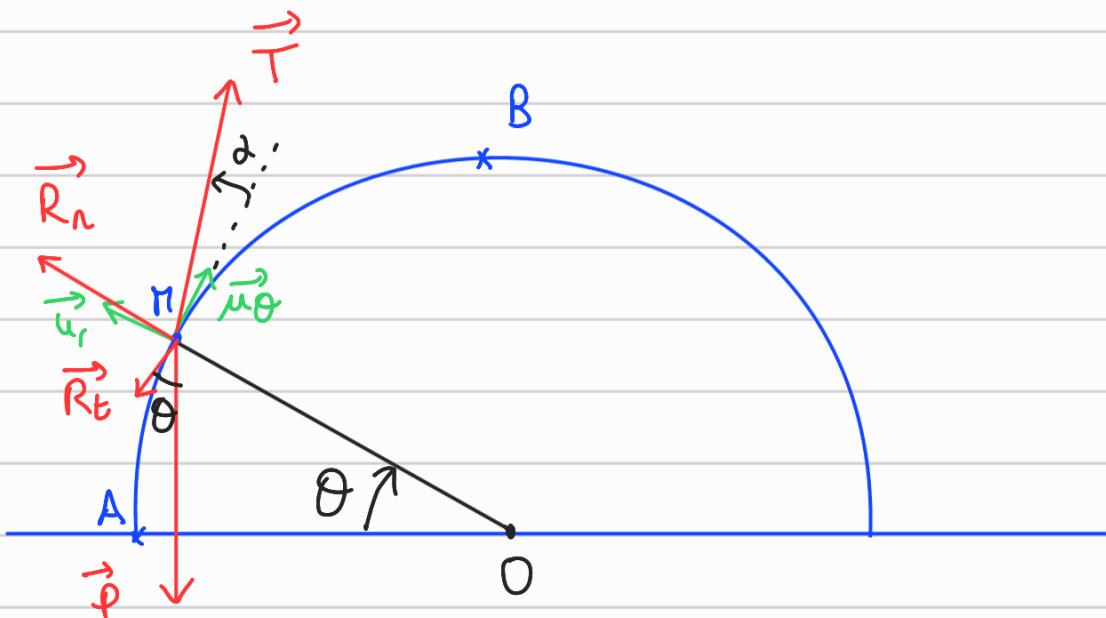


Correction du TD 9.

Exercice 1 :

Q1 On étudie le système {point M} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
On utilise une base polaire.



$$Q2. \quad w(\vec{T}) = \int_A^B \vec{T} \cdot d\vec{n}$$

$$\text{avec } \vec{T} = T \cos \alpha \vec{u}_\theta + T \sin \alpha \vec{u}_r$$

$$\text{et } d\vec{n} = R d\theta \vec{u}_\theta.$$

$$\text{Soit } w(\vec{T}) = \int_A^B T R \cos \alpha d\theta = TR \cos \alpha \left[\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$w(\vec{T}) = RT \cos \alpha \frac{\pi}{2}$$

Q3. Pour $v = \text{cte}$ on a $\vec{\omega} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

avec $\dot{\theta} = \text{cte}$ d'où $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$

Or d'après le principe fondamental de la dynamique appliquée au système $\{1\}$: dans le référentiel terrestre galiléen, on a

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{soit} \quad \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_n + \vec{R}_t = m\vec{a}$$

Soit en projection sur \vec{u}_r :

$$-mg\sin\theta + T\sin\alpha + R_n = -mR\dot{\theta}^2$$

Soit $R_n = -mR\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta - T\sin\alpha$

Q4. $\vec{F}_p = \vec{R}_t$ avec $\|\vec{F}_p\| = f \cdot \|\vec{R}_n\|$.

$$W(\vec{F}_p) = \int_A^B \vec{F}_p \cdot d\vec{r} \quad \text{avec} \quad \vec{F}_p = -f R_n \vec{u}_\theta$$

$$\text{et } d\vec{r} = R d\theta \vec{u}_\theta$$

$$\text{donc } W(\vec{F}_p) = \int_A^B -f R_n \cdot R d\theta$$

$$= -f R \int_A^B (-mR\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta - T\sin\alpha) d\theta$$

$$W(\vec{F}_P) = fR^2 m \dot{\theta}^2 [\theta]_0^{\pi/2} + fRmg [\cos\theta]_0^{\pi/2} + T \sin\alpha [\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= fR^2 m \dot{\theta}^2 \frac{\pi}{2} + fmg R (0-1) + T \sin\alpha \frac{\pi}{2} \cdot fR$$

avec $R\dot{\theta} = v$ on obtient :

$$W(\vec{F}_P) = fv^2 m \frac{\pi}{2} - fmg R + T \sin\alpha \frac{\pi}{2} \cdot fR$$

$$W(\vec{F}_P) = mv^2 m \frac{\pi}{2} - fmg R + fRT \sin(\alpha) \frac{\pi}{2}$$

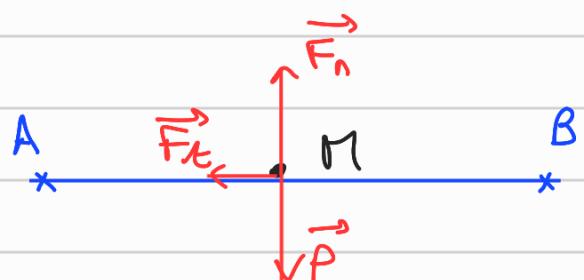
Exercice 2 :

