DM 3B

Q1. $R_o = R_{o,\ell} \cdot \Delta x$ | $C_m = 2\pi r . \Delta x . C_{m,s}$

$R_i = \dfrac{\rho_a \Delta x}{\pi r^2}$ | $R_m = \dfrac{1}{G_{ms} . 2\pi r \Delta x}$

Q2 a) $R_o = 3{,}5.10^{10} . 10^{-2} = 3{,}5.10^{8}\ \Omega$

$R_i = \dfrac{1.10^{-2}}{\pi . (3.10^{-6})^2} = 3{,}5.10^{8}\ \Omega$

$C_m = 2\pi . 3.10^{-6} . 10^{-2} . 1{,}0.10^{-2} = 1{,}9.10^{-9}\ F$

$R_m = \dfrac{1}{5 . 2\pi . 3.10^{-6} . 10^{-2}} = 1{,}1.10^{6}\ \Omega$

} axone non myélinisé

b) $R_o = 3{,}5.10^{8}\ \Omega$
$R_i = 3{,}5.10^{8}\ \Omega$
$C_m = 2\pi . 3.10^{-6} . 10^{-2}\ 6{,}0.10^{-5} = 1{,}1.10^{-11}\ F$
$R_m = \dfrac{1}{1{,}67.10^{-2} . 2\pi . 3.10^{-6} . 10^{-2}} = 3{,}2.10^{8}\ \Omega$

} axone myélinisé

Q3. a) $R_i = R_m$ lorsque $\dfrac{\rho_a . \lambda}{\pi r^2} = \dfrac{1}{G_{m,s}\, 2\pi r\, \lambda}$

Soit $\rho_a \lambda^2 . G_{m,s} = r$

$$\boxed{\lambda = \sqrt{\frac{r}{2\rho_a G_{m,s}}}}$$

b) * Pour un axone non myélinisé : $\lambda = \sqrt{\dfrac{3.10^{-6}}{2.1.5}}$

$\underline{\lambda_{sans} = 5,4.10^{-4}\ m}$

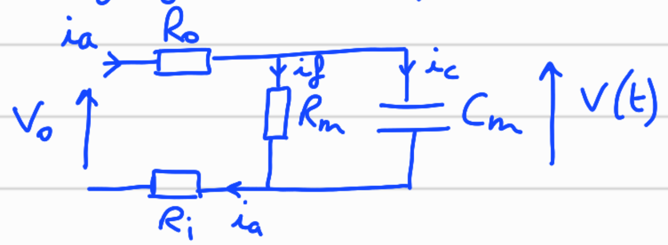
* Pour un axone myélinisé : $\lambda = \sqrt{\dfrac{3.10^{-6}}{2.1.1,67.10^{-2}}}$

$\underline{\lambda_{avec} = 9,5.10^{-3}\ m}$.

c) λ est une longueur caractéristique de l'axone.
* Pour $\Delta x < \lambda$ $R_i < R_m$ donc l'axone privillégie la transmission "série" le long de la fibre.
$\Rightarrow$ conduction électrique longitudinale.
* Pour $\Delta x > \lambda$ $R_i > R_m$ et l'axone privillégie la transmission "parallèle" entre le coeur et l'extérieur de la fibre.

On remarque que $\lambda_{sans} \ll \lambda_{avec}$, donc la présence de la gaine de myéline permet le transport du courant électrique sur une longueur plus grande.

Q4 a) En négligeant i, le circuit est :



On a donc $V_0 = V(t) + R_i i_a + R_0 i_a = V(t) + (R_0 + R_i) i_a$

avec $i_a = i_f + C\dfrac{dV}{dt}$ d'après la loi des noeuds et la relation courant tension du condensateur.

