k(\ell_{eq} - x - \ell_0) - \lambda \dot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\lambda}{m}x = -\ddot{z}_{vib} + \underbrace{\frac{k}{m}(\ell_{eq} - \ell_0) - g}_{=0}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -\ddot{z}_{vib}}$$

Q5 En utilisant la notation complexe :

$$\ddot{\underline{X}} + \frac{\lambda}{m}\dot{\underline{X}} + \frac{k}{m}\underline{X} = -\ddot{\underline{Z}}_{vib}$$

$$(j\omega)^2 \underline{X} + \frac{\lambda}{m}(j\omega)\underline{X} + \frac{k}{m}\underline{X} = -(j\omega)^2 \underline{Z}_{vib}$$

$$\underline{X}\left(\frac{k}{m} - \omega^2 + \frac{\lambda}{m}j\omega\right) = \omega^2 \underline{Z}_{vib}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\omega^2}{\frac{k}{m} - \omega^2 + j\omega\frac{\lambda}{m}}}$$

On peut mettre $\underline{H}(j\omega)$ sous forme canonique

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\omega^2/k/m}{1-\frac{\omega^2}{k/m}+j\omega\frac{\lambda}{m(k/m)}} = \frac{\frac{\omega^2}{k/m}}{1-\frac{\omega^2}{(\sqrt{k/m})^2}+j\frac{\omega}{k/\lambda}}$$

En identifiant avec la forme canonique donnée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$ on a :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$Q\omega_0 = \frac{k}{\lambda} \Rightarrow Q = \frac{k}{\lambda\omega_0} = \frac{k\sqrt{m}}{\lambda\sqrt{k}}$$

$$\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}}$$

Q6. Pour $\omega \gg \omega_0$ $\underline{H}(j\omega) \approx \frac{(\omega/\omega_0)^2}{-(\omega/\omega_0)^2+j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) \approx \frac{1}{-1+j\frac{\omega}{Q\omega_0}\cdot\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \approx \frac{1}{-1+j\frac{\omega_0}{Q\omega}} \approx -1$$

Pour $\omega \ll \omega_0$ $\quad \underline{H}(j\omega) \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \to 0$

Il s'agit donc d'un filtre passe-haut du second ordre (ordre du dénominateur de $\underline{H}$, ou plus haut degré de la dérivée dans l'équation différentielle).

Q7. $$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega_0}{\omega}}$$

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2\omega^2}}} = \left[\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2\omega^2}\right]^{-1/2}$$

On pose $X = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \Rightarrow |H(X)| = \left[(X-1)^2 + \frac{X}{Q^2}\right]^{-1/2}$

$$\frac{dH}{dX} = -\frac{1}{2}\left(2(X-1) + \frac{1}{Q^2}\right)\left((X-1)^2 + \frac{X}{Q^2}\right)^{-3/2}$$

$$\frac{dH}{dX} = 0 \iff (1-X) - \frac{1}{2Q^2} = 0$$

$$X = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega_0}{\omega_r}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$\frac{\omega_0}{\omega_r} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$\boxed{\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 1/2Q^2}}}$$

Pour $Q > 99$ unités $\omega_r \simeq \omega_0$.

Q8. En choisissant une fréquence de résonance proche de celle des vibrations, la récupération d'énergie sera maximale car les vibrations seront amplifiées.

Q9. $\boxed{W_e = \frac{1}{2} C U^2}$

Q10 C_{min} correspond à une distance $d + X$ entre les armatures, d'où

$$C_{min} = \frac{\varepsilon_0 S}{d + X}$$

Par un raisonnement analogue

$$C_{max} = \frac{\varepsilon_0 S}{d - X}$$

Q11. L'énergie lorsque la capacité est chargée avec Q avec C_{max} vaut :

$$W_e(t) = \frac{1}{2} C_{max} U^2 = \frac{Q^2}{2C_{max}}$$

Quand l'armature se déplace C varie jusqu'à C_{min} mais Q reste constante (fonctionnement à charge constante) :

$$W_e(t') = \frac{Q^2}{2C_{min}}$$

⇒ l'énergie récupérable est :

$$W = W(t') - W(t) = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_{min}} - \frac{1}{C_{max}}\right)$$

Or $Q^2 = C_{max}^2 U^2$

$$W = \frac{1}{2} U^2 C_{max}^2 \left(\frac{1}{C_{min}} - \frac{1}{C_{max}}\right)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} U^2 \frac{C_{max}}{C_{min}} \left(C_{max} - C_{min} \right)}$$