Q1. On applique le T.E.C au système [voiture] dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F})$$

Bilan des forces :

$$E_c(B) - E_c(A) = W(\vec{F}_k)$$



car \vec{P} et \vec{F}_n sont orthogonaux au déplacement pendant tout le trajet.

et $E_C(B) = 0$

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = \int_A^B \vec{F}_C \cdot d\vec{O}\vec{n} \quad \text{or} \quad \vec{F}_t = -F_t \vec{u}_x = -\mu F_n \vec{u}_x$$

et $d\vec{O}\vec{n} = dx$.

De plus d'après le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe (Oy) on a : $F_n = mg$.

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} m v_0^2 = \int_A^B -\mu mg dx = -\mu mg \cdot D$$

$$D = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

Q2. AN : $D = \frac{(140/36)^2}{2 \cdot 0,6 \cdot 10} = 126 \text{ m}$

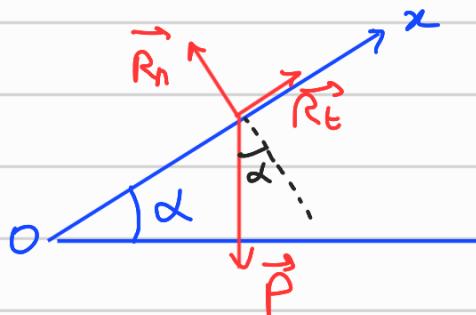
Q3. Soit D la distance d'arrêt de la voiture lancée à 130 km/h et D' pour la voiture lancée à 110 km/h .

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{v_0^2}{2\mu g} \\ D' &= \frac{v'_0^2}{2\mu g} \end{aligned} \right\} \frac{D}{D'} = \frac{v_0^2}{v'_0^2}$$

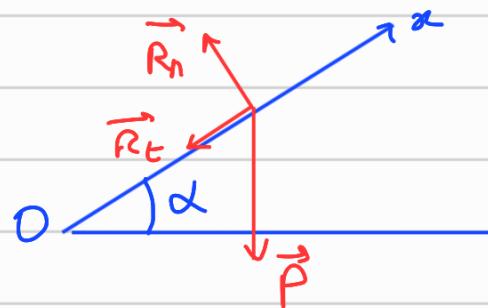
Soit : $D' = D \cdot \frac{v'_0^2}{v_0^2}$

AN : $D' = 500 \cdot \frac{110^2}{130^2} = 358 \text{ m}$

QL. Si la route fait un angle α avec l'horizontale :



en descente



en montée

le TEC appliqué au système [voiture] dans le référentiel terrestre donne :

$$\Delta E_C = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_E)$$

avec $W(\vec{P}) = \int_A^B (-mg \sin \alpha \vec{u}_x - mg \cos \alpha \vec{u}_y) dx \vec{u}_x$

soit $W(\vec{P}) = \int_A^B -mg \sin \alpha dx = -mg \sin \alpha \cdot D$.

$$\text{et } W(\vec{R}_E) = \int_A^B R_E dx = \int_A^B -\mu R_n dx$$

Et le principe fondamental de la dynamique projeté dans la direction (Oy) donne :

$$R_n = mg \cos \alpha$$

Soit $W(\vec{R}_E) = \int_A^B -\mu mg \cos \alpha dx = -\mu mg \cos \alpha \cdot D$

On a donc $-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\theta (\sin\theta - \mu\cos\theta).$$

$$\text{et } \frac{1}{2}mv_0'^2 = mg\theta' (\sin\theta - \mu\cos\theta).$$

$$\theta' = \theta \left(\frac{v_0^2}{v_0'^2} \right)$$

\Rightarrow même résultat que sur une route horizontale.

Exercice 3 :

Q1. Bilan des forces sur le système {anneau}

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta \vec{\mu}_r - mg\sin\theta \vec{\mu}_\theta$$

