DM5 Correction

Exercice 1 :

Q1. L'enthalpie est la fonction d'état appropriée ici car les transformations qui s'y déroulent sont toujours monobares, et les pressions initiale et finale sont égales.

Q2. L'enthalpie étant additive, on a

$$\Delta H_{total} = \Delta H_{calo} + \Delta H_{eau1} + \Delta H_{eau2} = 0$$

car $\Delta H = Q$ dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre des pressions à l'état initial et à l'état final.
Or la transformation est adiabatique : $Q = 0$

On a donc $\Delta H_{eau1} + \Delta H_{eau2} = 0$ dans l'hypothèse où le calorimètre n'a pas de capacité calorifique.

$$m_1 c_{eau} (\theta_f - \theta_1) + m_2 c_{eau} (\theta_f - \theta_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_f (m_1 + m_2) = m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta_f = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2}}$$

AN : $\theta_f = \dfrac{0{,}100 \cdot (273 + 25) + 0{,}060 (273 + 60)}{0{,}160} = \underline{311\text{ K} = 38{,}1\,^\circ\text{C}}$

Q3. a) $[\mu] = \dfrac{[C_{calor}]}{c_0} = \dfrac{MLT^{-2}.\theta^{-1}}{MLT^{-2}\theta^{-1}M^{-1}} = M$

La grandeur μ a la dimension d'une masse.

b) $\mu(\theta_f - \theta_1) + m_1(\theta_f - \theta_1) + m_2(\theta_f - \theta_2) = 0$

$$\boxed{\mu = \frac{m_2(\theta_2 - \theta_f) + m_1(\theta_1 - \theta_f)}{\theta_f - \theta_1}}$$

AN : $\mu = \dfrac{0{,}060(60-36{,}7) + 0{,}100(25-36{,}7)}{36{,}7 - 25} = 1{,}9 \cdot 10^{-2}\,kg$
$= \underline{19\ g}$

Q4. Le bilan enthalpique s'écrit :
$\Delta H_{calo} + \Delta H_{eau} + \Delta H_{billes} = 0$

$(\mu + m_1)\, c_{eau}\, (\theta_4 - \theta_1) + 40 \cdot \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 \cdot \rho_{fer} \cdot c_{fer}(\theta_4 - \theta_3) = 0$

$$\boxed{c_{fer} = \frac{-(\mu + m_1)c_{eau}(\theta_4 - \theta_1)}{\frac{160}{3} \cdot \pi \frac{\delta^3}{8}\rho_{fer}(\theta_4 - \theta_3)}}$$

AN : $c_{fer} = \dfrac{-(0{,}019 + 0{,}100)4180 \cdot (25{,}3 - 25)}{\frac{20\pi}{3}(10^{-2})^3\, 7{,}9 \cdot 1000 \cdot (25{,}3 - 80)} = 16\,J.K^{-1}kg^{-1}$

↳ il y a une erreur dans l'énoncé car la valeur obtenue avec l'AN n'est pas cohérente avec la valeur tabulée pour c_{fer} : $444\ J.K^{-1}kg^{-1}$
(nombre de billes ou diamètre ou θ_4 ?)

Néanmoins on peut remarquer que la valeur tabulée est élevée par rapport à celle de l'eau : il faut peu d'énergie pour modifier la température du fer par rapport à celle de l'eau.

Exercice 2

Q1. Pour $R = R_0$ $T = T_0$ donc d'après la formule donnée :
$R_0 = \alpha T_0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \frac{R_0}{T_0}}$

La résistance augmente avec la température car les électrons "se cognent plus" aux atomes lorsque l'agitation thermique augmente.

Q2 * le piston coulisse sans frottement, la transformation est donc monobare (équilibre avec la pression extérieure)

* la transformation est très lente car la température du gaz est définie à chaque instant.

