Correction DM n°4

Exercice 1 :

Q1. On étudie le mouvement de l'électron dans le référentiel du proton supposé galiléen.
Bilan des forces sur l'électron : force de rappel élastique (poids négligé).
La 2ème loi de Newton appliquée à l'électron donne :

$$m\vec{a} = -m\omega_0^2 \overrightarrow{OM}$$

avec $\vec{a} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

Soit $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} + \omega_0^2 \overrightarrow{OM} = \vec{0}$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0.

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \end{cases}$$

D'après l'énoncé $z = cte = 0$

On a donc $\begin{cases} x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ y = B\cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$

A $t=0$ l'électron est en $x=R$ et $y=0$ avec une vitesse $v_0 \vec{u_y}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} R = A\cos\varphi_1 \\ 0 = B\cos\varphi_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 = -A\omega_0 \sin\varphi_1 \\ v_0 = -B\omega_0 \sin\varphi_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{0}{R} = -\omega_0 \tan\varphi_1 \quad \Rightarrow \varphi_1 = 0$$

$$\frac{0}{v_0} = -\frac{1}{\omega_0 \tan\varphi_2} \quad \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$B = -\frac{v_0}{\omega_0}$$

$$x = R\cos(\omega_0 t)$$

$$y = -\frac{v_0}{\omega_0}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

$$\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{v_0/\omega_0}\right)^2 = 1$$

D'où une trajectoire elliptique d'équation

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ avec a et b les $\frac{1}{2}$ axes de l'ellipse : $\begin{cases} a = R \\ b = \frac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$

Q2. En présence du champ magnétique, le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron dans le référentiel du proton supposé galiléen donne :

$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -m\omega_0^2\,\overrightarrow{OM} - e\vec{v}\wedge\vec{B}$$

avec $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}$

et $\vec{B} = B\vec{e_z}$

On a donc $\vec{v}\wedge\vec{B} = \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ 0\\ B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{y}B\\ -\dot{x}B\\ 0\end{pmatrix}$

$$\begin{matrix}\dot{x} & 0\\ \dot{y} & 0\end{matrix}$$

En projetant l'équation dans le repère cartésien, on a donc :

$$\begin{pmatrix}m\ddot{x}\\ m\ddot{y}\\ m\ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-m\omega_0^2 x\\ -m\omega_0^2 y\\ -m\omega_0^2 z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-e\dot{y}B\\ e\dot{x}B\\ 0\end{pmatrix}$$

l'équation dans la direction (Oz) est celle du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 :

$$z(t) = Z_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Avec les conditions initiales choisies précédemment $\begin{cases} 0 = Z_0\cos\varphi_0\\ 0 = -Z_0\,\omega_0\sin\varphi_0\end{cases}$

Q3 Avec $x(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{X}\, e^{j\omega t}\right)$ et $y(t) = \mathrm{Re}\left(\underline{Y}\, e^{j\omega t}\right)$

Or on a :
$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x - \dfrac{eB}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y + \dfrac{eB}{m}\dot{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{X}(j\omega)^2 e^{j\omega t} = -\omega_0^2 \underline{X}\, e^{j\omega t} - \dfrac{eB}{m}\underline{Y}(j\omega)e^{j\omega t} \\ \underline{Y}(j\omega)^2 e^{j\omega t} = -\omega_0^2 \underline{Y}\, e^{j\omega t} + \dfrac{eB}{m}\underline{X}(j\omega)e^{j\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\omega^2 \underline{X} = -\omega_0^2 \underline{X} - j\dfrac{eB}{m}\omega\, \underline{Y} \\ -\omega^2 \underline{Y} = -\omega_0^2 \underline{Y} + j\dfrac{eB}{m}\omega\, \underline{X} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2)\underline{X} + \left(-j\dfrac{eB\omega}{m}\right)\underline{Y} = 0 \\ j\dfrac{eB}{m}\omega\, \underline{X} + (\omega^2 - \omega_0^2)\underline{Y} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ système linéaire et homogène

Le système $(\underline{X}, \underline{Y})$ admet la solution $(0,0)$ mais elle correspond à l'état de repos.