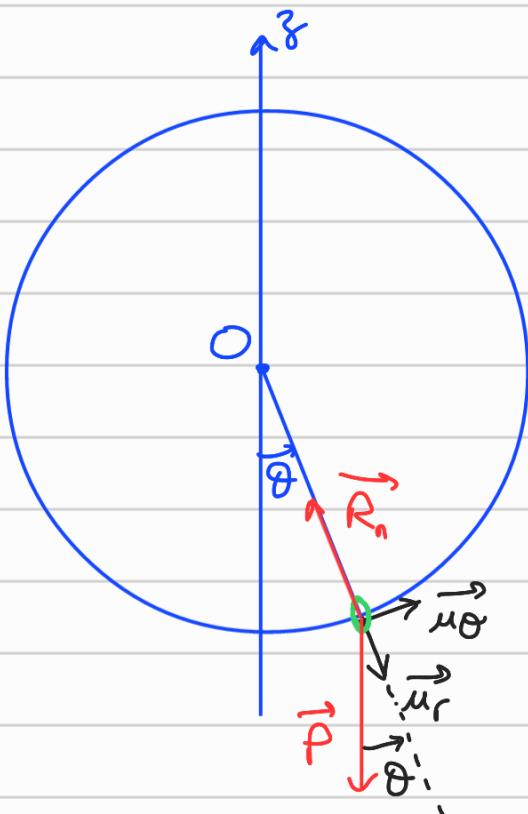
$$\vec{R}_n = -R_n \vec{\mu}_r$$

(absence de frottements donc réaction du support orthogonale au support)

$$Q2. W(\vec{R}_n) = \int \vec{R}_n \cdot d\vec{\Omega}$$

$$\text{avec } d\vec{\Omega} = R d\theta \vec{\mu}_\theta$$

$$\text{donc } W(\vec{R}_n) = \int -R_n \vec{\mu}_r \cdot R d\theta \vec{\mu}_\theta = 0$$



Q3. On a $W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\Omega}$

soit $W(\vec{F}) = \int_A^B -mg \sin \theta \cdot R d\theta$

$$= - \left[mgR \cos \theta + k \right]_A^B$$

$$= - \Delta E_{pp} \quad \text{avec} \quad E_{pp} = k - mgR \cos \theta$$

En choisissant $E_{pp}(\theta=0) = 0$ on a

$$0 = k - mgR \Rightarrow k = mgR$$

$E_{pp} = mgR(1 - \cos \theta)$

QL. $E_c = \frac{1}{2} m(R\dot{\theta})^2$

Q5. D'après le théorème de l'énergie mécanique appliquée à l'anneau dans le référentiel terrestre galiléen, on a :

$\Delta E_m = 0$ car le poids est une force conservative (elle dérive d'une énergie potentielle) et la réaction du support ne travaille pas.

On a donc $E_{pp} + E_c = \text{cte}$

Soit $mgR(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} m(R\dot{\theta})^2 = \text{cte}$

Que l'on dérive pour obtenir l'équation du mouvement :

$$mgnR (\sin \theta \cdot \dot{\theta}) + mR^2 \ddot{\theta} = 0$$

$$g \sin \theta + R \ddot{\theta} = 0$$

Q6. Avec l'approximation des petits angles : $\sin \theta \approx \theta$, on obtient alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \theta = 0 \quad \text{qui est l'équation}$$

d'un oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$\text{et de période propre } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

soit

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Exercice 4:

Q1. Bilan des forces sur le système {vélo + cycliste} :

* poids $\vec{P} = m\vec{g}$

* réaction de la route : \vec{R} (orthogonale au sol)

* force motrice horizontale de puissance P

* frottements de l'air : $\vec{F}_f = -k v \cdot \vec{v}$.

Le théorème de la puissance cinétique appliquée au système considéré permet d'écrire :

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{mg}) + P(\vec{R}) + P + P(\vec{F}_f)$$

avec $P(\vec{F}_i) = \vec{F}_i \cdot \vec{v}$

Soit $\frac{dE_c}{dt} = 0 + 0 + P - k v \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}$

$$\frac{dE_c}{dt} = P - k v^3$$

avec $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ soit $\frac{dE_c}{dt^2} = m v \cdot \frac{dv}{dt}$

or $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$

$$\Rightarrow m v^2 \frac{dv}{dx} = P - k v^3$$

Q2. $f(x) = P - k v^3$ donc $m v^2 \frac{dv}{dx} = f(x)$

et $\frac{df}{dx} = -3 k v^2 \frac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow v^2 \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{3k} \frac{df}{dx}$$

En injectant dans l'équation précédente on obtient :

$$-\frac{m}{3k} \frac{df}{dx} = f(x)$$

Soit

$$f'(x) + \frac{3k}{m} f(x) = 0$$

Q3. C'est une équation différentielle du 1^{er} ordre à coefficients constants, dont la solution générale est :

$$f(x) = A e^{-x/L} \quad \text{avec} \quad L = \frac{m}{3k}$$

On utilise la valeur initiale : $v(x=0) = v_0$

$$f(0) = P - kv_0^3 = A e^0$$

$$\Rightarrow A = P - kv_0^3$$

$$\text{D'où } P - kv^3 = (P - kv_0^3) e^{-x/L}$$

Soit

$$v(x) = \left(\frac{P - (P - kv_0^3) e^{-x/L}}{k} \right)^{1/3}$$

Exercice 5 :

Q1. Système {voiture} dans le référentiel

terrestre supposé galilien :

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$

\vec{R}_n orthogonale au support.