$\Rightarrow$ la transformation est donc isobare (pression du gaz constante tout au long de la transformation)

Q3. L'enceinte est fermée donc $n = cte$
D'après la loi des gaz parfaits

$$\frac{P_f V_f}{T_f} = \frac{P_i V_0}{T_0} \Rightarrow V_f = \frac{T_f}{T_0} V_0 \quad \text{car } P_i = P_f = P_{atm}$$

On donne n et $P_0 \Rightarrow V_0 = \frac{nRT_0}{P_{atm}}$

$$\Rightarrow V_f = \frac{T_f . nRT_0}{T_0 . P_{atm}}$$

$$\boxed{V_f = nR \frac{T_f}{P_{atm}}}$$

Q4. D'après le 1er principe enthalpique appliqué au système gaz entre t et $t + dT$:

$dH = \delta Q$ (transfo. monobare avec $P_i = P_{atm}$ et $P_f = P_{atm}$)

$$n C_{p,m} dT = \frac{E^2}{R} dt$$

$$\left(\delta Q = P_{th} . dt \text{ et } P_{th} = \frac{E^2}{R}\right)$$

or $R = \alpha T$

$$\Rightarrow n C_{p,m} dT = \frac{E^2}{\alpha T} dt$$

$$\Rightarrow T dT = \frac{E^2}{\alpha n C_{pm}} dt$$

En intégrant de $t=0$ à t on a :

$$\int_0^t T\,dT = \int_0^t \frac{E^2}{\alpha n C_{pm}}\,dt$$

$$T^2(t) - T_0^2 = 2\frac{E^2}{\alpha n C_{pm}}\,t \quad . \quad \text{avec } \alpha = \frac{R_0}{T_0}$$

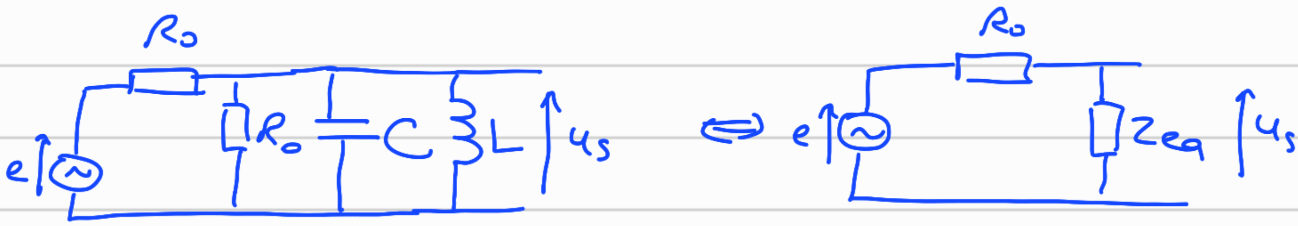
$$\boxed{T(t) = \sqrt{T_0^2 + \frac{2E^2 T_0}{R_0 n C_{pm}}\,t}}$$

Q5. $T_f = T(\tau)$

$$\Rightarrow \boxed{T_f = \sqrt{T_0^2 + \frac{2E^2 T_0}{R_0 n C_{pm}}\,\tau}}$$

Exercice 3 :

Q1.



avec $\dfrac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \dfrac{1}{R_0} + jC\omega + \dfrac{1}{jL\omega}$

D'après la formule du pont diviseur de tension : $\underline{u_s} = \dfrac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + R_0}\,\underline{u_e}$

Soit $\underline{u_s} = \dfrac{1}{1 + R_0 \times \dfrac{1}{\underline{Z_{eq}}}} \underline{u_e}$

$$\underline{u_s} = \frac{1}{1 + \left(1 + jR_0C\omega - j\frac{R_0}{L\omega}\right)} \underline{u_e}$$

$$\boxed{\underline{u_s} = \frac{1}{2 + j\left(R_0C\omega - \frac{R_0}{L\omega}\right)} \underline{u_e}}$$

$$U_{sm} e^{j\phi} e^{j\omega t} = \frac{1}{2 + j\left(R_0C\omega - \frac{R_0}{L\omega}\right)} E_m e^{j\omega t}$$

$\boxed{U_{sm} = \dfrac{E_m}{\sqrt{4 + \left(R_0C\omega - \frac{R_0}{L\omega}\right)^2}}}$ et $\boxed{\phi = -\arctan\left(\dfrac{R_0C\omega - R_0/L\omega}{2}\right)}$

Q2. U_{sm} est maximale lorsque son dénominateur est minimal soit

$$R_0C\omega_r = \frac{R_0}{L\omega_r} \Leftrightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

et $\boxed{f_r = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$ AN : $f_r = \dfrac{1/2\pi}{\sqrt{10.10^{-3}.253.10^{-6}}} = \underline{10.10^3 \text{ Hz}}$

On a alors $U_{sm_{max}} = \dfrac{E_m}{2}$

Q 3. $f_{c1} < f_r$ donc c'est la valeur de fréquence de coupure inférieure : $\omega_1 < \omega_r$

$$\omega_1^2 < \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_1^2 LC < 1$$

$$-\frac{1}{LC\omega_1^2} < -1 \qquad 1 - \frac{1}{LC\omega_1^2} < 0$$

$$\phi_1 = -\arctan\left(\frac{R_0}{2}\left(C\omega_1 - \frac{1}{L\omega_1}\right)\right) = -\arctan\left(\underbrace{\frac{R_0}{2}\omega_1 C}_{>0}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{LC\omega_1^2}\right)}_{<0}\right)$$

donc $\phi_1 > 0$ donc u_s est en avance sur u_e.