Ce système admet une solution non nulle seulement si le déterminant est nul :

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \left(j\frac{eB}{m}\right)\left(-j\frac{eB}{m}\right)\omega^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 = \left(\frac{eB\omega}{m}\right)^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm \frac{eB}{m}\omega$$

On obtient 2 équations du second degré :

$$\omega^2 - \frac{eB}{m}\omega - \omega_0^2 = 0$$

et $\omega^2 + \frac{eB}{m}\omega - \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \left(\frac{eB}{m}\right)^2 + 4\omega_0^2 = (2\omega_0)^2\left(1 + \left(\frac{eB}{2m\omega_0}\right)^2\right)$$

or $\frac{eB}{m} \ll \omega_0 \Rightarrow \left(\frac{eB}{2m\omega_0}\right)^2 \ll 1$

D'où $\Delta \approx (2\omega_0)^2$

Les solutions positives sont :

$$\omega_1 = \frac{eB/m + 2\omega_0}{2} = \omega_0 + \frac{eB}{2m}$$

$$\omega_2 = \frac{-eB/m + 2\omega_0}{2} = \omega_0 - \frac{eB}{2m}$$

Q4. En présence d'un champ magnétique, les fréquences propres de l'électron, ainsi que les niveaux d'absorption de l'atome sont légèrement modifiés, c'est l'effet Zeeman.

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 + \dfrac{eB}{2m} = \omega_0 + \omega_c \\ \omega_2 = \omega_0 - \dfrac{eB}{2m} = \omega_0 - \omega_c \end{cases} \quad \text{avec } \omega_c = \frac{eB}{2m}$$

Remarque :

d'après le système :

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2)\underline{X} + \left(-j\dfrac{eB\omega}{m}\right)\underline{Y} = 0 \\ j\dfrac{eB}{m}\omega \underline{X} + (\omega^2 - \omega_0^2)\underline{Y} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{Y} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{j\dfrac{eB\omega}{m}} \underline{X} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{j \cdot 2\omega_c \omega} \underline{X}$$

on peut noter $\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 + \omega_c \\ \omega_2 = \omega_0 - \omega_c \end{cases}$

et alors $\underline{Y} = \dfrac{2\omega_0\omega_c}{2j\omega \cdot \omega_c} \underline{X} \Rightarrow \underline{Y} = -j\underline{X}$

pour ω_1

et $\underline{Y} = \dfrac{-2\omega_0\omega_c}{2j\omega\omega_c}\underline{X} \Rightarrow \underline{Y} = j\underline{X}$ pour $\omega=\omega_2$

En choisissant l'origine des temps telle que $\underline{X}$ soit réel $(=X)$:

$$\begin{cases} x(t) = Re\left(\underline{X}\, e^{j\omega_1 t}\right) = X\cos(\omega_1 t) \\ y(t) = Re\left(-j\underline{X}\, e^{j\omega_1 t}\right) = X\sin(\omega_1 t) \end{cases}$$ pour ω_1

$\Rightarrow$ mouvement de rotation dans le sens trigonométrique, à la pulsation ω_1

$$\begin{cases} x(t) = Re\left(\underline{X}\, e^{j\omega_2 t}\right) = X\cos(\omega_2 t) \\ y(t) = Re\left(j\underline{X}\, e^{j\omega_2 t}\right) = -X\sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ mouvement de rotation dans le sens horaire, à la pulsation ω_2

Exercice 2 :

Q1. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la particule P est soumise à la force magnétique : $\vec{F_m} = q\vec{v} \times \vec{B}$

On projette dans la base cartésienne et on calcule le produit vectoriel $q\vec{v} \times \vec{B}$:

$$\begin{pmatrix} q\dot{x} \\ q\dot{y} \\ q\dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\dot{y}B \\ -q\dot{x}B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} q\dot{x} & \quad & 0 \\ q\dot{y} & \quad & 0 \end{matrix}$$

D'après le principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$

Soit
$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega\dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Q2. $\ddot{z} = 0 \Leftrightarrow \dot{z} = cte = \dot{z}(0) = 0$ car $\vec{v_0} = v_0 \vec{e_y}$

et $z = cte = 0$ car à $t=0$ la particule est à l'origine du repère donc le mouvement est contenu dans le plan (xOy).