On néglige les frottements donc l'énergie mécanique du système se conserve :

$E_m(0) = E_m(A)$ avec A = point en bas de la descente.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$$

or $v_0 = 0$ et $h_A = 0$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 \Rightarrow v_A = \sqrt{2gh}$$

Q2. $dE_{pp} = -\delta w(\vec{P}) = -\vec{mg} \cdot d\vec{n}$
 $= mg\vec{u}_z \cdot d\vec{u}_z$

$$dE_{pp} = mg dz$$

Soit $E_{pp} = mgz + k$ avec $k = \text{cte}$
telle que $E_{pp}(z=0) = 0 \Rightarrow k = 0$

$$E_{pp} = mgz \quad \text{or} \quad z = R(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow E_{pp} = mgR(1 - \cos\theta)$$

La conservation de l'énergie mécanique donne :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + mgR(1 - \cos\theta)$$

$$v_0^2 - R^2\dot{\theta}^2 - 2gR(1 - \cos\theta) = 0$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\theta - 1)$$

Q3. On applique la 2^{ème} loi de Newton au système [voiture] et on la projette sur \vec{u}_r :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \quad \text{avec} \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

$$\text{et} \quad \vec{P} = mg\cos\theta\vec{u}_r - mg\sin\theta\vec{u}_\theta$$

D'où $mg\cos\theta - R = -mR\dot{\theta}^2$

$$R = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

on injecte l'expression précédente de $\dot{\theta}^2$:

$$R = mR \left(\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(\cos\theta - 1) \right) + mg\cos\theta$$

$$R = \frac{m v_0^2}{R} + 2mg(\cos\theta - 1) + mg\cos\theta$$

$$R = m \left(\frac{v_0^2}{R} + 3g\cos\theta - 2g \right)$$

Q4. La bille reste en contact avec le support tant que $R > 0$ soit

$$m \left(\frac{v_0^2}{R} + 3g\cos\theta - 2g \right) > 0$$

$$\frac{v_0^2}{R} > 2g - 3g\cos\theta$$

$$v_0 > \sqrt{Rg(2 - 3\cos\theta)}$$

or $\sqrt{Rg(2 - 3\cos\theta)}$ est maximale pour $\theta = \pi$

et alors

$$v_{\lim} = \sqrt{5Rg}$$

Or on a montré à la question Q1 que
 $v_0 = \sqrt{2gh}$.

Il faut donc $\sqrt{2gh_{\min}} = \sqrt{5Rg}$

soit

$$h_{\min} = \frac{5}{2}R$$

AN: $h_{\min} = 75 \text{ cm}$

Q5. La bille décolle du support et tombe pour θ_d tel que $R(\theta_d) = 0$

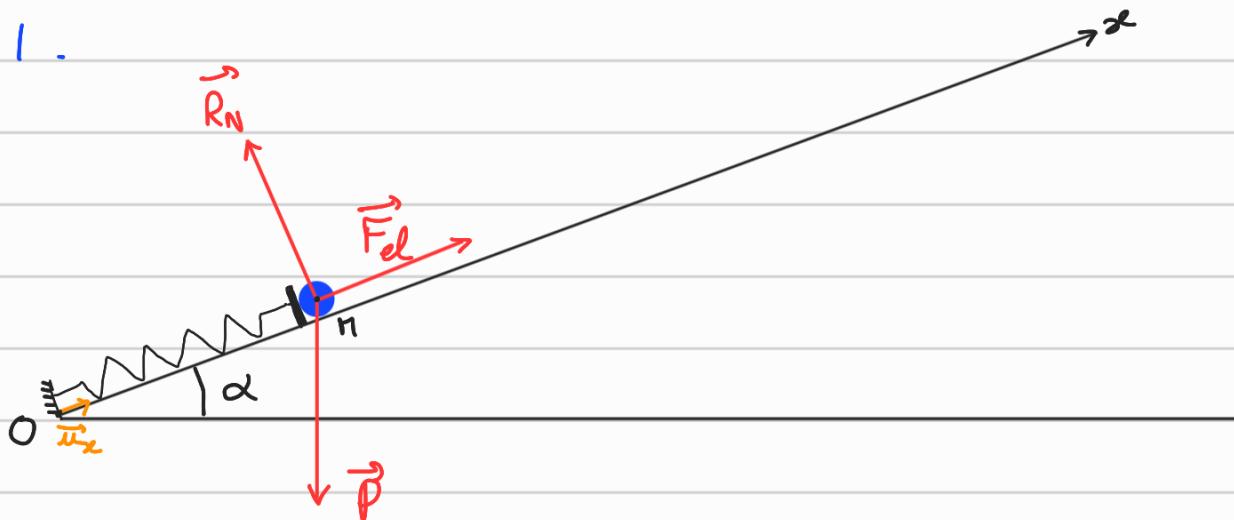
$$\text{Soit } 0 = m \left(\frac{v_0^2}{R} + 3g \cos \theta_d - 2g \right)$$

$$3g \cos \theta_d = 2g - \frac{v_0^2}{R}$$

$$\cos \theta_d = \frac{2}{3} - \frac{\frac{v_0^2}{R}}{3g}$$

Exercice 6 :

Q1.