Soit $V_0 = V(t) + (R_0+R_i)\left(\frac{V(t)}{R_m} + C\frac{dV}{dt}\right)$

$$(R_0+R_i)C\,\frac{dV}{dt} + \left(1+\frac{R_0+R_i}{R_m}\right)V(t) = V_0$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{R_m+R_0+R_i}{R_m(R_0+R_i)C}\,V(t) = \frac{V_0}{(R_0+R_i)C}$$

forme canonique
$\Rightarrow$ avec $\tau = \frac{R_m(R_0+R_i)C}{R_m+R_0+R_i}$

On résout cette équation différentielle :

$$V_p = \frac{R_m V_0}{R_m+R_0+R_i}$$

$$V_H = Ae^{-t/\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{R_m(R_0+R_i)C}{R_m+R_0+R_i}$$

$$V(t) = \frac{R_m V_0}{R_m+R_0+R_i} + Ae^{-t/\tau}$$

On détermine la constante avec les conditions initiales : à $t=0$ le condensateur est déchargé donc $V(0)=0$

Soit $0 = \frac{R_m V_0}{R_m+R_0+R_i} + A \Rightarrow A = -\frac{R_m V_0}{R_m+R_0+R_i}$

donc $$\boxed{V(t) = \frac{R_m}{R_m+R_0+R_i}\,V_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$

b) Pour un axone sans myéline :

$$\tau_{sans} = \frac{1{,}1.10^6 \,.\, 2\,.\,3{,}5.10^8 \,.\, 1{,}9.10^{-9}}{1{,}1.10^6 + 2\,.\,3{,}5.10^8} = 2{,}1.10^{-3}\,s$$

$\underline{\tau_{sans} = 2,1 \text{ ms}}$

Pour un axone avec myéline :

$$\tau_{avec} = \frac{3,2.10^{8} \cdot 2.3,5.10^{8} \cdot 1,1.10^{-11}}{3,2.10^{8} + 2.3,5.10^{8}} = 2,4.10^{-3} s$$

$\underline{\tau_{avec} = 2,4 \text{ ms}}$

La présence de myéline a donc peu d'influence sur la constante de temps.

* Pour un axone sans myéline $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{V}{V_0} = \frac{1,1.10^{6}}{1,1.10^{6} + 2.3,5.10^{8}}$

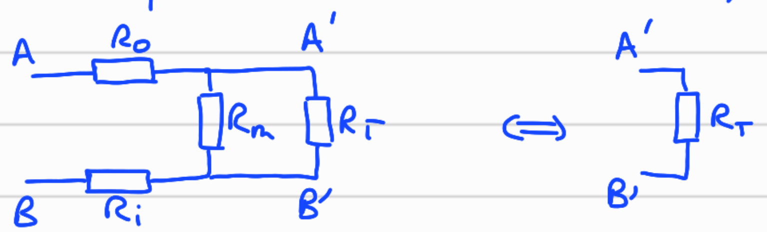
$$\lim_{t \to \infty} \frac{V}{V_0} = 1,6.10^{-3}$$

* Pour un axone avec myéline $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{V}{V_0} = \frac{3,2.10^{8}}{3,2.10^{8} + 2.3,5.10^{8}}$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{V}{V_0} = 0,31 .$$

La présence de myéline a donc une importance notable sur l'amplitude du signal transmis.

Q5. En considérant un axone de longueur très grande devant le tronçon infinitésimal AB→A'B' on peut écrire que la résistance "vue de AB" est la même que celle "vue de A'B'", et vaut R_T :



Déterminons la résistance équivalente dans le circuit de gauche :

$$R_{AB} = R_o + R_i + \frac{R_m R_T}{R_m + R_T} = 2R + \frac{R_T R_m}{R_T + R_m} \quad \text{avec } R_i = R_o = R$$

On a donc $\quad 2R + \dfrac{R_T R_m}{R_T + R_m} = R_T$

On résoud cette équation pour déterminer R_T :