les 2 autres équations sont couplées

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega \dot{x} \end{cases}$$

On intègre la 1ère équation : $\dot{x} = \omega y + cte$

Or $\dot{x}(0) = 0$ et $y(0) = 0$

On a donc $0 = \omega \times 0 + cte \Rightarrow cte = 0$

Soit $\dot{x} = \omega y$ que l'on réinjecte dans la 2ème équation :

$$\ddot{y} = -\omega^2 y \Leftrightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

c'est l'équation de l'O.H, dont la solution est $y = A\cos(\omega t) + B\sin\omega t$

avec A et B 2 constantes que l'on détermine avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = v_0$

$$\begin{cases} 0 = A\cos 0 + B\sin 0 \\ v_0 = -A\omega\sin 0 + B\omega\cos 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

Soit $y = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Et on détermine x avec l'équation $\ddot{y} = -\omega \dot{x}$

$-v_0 \omega \sin \omega t = -\omega \dot{x}$

$\Rightarrow \quad \dot{x} = v_0 \sin(\omega t) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) + C$

avec C = constante or $x(0) = 0$ donc

$0 = -\frac{v_0}{\omega} \cos 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{v_0}{\omega}$

$x(t) = -\frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\omega} \left(1 - \cos(\omega t)\right)$

les équations horaires sont donc :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega} \left(1 - \cos(\omega t)\right) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

On obtient l'équation de la trajectoire en combinant $x(t)$ et $y(t)$:

$$\boxed{\left(x(t) - \frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y^2(t) = \frac{v_0^{\,2}}{\omega^2}}$$

ce qui est l'équation d'un cercle de centre $\Omega\left(\frac{v_0}{\omega}, 0, 0\right)$ et de rayon

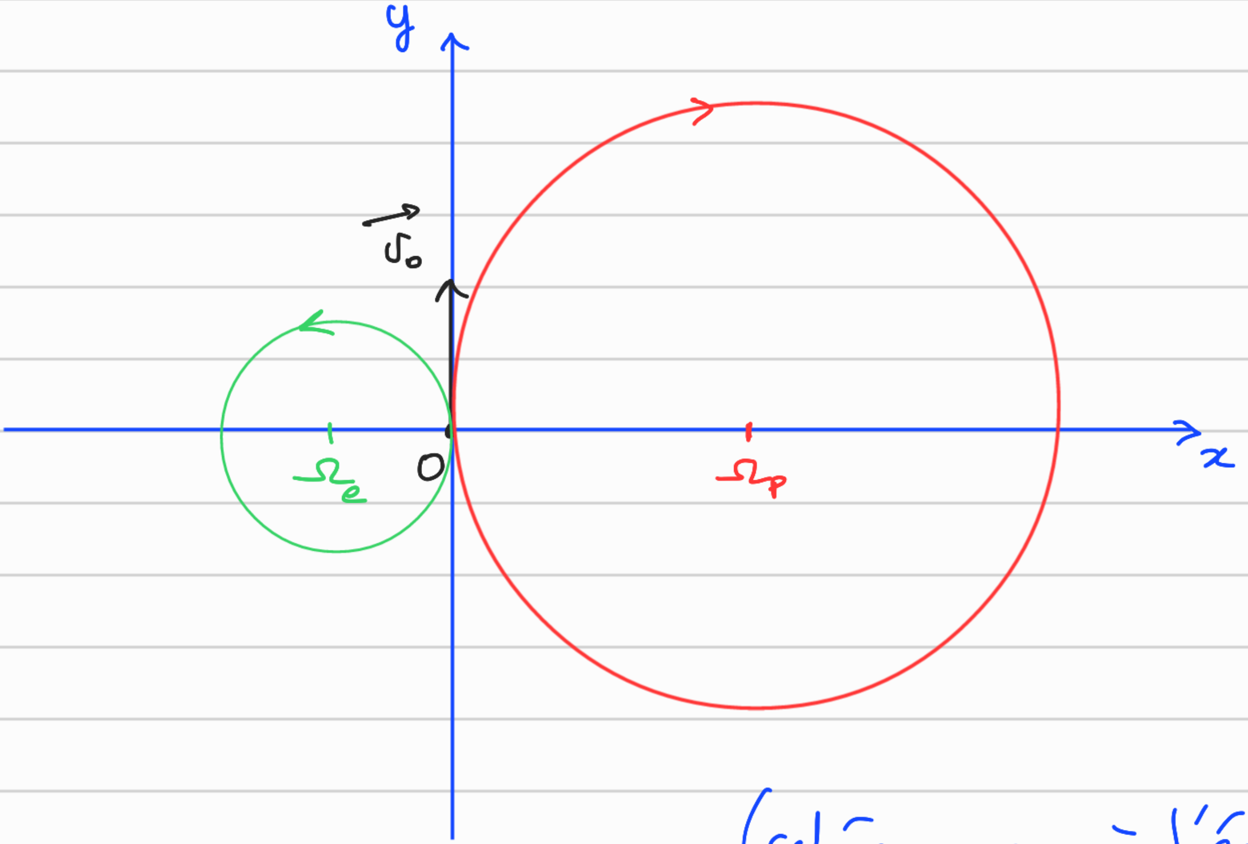
$$\boxed{R = \left|\frac{v_0}{\omega}\right| = \frac{m v_0}{|q| B}}$$