On étudie le système {bille} modélisé par le point matériel n dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

- * poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- * réaction du support : \vec{R}_N
- * force de rappel élastique : $\vec{F}_{el} = -k(l-l_0)\vec{u}_x$
avec l = longueur du ressort à l'instant t .
L'origine du repère étant à l'extrémité du ressort $l(t) = x \Rightarrow \vec{F}_{el} = -k(x-l_0)\vec{u}_x$

* Energie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = mgh + K \quad \text{avec } h = l \sin \alpha = x \sin \alpha \quad \text{et } K = \text{cte.}$$

$$E_{pp} = mgx \sin \alpha + K$$

$$\text{or } E_{pp}(x=0) = 0$$

$E_{pp} = mgx \sin \alpha$

* Energie potentielle élastique :
 $E_{pel} = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 + k'$ avec $k' = \text{cte}$

or $E_{pp}(x=l_0) = 0 \Rightarrow k'=0$

$E_{pel} = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$

valable pour $x < l_0$.

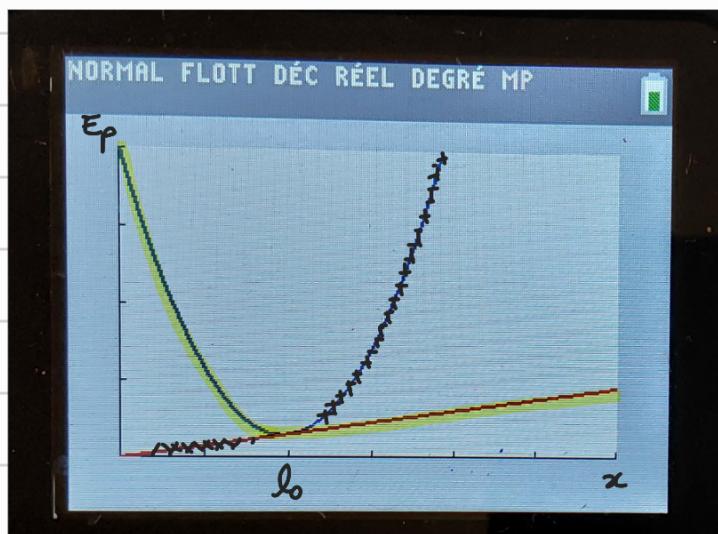
Q2. $E_p(M) = E_{pp} + E_{pel}$

* pour $x < l_0$ $E_p(n) = mgx\sin\delta + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$

AN : $E_p(n) = 0,150 \times 9,81 \times x \times \sin(6) + 1/2 \cdot 40 (x - 0,10)^2$
 $= 0,154 \cdot x + 20x^2 + 0,2 - 4x$
 $= 20x^2 - 3,846 x + 0,2$

* pour $x > l_0$ $E_p(n) = mgx\sin\delta$.

AN : $E_p(n) = 0,150 \times 9,81 \times x \times \sin 6$
 $= 0,154 x$.



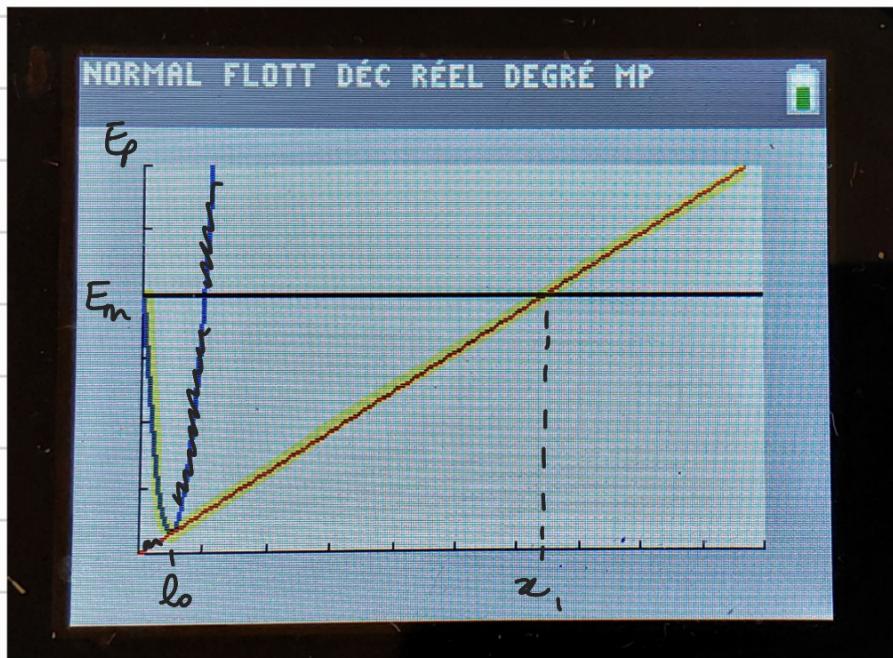
$\lim_{x \rightarrow +\infty} E_p = +\infty$ donc il n'existe pas d'énergie mécanique telle que $E_m > E_{pp}$ pour $x \rightarrow +\infty$. \Rightarrow pas d'état libre possible