$$\frac{2RR_T + 2RR_m + R_T R_m}{R_T + R_m} = R_T$$

$$2RR_T + 2RR_m + \cancel{R_T} R_m = \cancel{R_T} R_m + R_T^2$$

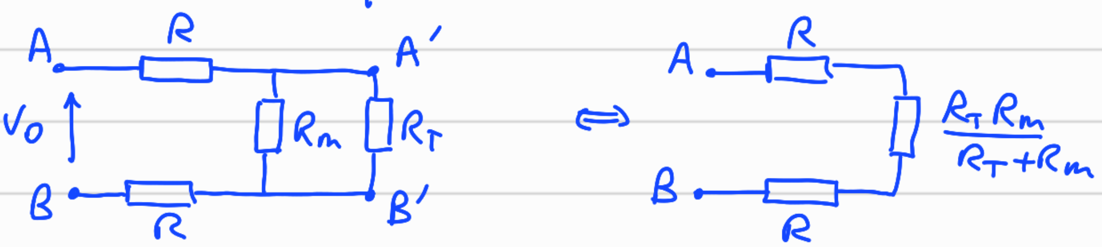
$$R_T^2 - 2RR_T - 2RR_m = 0$$

$\Delta = 4R^2 + 8RR_m \quad$ donc $\quad R_T = \dfrac{2R + \sqrt{4R^2 + 8RR_m}}{2}$

(seule racine positive)

Après simplification : $\quad \boxed{R_T = R + \sqrt{R^2 + 2RR_m}}$

Q6. a) On utilise un pont diviseur de tension après avoir déterminé la résistance équivalente à R_m et R_T en parallèle :



On obtient $u_{A'B'} = \dfrac{R_T R_m / R_T + R_m}{2R + R_T R_m / R_T + R_m} V_0$

On simplifie : $u_{A'B'} = \dfrac{V_0}{1 + \dfrac{2R(R_T + R_m)}{R_T R_m}}$

Que l'on peut écrire $u_{A'B'} = \dfrac{V_0}{1+\beta}$ avec $\boxed{\beta = \dfrac{2R(R_T+R_m)}{R_T R_m}}$

b) Après n cellules atténuatrices la tension vaut
$\boxed{u_n = \dfrac{V_0}{(1+\beta)^n}}$

Q7. a) $R_T = R + \sqrt{R^2 + 2RR_m}$

AN : $R_T = 3{,}5.10^5 + \sqrt{(3{,}5.10^5)^2 + 2.3{,}5.10^5.1{,}1.10^9}$

$\underline{R_T = 2{,}8.10^7\ \Omega}$.

et $\beta = \dfrac{2.3{,}5.10^5(2{,}8.10^7 + 1{,}1.10^9)}{1{,}1.10^9.2{,}8.10^7}$

$\underline{\beta = 2{,}6.10^{-2}}$.

b) Déterminons le nombre de cellules atténuatrices sur la longueur d : $n = \dfrac{d}{\Delta x}$

AN : $n = \dfrac{2.10^{-3}}{1.10^{-5}} = 200$.

On a donc $\frac{u}{V_0} = \frac{1}{(1+2{,}6.10^{-2})^{200}} = 6.10^{-3}$

Après 2mm la différence de potentiel ne vaut plus que $6.10^{-3}\ V_0$ donc une fibre non myélinisée ne peut pas transmettre l'information sur une distance de l'ordre du mètre.

Q8 a) Avec les données de l'axone myélinisé on détermine R_T :

$$R_T = 3{,}5.10^5 + \sqrt{(3{,}5.10^5)^2 + 2.3{,}5.10^5.3{,}2.10^{11}}$$

$$\underline{R_T = 4{,}7.10^8\ \Omega}$$

et $\beta = \frac{2.3{,}5.10^5\,(4{,}7.10^8 + 3{,}2.10^{11})}{4{,}7.10^8.3{,}2.10^{11}}$ $\qquad \beta = \frac{2R(R_T+R_m)}{R_T R_m}$

$$\underline{\beta = 1{,}5.10^{-3}}$$

Après 1 tronçon de 2mm (200 cellules atténuatrices) :

$$u = V_0 \times \frac{1}{(1+1{,}5.10^{-3})^{200}} = 0{,}74.$$

le signal a donc une amplitude non négligeable, qui peut déclencher une nouvelle impulsion V_0.

b) l'expression de la constante de temps ayant été déterminée précédemment, on peut calculer τ :

$$\tau = \frac{R_m(R_o+R_i)C}{R_m+R_o+R_i} = \frac{2RR_mC}{2R+R_m} \quad \text{avec } R_i = R_o = R.$$

soit $\tau = \dfrac{R_m(2R.C)}{R_m\left(1+\frac{2R}{R_m}\right)} = \dfrac{2RC}{1+\frac{2R}{R_m}}$

or $R \ll R_m$ donc on peut simplifier l'expression : $\tau \approx 2RC$

Avec les formules établies à la question 1, pour une longueur Δx, on a :