On résoud l'équation $U_{sm}(f_c) = \frac{U_{sm\,max}}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{2\sqrt{2}}$

$$\frac{E_m}{\sqrt{4 + \left(R_0 C\omega_c - \frac{R_0}{L\omega_c}\right)^2}} = \frac{E_m}{2\sqrt{2}}$$

$$4 + \left(R_0 C\omega_c - \frac{R_0}{L\omega_c}\right)^2 = 8$$

$$\left(R_0 C\omega_c - \frac{R_0}{L\omega_c}\right)^2 = 4$$

$$R_0 C\omega_c - \frac{R_0}{L\omega_c} = \pm 2$$

$$R_0 C\omega_c^2 \pm 2\omega_c - \frac{R_0}{L} = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 R_0^2 \frac{C}{L} > 0$$

$$\Delta = 4\left(1 + R_0^2 C/L\right)$$

$$\omega_{c_1} = \frac{2 + 2\sqrt{1 + CR_o^2/L}}{2R_oC}$$

$$\omega_{c_2} = \frac{-2 + 2\sqrt{1 + CR_o^2/L}}{2R_oC}$$

Soit $\omega_{c_1} = \frac{1}{R_oC} + \sqrt{\frac{1}{R_o^2C^2} + \frac{1}{LC}}$

$$\omega_{c_2} = -\frac{1}{R_oC} + \sqrt{\frac{1}{R_o^2C^2} + \frac{1}{LC}}$$

On a donc :

$$\omega_{c_1} \times \omega_{c_2} = \left(\sqrt{\frac{1}{R_o^2C^2} + \frac{1}{LC}} - \frac{1}{R_oC}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{R_o^2C^2} + \frac{1}{LC}} - \frac{1}{R_oC}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{R_o^2C^2} + \frac{1}{LC}\right) - \frac{1}{R_o^2C^2} = \frac{1}{LC} = \omega_o^2$$

On en déduit $\omega_{c_2} = \frac{\omega_o^2}{\omega_{c_1}}$

AN : $\omega_{c_2} = \frac{1000^2}{900} = 1{,}11.10^3 \text{ Hz}$.

or $Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega_c}$ AN : $Q = \frac{10^3}{1111 - 900} = \underline{4{,}7}$

littéralement $Q = \frac{\sqrt{LC}}{\frac{2}{R_oC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{1}{2} R_oC$

$$\Rightarrow Q = \frac{R_o}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

(On retrouve cette expression en identifiant l'équation obtenue avec la forme canonique $\omega_c^2 \pm \frac{\omega_0}{Q}\omega_c - \omega_0^2 = 0$)

$$\Rightarrow \boxed{R_0 = 2Q\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

AN : $R_0 = 2 \cdot 4{,}7 \cdot \sqrt{\frac{10.10^{-3}}{2{,}53.10^{-6}}} = \underline{5{,}9 \cdot 10^2\ \Omega}$

(On peut aussi trouver R_0 à partir de f_{c_1} :

$$f_{c_1} = \frac{-\frac{1}{CR_0} + \sqrt{\frac{1}{C^2R_0^2} + \frac{1}{LC}}}{2\pi}$$

$$\dots \quad \Rightarrow R_0 = \frac{4\pi f}{\frac{1}{L} - 4\pi^2 f_{c_1}^2}$$)

Q4. Il faut remplacer le condensateur de capacité C par un condensateur de capacité $C + C'$.
(En parallèle les capacités s'additionnent)

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+C')}}$$

$$\Rightarrow 4\pi^2 f_r^2 = \frac{1}{L(C+C')}$$

$$L(C+C') = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{C' = \frac{1}{4\pi^2 L f_r^2} - C}$$

AN : $C' = 1{,}4 \cdot 10^{-6}\,F = \underline{1{,}4\,\mu F}$