A l'état initial :

- * $E_{pp} = 0$ (ressort comprimé au maximum et on considère $x=0$)
- * $E_{pel} = \frac{1}{2} k l_0^2$
- * $E_c = 0$ (bille lâchée sans vitesse initiale)

$$\text{donc } E_m(0) = \frac{1}{2} k l_0^2.$$

$$\text{AN : } E_m(0) = 0,5 \cdot 40 \cdot 0,10^2 = 0,2 \text{ J}$$



E_m est constante car la bille est soumise à 2 forces conservatives (\vec{P} et \vec{F}_d) et une force qui ne travaille pas.

Point de vitesse nulle : $x = 0$

$$x = x_1 \text{ pour } E_m = E_p$$

Point de vitesse maximale : $x = l_0$ pour E_p minimale

Q3. La bille quitte le ressort pour $x = l_0$.

On a alors $E_p = mg l_0 \sin d$

D'où $E_c = \frac{1}{2} k l_0^2 - mg l_0 \sin d$

Soit $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k l_0^2 - mg l_0 \sin d$

$$v_0^2 = \frac{k}{m} l_0^2 - 2 g l_0 \sin d$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m} l_0^2 - 2 g l_0 \sin d}$$

AN : $v_0 = \sqrt{\frac{40 \times 0,1^2 - 2,98 \cdot 9,8 \cdot 0,1 \sin 6}{9,8150}} = 1,6 \text{ m.s}^{-1}$

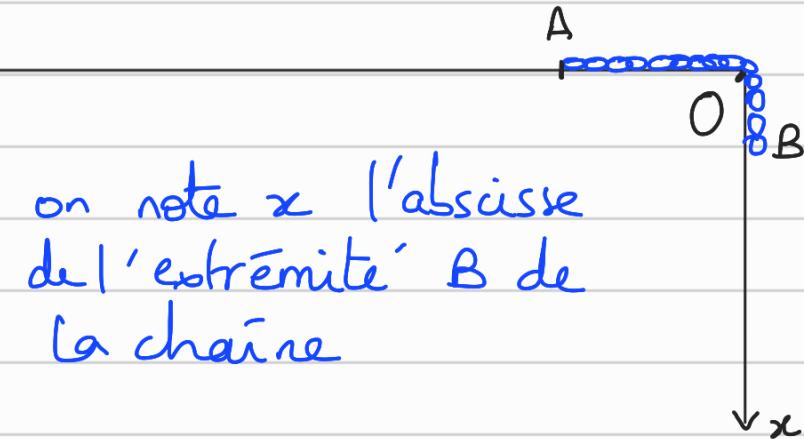
Q4. La distance maximale atteinte (x_1) par la bille est telle que :

$$E_m = mg x_1 \sin d$$

$$x_1 = \frac{k l_0^2}{2mg \sin d}$$

AN : $x_1 = \frac{40 \cdot 0,1^2}{2 \cdot 9,8150 \cdot 9,8 \sin 6} = 1,3 \text{ m.}$

Exercice 7 :



on note x l'abscisse de l'extrémité B de la chaîne

Bilan des forces:

- * $\vec{P} = m\vec{g}$
- * \vec{R}_N sur la partie horizontale

Q1. Cette chaîne subit une force conservative et une force qui ne travaille pas ($\vec{R}_N \perp$ déplacement).

Donc $E_n = \text{cte.}$

$$* E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{avec } m = \lambda L \quad \text{et } v = \dot{x}$$

$$\text{soit } E_c = \frac{1}{2}\lambda L \dot{x}^2$$

$$* E_{pp} = -m'gh' + E_p(0)$$

avec $E_p(0)$ = énergie potentielle lorsque toute la chaîne est posée sur la table.

et $m' = \text{masse de la partie verticale de la chaîne}$ $m' = x \cdot \lambda$

h' = centre de masse de la partie verticale de la chaîne : $h' = \frac{x}{2}$

$$\text{Soit } E_{pp} = -\lambda g x \cdot \frac{x}{2} + E_p(0)$$

$$E_{pp} = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{L} + E_p(0).$$

On a donc $\frac{1}{2} dL \ddot{x}^2 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{L} + E_p(0) = \text{cte.}$

Soit $dL \ddot{x} \ddot{x} - \frac{1}{2} g \dot{x} \dot{x} = 0$

$$\ddot{x} - \frac{g}{L} x = 0$$

Q2. Le PFD appliqué au système {chaîne} dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{P}' = 0$$

avec \vec{P} = poids de la partie horizontale de la chaîne : $\vec{P} = (m - m') \vec{g}$
 \vec{P}' = poids de la partie verticale de la chaîne : $\vec{P}' = m' \vec{g}$.