$R = \dfrac{\rho_a . \Delta x}{\pi r^2}$ et $C = 2\pi r \Delta x C_{m,s}$ soit $\tau = \dfrac{4\rho_a \Delta x^2 C_{m,s}}{r}$

On détermine la vitesse du signal : $v = \dfrac{\text{distance}}{\text{durée du trajet}}$

Ici d'après l'énoncé, la distance parcourue pendant la durée τ est la distance internodale x, soit : $v = \dfrac{x}{\tau}$

En remplaçant, on obtient $\boxed{v = \dfrac{xr}{4\rho_a C_{m,s} \Delta x^2}}$

c) La durée du trajet pied - cerveau est

$\Delta t = \dfrac{h}{v} = \dfrac{4\rho_a C_{m,s} \Delta x^2 . h}{xr}$

AN : $\Delta t = \dfrac{4.1.6.10^{-5}.(10^{-5})^2. 1,2}{2.10^{-3}. 3.10^{-6}} = 4,8.10^{-6}\ s$

$\underline{\Delta t = 4,8\ \mu s}$

Q9 a) En considérant le caractère capacitif de la membrane on a $Q = CU$

Pour 1 m d'axone $C = 2\pi r C_{m,s}$

D'après l'énoncé $U = 100$ mV.

Et 1 ion sodium transporte la charge $e = 1{,}6.10^{-19}$ C

Donc pour N ions, on a $Ne = 2\pi r C_{m,s} . U$

Soit $\boxed{N = \dfrac{2\pi r C_{m,s} U}{e}}$

AN : $N = \dfrac{2\pi . 3.10^{-6} . 10^{-2} . 10^{-1}}{1{,}6.10^{-19}}$

$\underline{N = 1{,}2 . 10^{11} \text{ ions}}$

b) L'énergie requise vaut $E = \frac{1}{2} C U^2$

avec $C = 2\pi r l C_{m,s}$

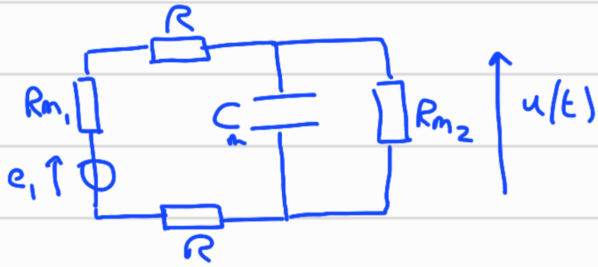
$E = \pi r l C_{m,s} . U^2$

AN pour un axone myélinisé :

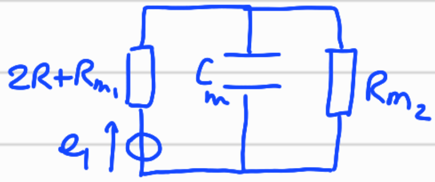
$E = \pi . 3.10^{-6} . 1{,}2 . 6.10^{-5} . 0{,}1^2$

$\underline{E = 6 . 10^{-12} \text{ J}}$

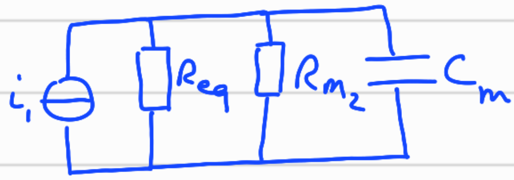
Q 10. Phase d'excitation :



On réalise une succession de transformations Thevenin - Norton :