* Pour un proton $x(\Omega_p) = \frac{m_p . v_0}{eB}$ et $R_p = \frac{m_p v_0}{eB}$

le centre du cercle est à droite de l'origine
$\Rightarrow$ cercle parcouru dans le sens horaire

* Pour un électron $x(\Omega_e) = -\frac{m_e v_0}{eB}$ et $R_e = \frac{m_e v_0}{eB}$

le centre du cercle est à gauche de l'origine $\Rightarrow$ cercle parcouru dans le sens anti-horaire, et beaucoup plus petit
car $\frac{R_e}{R_p} = \frac{m_e}{m_p} \approx \frac{1}{2000}$



(schéma pas à l'échelle)

Q3. En présence de frottement le PFD s'écrit :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B} - \lambda \vec{v}$$

Soit $\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} - \lambda\dot{x} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} - \lambda\dot{y} \\ m\ddot{z} = -\lambda\dot{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega\dot{y} - \alpha\dot{x} \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} - \alpha\dot{y} \\ \ddot{z} = -\alpha\dot{z} \end{cases}$

La 3ème équation donne $\ddot{z} + \alpha\dot{z} = 0$

Soit $\dot{z} = Ae^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{1}{\alpha}$

et $A = cte$ que l'on détermine avec la vitesse initiale : $\dot{z}(0) = 0$ car $\vec{v_0} = v_0\vec{e_y}$.

Donc $\dot{z} = 0 \Rightarrow z = cte = 0$

le mouvement est plan, il est contenu dans le plan (xOy).

Q4. On pose $u = x + iy$

En combinant les 2 premières équations, il vient :

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) = \omega\dot{y} - \alpha\dot{x} - i\omega\dot{x} - i\alpha\dot{y}$$

$$\ddot{u} = -(\alpha + i\omega)(\dot{x} + i\dot{y})$$
$$\ddot{u} = -(\alpha + i\omega)\dot{u}$$

$$\ddot{u} + (\alpha + i\omega)\dot{u} = 0$$

On a donc $\dot{u} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{1}{\alpha + i\omega}$

$$\dot{u}(t) = Ae^{-(\alpha+i\omega)t} \quad \text{or} \quad \dot{u}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0)$$
$$= v_0 i$$

$$v_0 i = Ae^0 \Rightarrow A = v_0 i$$

$$\dot{u}(t) = v_0 i e^{-(\alpha+i\omega)t}$$

$$u(t) = \frac{-v_0 i}{\alpha + i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)t} + B$$

avec B = constante que l'on détermine
avec $u(0)$: $u(0) = x(0) + iy(0) = 0$.

$$0 = \frac{-v_0 i}{\alpha + i\omega} + B \Rightarrow B = \frac{v_0 i}{\alpha + i\omega}$$

$$u(t) = \frac{-v_0 i}{\alpha + i\omega} e^{-\alpha t}\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right) + \frac{v_0 i}{\alpha + i\omega}$$

$$u(t) = \frac{-(v_0 i)(\alpha - i\omega)}{\alpha^2 + \omega^2}\left(\cos\omega t - i\sin(\omega t)\right)e^{-\alpha t} + \frac{v_0 i(\alpha - i\omega)}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$u(t) = \frac{-v_0\omega - i\alpha v_0}{\alpha^2 + \omega^2}\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right)e^{-\alpha t} + \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} + i\frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$u(t) = \frac{v_0 \omega}{\alpha^2+\omega^2}\left(1-\cos(\omega t)e^{-\alpha t}\right) - \frac{\alpha v_0}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t)e^{-\alpha t}$$

$$+ i\left[\frac{v_0 \omega}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t)e^{-\alpha t} + \frac{\alpha v_0}{\alpha^2+\omega^2}\left(1-e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\right)\right]$$