En projetant sur l'axe horizontal :
 $\vec{P} + \vec{R}_N = \vec{0}$

Il reste donc $m \ddot{x} = m' g$

Soit $dL \ddot{x} = d x g$

$$\ddot{x} - \frac{g}{L} x = 0$$

$$Q3. \quad \ddot{x} - \frac{g}{L} x = 0$$

$$\text{on pose } \omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

La solution de cette équation différentielle est $x(t) = A e^{\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t}$

(discriminant du polynôme caractéristique > 0)

On détermine les constantes avec les conditions initiales : à $t=0$ $x(0)=l_0$ et $\dot{x}(0)=0$

$$\begin{cases} l_0 = A + B \\ 0 = (A - B)\omega_0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{l_0}{2}$$

$$x = \frac{l_0}{2} \left(e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t} \right)$$

$$x = l_0 \cosh(\sqrt{\frac{g}{L}} t)$$

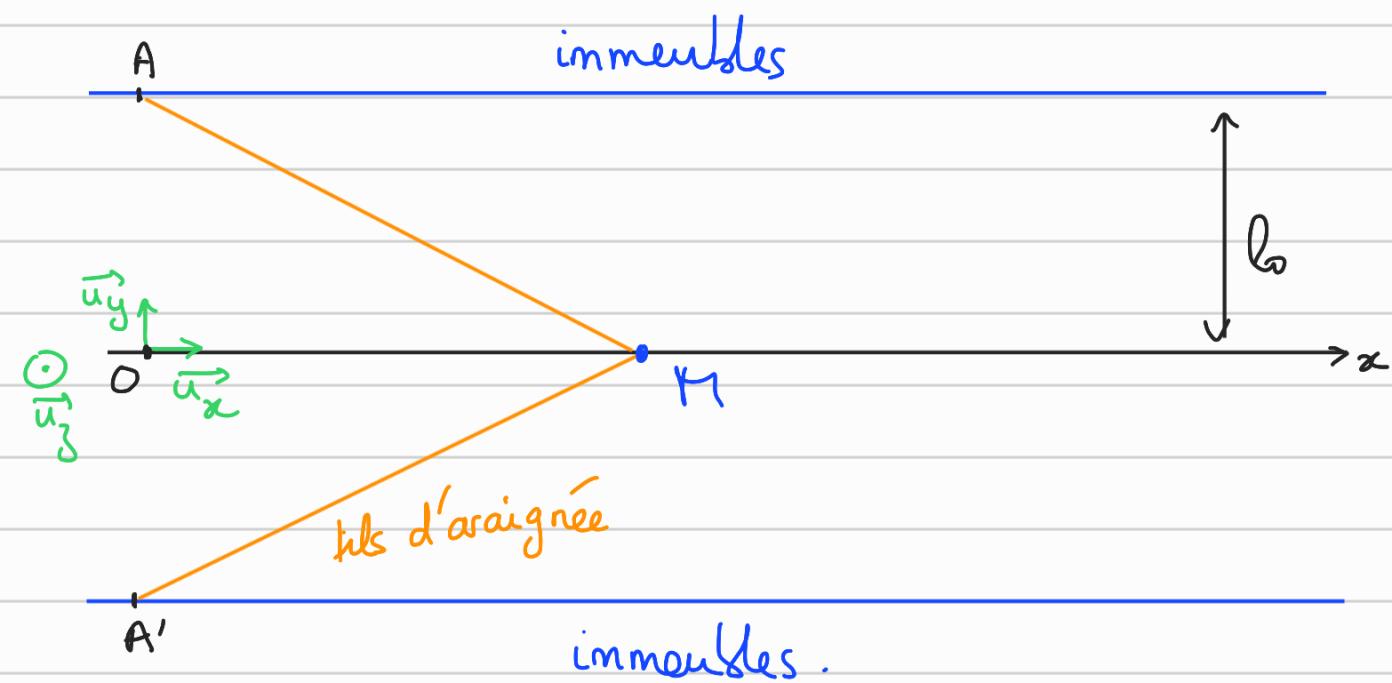
Exercice 8 :

- * Système étudié : {Spider-Man + rame} de masse $\underbrace{368 \cdot 10^3 \times 6}_{6 \text{ wagons}} + \underbrace{246 \times 6 \times 70}_{246 \text{ passagers par wagon}} = 3,2 \cdot 10^5 \text{ kg}$

- * L'étude est faite dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

- * Hypothèse : mouvement rectiligne et horizontal pendant la phase de freinage
- * Choix du système de coordonnées : cartésien, l'axe Ox dirigé suivant le mouvement du train, l'origine O étant positionnée à la position du train au début du freinage.