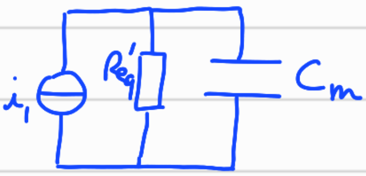
$\Leftrightarrow$



avec $i_1 = \dfrac{e_1}{2R+R_{m_1}}$

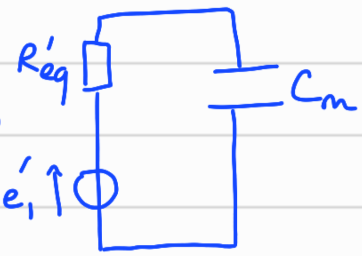
et $R_{eq} = 2R + R_{m_1}$

$\Leftrightarrow$



avec $R'_{eq} = \dfrac{R_{m_2} R_{eq}}{R_{m_2} + R_{eq}} = \dfrac{R_{m_2}(2R+R_{m_1})}{2R+R_{m_1}+R_{m_2}}$

$\Leftrightarrow$



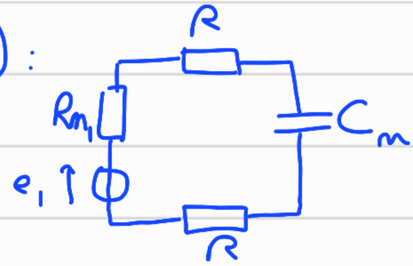
avec $e'_1 = R'_{eq} \cdot i_1 = \dfrac{R_{m_2}(2R+R_{m_1})}{2R+R_{m_1}+R_{m_2}} \; \dfrac{e_1}{2R+R_{m_1}}$

soit $e'_1 = \dfrac{e_1 R_{m_2}}{2R+R_{m_1}+R_{m_2}}$

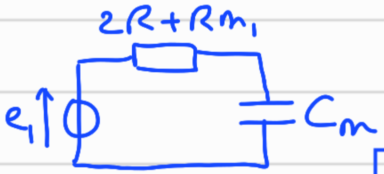
La constante de temps de ce circuit vaut

$$\boxed{\tau_{exc} = R'_{eq} \cdot C_m = \frac{R_{m_2}(2R+R_{m_1})}{2R+R_{m_1}+R_{m_2}} \, C_m}$$

* Phase de désexcitation (repos) :



En faisant une résistance équivalente :



La constante de de temps vaut :

$$\boxed{\tau_{des.} = (2R+Rm_1)C_m}$$

D'après l'énoncé, on sait que $\tau_{exc} = 2ms$ et $\tau_{des} = 10ms$

On a donc $\frac{\tau_{des}}{\tau_{exc}} = 5 = \frac{2R+Rm_1}{Rm_2(2R+Rm_1)} \cdot (2R+Rm_2+Rm_1)$

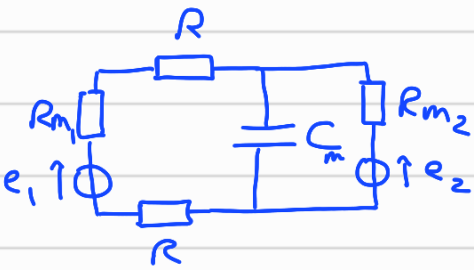
Soit $\frac{2R+Rm_2+Rm_1}{Rm_2} = 5$

Or $\frac{e_1}{e_1'} = \frac{e_1}{Rm_2 \cdot e_1} \cdot (2R+Rm_2+Rm_1) = \frac{2R+Rm_1+Rm_2}{Rm_2}$

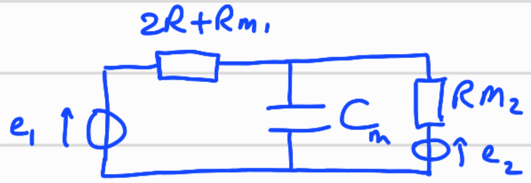
On a donc $\frac{e_1}{e_1'} = 5 \Rightarrow \boxed{e_1' = \frac{e_1}{5}}$

AN : $e_1' = \frac{70}{5} = \underline{14\,mV}$

* Phase d'inhibition :