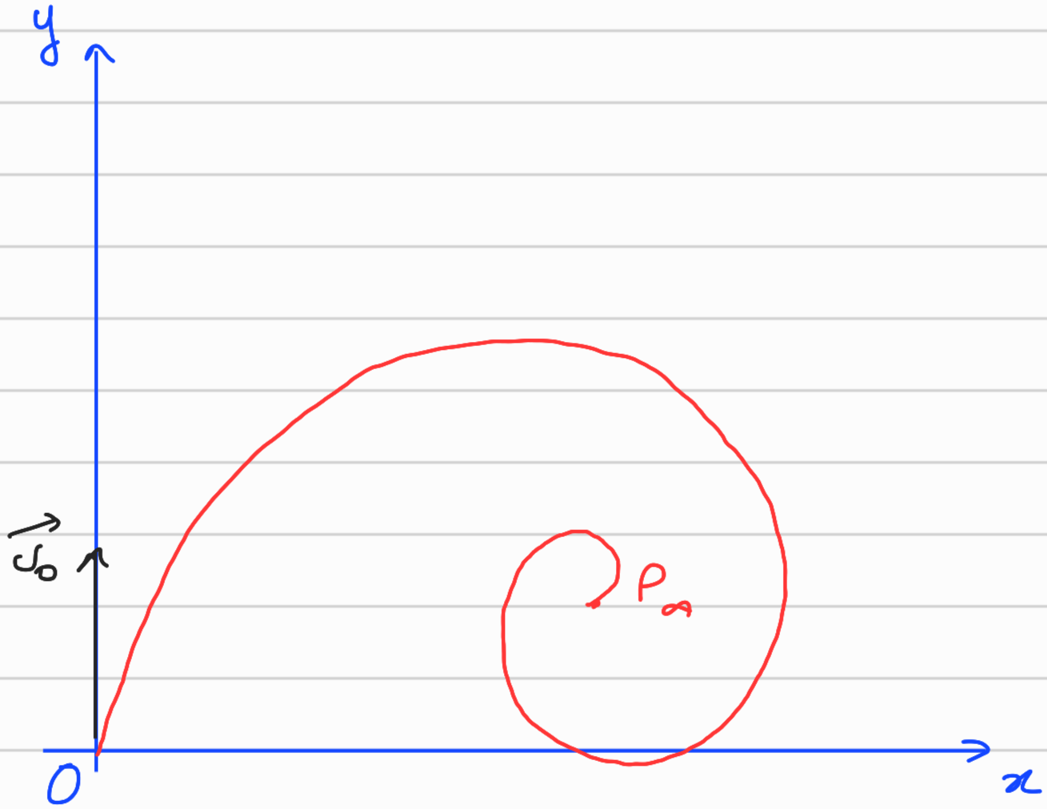
D'où $x(t) = \frac{v_0 \omega}{\alpha^2+\omega^2}\left(1-\cos(\omega t)e^{-\alpha t}\right) - \frac{\alpha v_0}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t)e^{-\alpha t}$

$$y(t) = \frac{v_0 \omega}{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t)e^{-\alpha t} + \frac{\alpha v_0}{\alpha^2+\omega^2}\left(1-\cos(\omega t)e^{-\alpha t}\right)$$

Q5. Pour $t \to +\infty$:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} x(t) &\to \frac{v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2} \\ \lim_{t\to+\infty} y(t) &= \frac{\alpha v_0}{\alpha^2+\omega^2} \end{aligned}\right\} \text{d'où } P_\infty\left(\frac{v_0\omega}{\alpha^2+\omega^2} ; \frac{\alpha v_0}{\alpha^2+\omega^2} ; 0\right)$$

La particule continue à tourner (présence des termes sinusoïdaux) mais le rayon de courbure diminue exponentiellement : la trajectoire est une spirale tournant toujours vers la droite pour un proton, elle s'enroule autour du point P_∞ :



y
$\vec{v}_0$
P_∞
O
x