* Schéma :



Bilan des forces sur {Spider man + rame}

- * poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$
 \vec{P} ne travaille pas car cette force est perpendiculaire au déplacement pendant tout le trajet

- * réaction du support \vec{R}_n : les frottements sont négligés, la réaction est normale au support donc ne travaille pas.
- * La tension de chaque fil de soie d'araignée modélisée par une force de rappel élastique de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . Cette force est conservatrice. L'énergie potentielle pour les 2 fils s'écrit :

$$E_{pd} = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 \times 2$$

avec $l = \sqrt{l_0^2 + x^2}$ d'après le théorème de Pythagore

Soit $E_{pd} = k \left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0 \right)^2$

- * On applique le théorème de l'énergie mécanique au système {Spiderman + rame} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$\Delta E_m = \sum w(\vec{F}_{nc})$ or les forces non conservatives ici ne travaillent pas car elles sont orthogonales au déplacement.

Donc $\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow E_m = cte$

Soit $\frac{1}{2} m v^2 + k \left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0 \right)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$

$$\text{Donc } v^2 = \frac{2}{m} \left(\frac{mv_0^2}{2} - k \left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0 \right)^2 \right)$$

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2k}{m} \left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0 \right)^2$$

* Le train s'arrête en x_f lorsque $v=0$ soit

$$v_0^2 = \frac{2k}{m} \left(\sqrt{l_0^2 + x_f^2} - l_0 \right)^2$$

$$\sqrt{\frac{m}{2k}} v_0 = \sqrt{l_0^2 + x_f^2} - l_0$$

$$l_0^2 + x_f^2 = \left(l_0 + \sqrt{\frac{m}{2k}} v_0 \right)^2$$

$$x_f^2 = \left(l_0 + \sqrt{\frac{m}{2k}} v_0 \right)^2 - l_0^2$$

$$x_f = \sqrt{\left(l_0 + \sqrt{\frac{m}{2k}} v_0 \right)^2 - l_0^2} \quad (1)$$

\Rightarrow On utilisera x_f pour calculer F_{\max}
 car $F_{\max} = k \left(\sqrt{x_f^2 + l_0^2} - l_0 \right)$

$$F_{\max} = k \left(\sqrt{x_f^2 / \left(1 + \left(\frac{l_0}{x_f} \right)^2 \right)} - l_0 \right)$$

or étant donnée la vitesse initiale :

$v_0 = 80 \text{ mph}$ soit 128 km/h soit 36 m/s

et $l_0 \approx 10 \text{ m}$ (demi-largeur de la route)

On peut supposer que $x_f \gg l_0$ (il lui faut près d'une minute pour arrêter le train).

d'où une approximation pour F_{\max} :

$$F_{\max} \approx k(x_f - l_0) \approx kx_f.$$

* Il faut déterminer k . Pour cela on va utiliser le fait que le train met environ 1 minute pour s'arrêter, or $t_F = \int dt$.

$$\text{Avec } v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{m} (\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0)^2}$$

$$\text{Soit } dt = \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{m} (\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{m} (x \sqrt{1 + \frac{l_0^2}{x^2}} - l_0)^2}}$$

On utilise à nouveau l'hypothèse $x \gg l_0$

$$\text{Soit } dt = \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2k}{m} x^2}} = \frac{dx}{v_0 \sqrt{1 - \frac{2k x^2}{m v_0^2}}}$$

$$\text{Et } t_F = \frac{1}{v_0} \int_0^{x_F} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{2kx^2}{mv_0^2}}}$$

$$\text{or } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On effectue un changement de variable :

$$X = \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{x}{v_0}$$

$$dX = \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{dx}{v_0} \Rightarrow dx = v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}} dX$$

$$\text{et } t_F = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_0^{x_F} \frac{dx}{\sqrt{1-X^2}} = \sqrt{\frac{m}{2k}} [\arcsin X]_0^{x_F}$$

$$\text{avec } X_F = \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{x_F}{v_0}$$

$$t_F = \sqrt{\frac{m}{2k}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{x_F}{v_0} - \arcsin 0 \right)$$

$$\text{or d'après (1)} \quad x_F = \sqrt{\left(l_0 + \sqrt{\frac{m}{2k}} v_0\right)^2 - l_0^2}$$

Et avec l'hypothèse $x_F \gg b_0$ on a

$$x_F \approx \sqrt{\frac{m}{2k}} v_0$$

$$\text{d'où } t_F = \sqrt{\frac{m}{2k}} (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

Soit $\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{1}{t_F}$

$$k = \left(\frac{\pi}{2t_F} \right)^2 \times \frac{m}{2}$$

$$k = \frac{\pi^2 m}{8 t_F^2}$$

AN: $k = \frac{\pi^2 \cdot 32 \cdot 10^5}{8 \cdot 60^2} = 1,1 \cdot 10^2 \text{ N.m}^{-1}$

et $x_F = \sqrt{\frac{32 \cdot 10^5}{2 \cdot 1,1 \cdot 10^2}} \cdot 36 = 1,4 \cdot 10^3 \text{ m.}$

D'où $F_{\max} = 1,1 \cdot 10^2 \cdot 1,4 \cdot 10^3 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N}$