Avec des transformations successives, on obtient :



avec $i_1' = \dfrac{e_1}{2R+Rm_1}$ et $i_2 = \dfrac{e_2}{Rm_2}$

On regroupe les résistances et les générateurs :

avec $i'_{eq} = i_1 + i_2 = \dfrac{e_1}{2R+Rm_1} + \dfrac{e_2}{Rm_2}$

et $R'_{eq} = \dfrac{Rm_2 . (2R+Rm_1)}{Rm_2 + 2R + Rm_1}$

Et enfin :

avec $e' = i'_{eq} . R'_{eq}$

$$e' = \left(\frac{e_1}{2R+Rm_1} + \frac{e_2}{Rm_2}\right) \frac{Rm_2 (2R+Rm_1)}{Rm_2 + 2R + Rm_1}$$

$$e' = \frac{e_1 . Rm_2}{2R+Rm_1+Rm_2} + \frac{e_2 (2R+Rm_1)}{2R+Rm_1+Rm_2} = e_1 \frac{Rm_2}{2R+Rm_1+Rm_2} + e_2 \left(1 - \frac{Rm_2}{2R+Rm_1+Rm_2}\right)$$

$$e' = \frac{e_1}{5} + e_2\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$\boxed{e' = \frac{e_1}{5} + \frac{4e_2}{5}}$$

AN : $e' = \dfrac{70}{5} + \dfrac{4.80}{5} = \underline{78 \text{ mV}}$

(et $\tau_{inh.} = R'_{eq} . C_m = \tau_{exc.}$)

Q11. $\boxed{u(t) = V_{ext} - V_n(t)}$

Soit $u(t) = 20 - V_n(t)$ en mV

Q12 a) Pendant la phase d'excitation :

$u(t) = A e^{-t/\tau_{exc}} + e_1'$

Si le neurone était initialement au repos $u(0) = e_1$

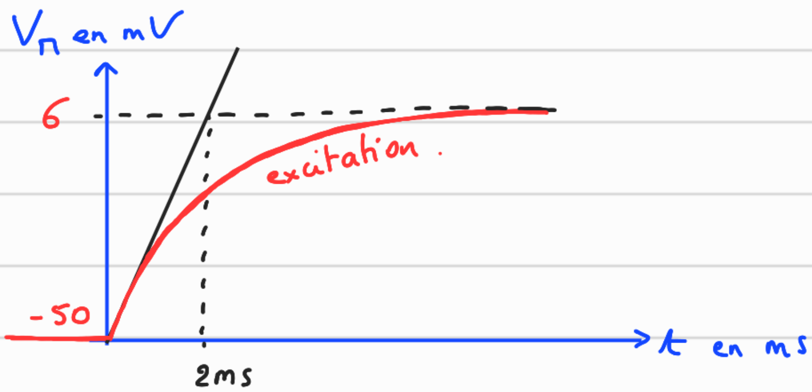
d'où $A = e_1 - e_1'$

soit $A = 70 - 14 = 56$ mV.

$\boxed{u(t) = 14 + 56 e^{-t/2} \quad \text{avec } t \text{ en ms.}}$

b) D'où $V_n(t) = 20 - 14 - 56 e^{-t/2}$

$\boxed{V_n(t) = 6 - 56 e^{-t/2} \quad \text{avec } t \text{ en ms}}$



Q13. Au cours d'une inhibition : $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{\tau_{inh.}} = \dfrac{e'}{\tau_{inh}}$

Dont la solution générale est $u(t) = B e^{-t/\tau_{inh.}} + e'$

Numériquement : $u(t) = B e^{-t/2} + 78$

Q14. Initialement le neurone est au repos donc $u(0) = e_1$

Soit $B + e' = e_1$

$\Leftrightarrow B = e_1 - e'$

AN : $B = 70 - 78 = -8$ mV.

$$\boxed{u(t) = 78 - 8e^{-t/2} \quad \text{en mV}}$$

On détermine ensuite $V_n(t) = 20 - 78 - 8e^{-t/2}$

Soit $V_n(t) = -58 - 8e^{-t/2}$

A $t = 5$ ms $\begin{cases} u(5) = 78 - 8e^{-2,5} = 77,3 \text{ mV} \\ V_n(5) = -58 - 8e^{-2,5} = -58,7 \text{ mV} \end{cases}$

La désexcitation commence ensuite : $u(t) = Ce^{-t/\tau_{des}} + e_1$

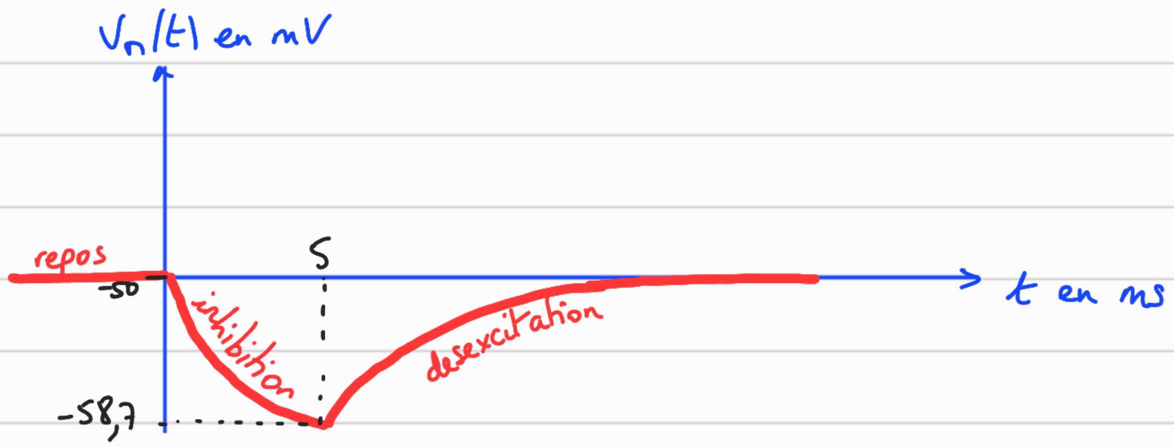
avec à $t = 5$ ms $u(5) = 77,3$ mV

donc $77,3 = Ce^{-5/10} + 70$

$C = \dfrac{77,3 - 70}{e^{-0,5}} = 12$ mV

$$\boxed{u(t) = 12e^{-t/10} + 70 \quad \text{en mV avec } t \text{ en ms}}$$

et $\boxed{V_n(t) = -50 + 12e^{-t/10} \quad \text{en mV avec } t \text{ en ms}}$



Q15. Pour un neurone initialement excité : $u(0) = e_1'$

On reprend la même résolution qu'à la question Q14 :

$B' + e' = e_1'$

$B' = e_1' - e'$ (et $V_n(0) = 6\,mV$)

AN : $B' = 14 - 78 = -64\ mV$

$u(t) = 78 - 64\,e^{-t/2}$ et $V_n(t) = -58 + 64\,e^{-t/2}$

A $t = 5\,ms$ $u(5) = 78 - 64\,e^{-2,5} = 72,7\ mV$

et $V_n(5) = -52,7\ mV$

La désexcitation commence alors $u(t) = c'e^{-t/\tau_{des}} + e_1$

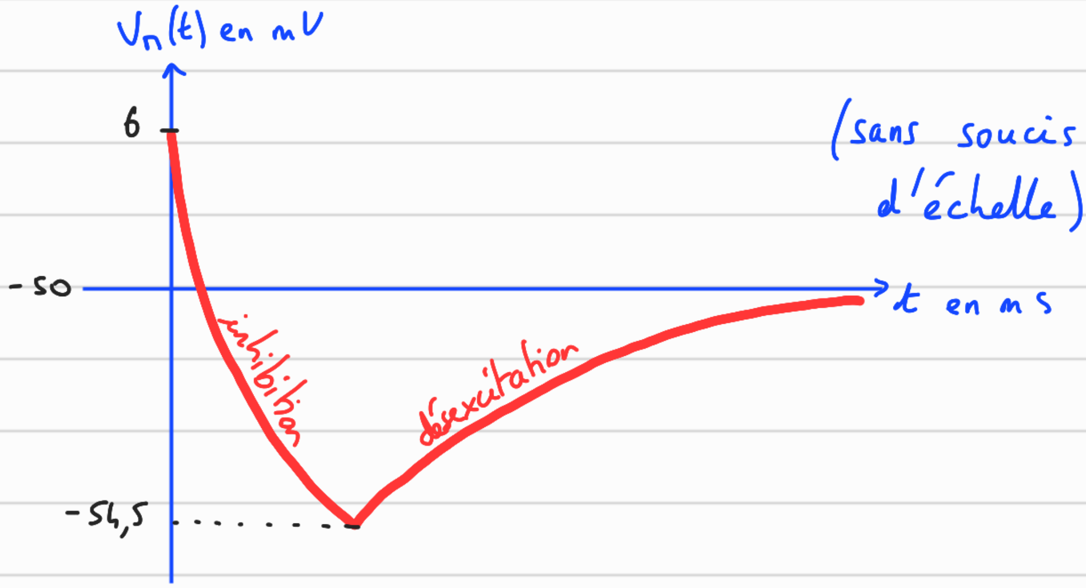
avec la condition initiale $u(5) = 72,7\ mV$.

$72,7 = c'e^{-5/10} + 70$

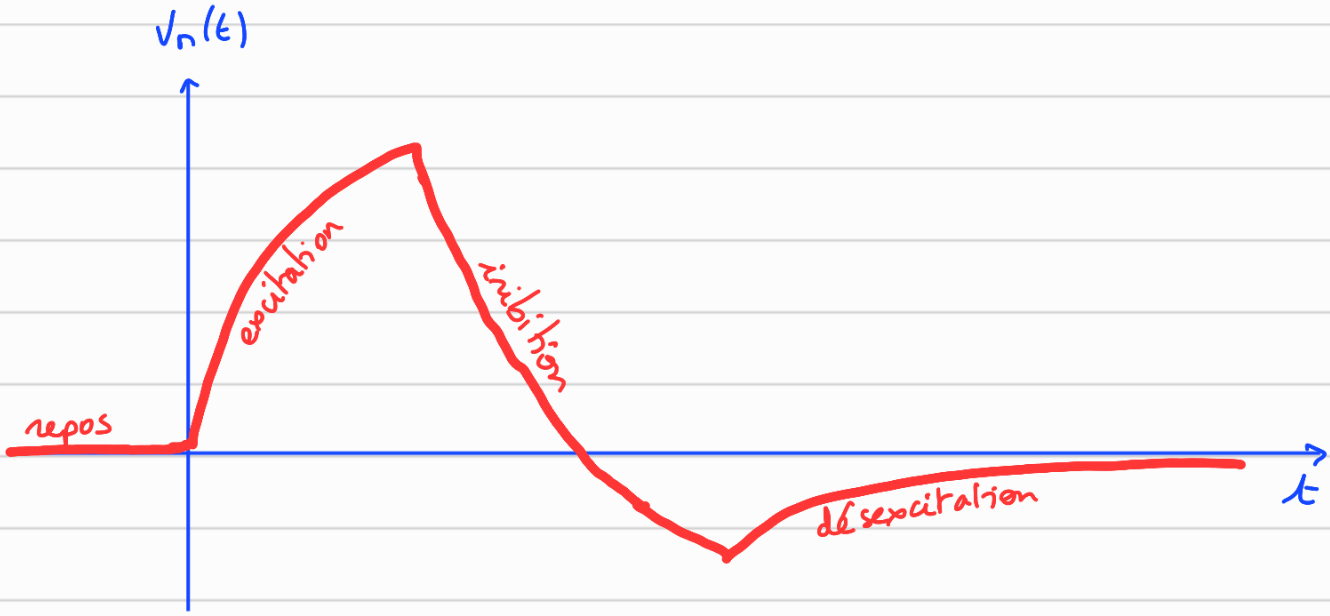
$c' = \dfrac{2,7}{e^{-0,5}} = 4,5\ mV$

soit $\boxed{u(t) = 70 + 4,5\,e^{-t/10} \text{ en } mV \text{ avec } t \text{ en } ms}$

et $\boxed{V_n(t) = -50 - 4,5\,e^{-t/10} \text{ en } mV \text{ avec } t \text{ en } ms}$



Rq : Pour un cycle excitation - inhibition - désexcitation, on a l'évolution suivante pour le potentiel de membrane


$V_n(t)$
repos
excitation
inibition
désexcitation
t