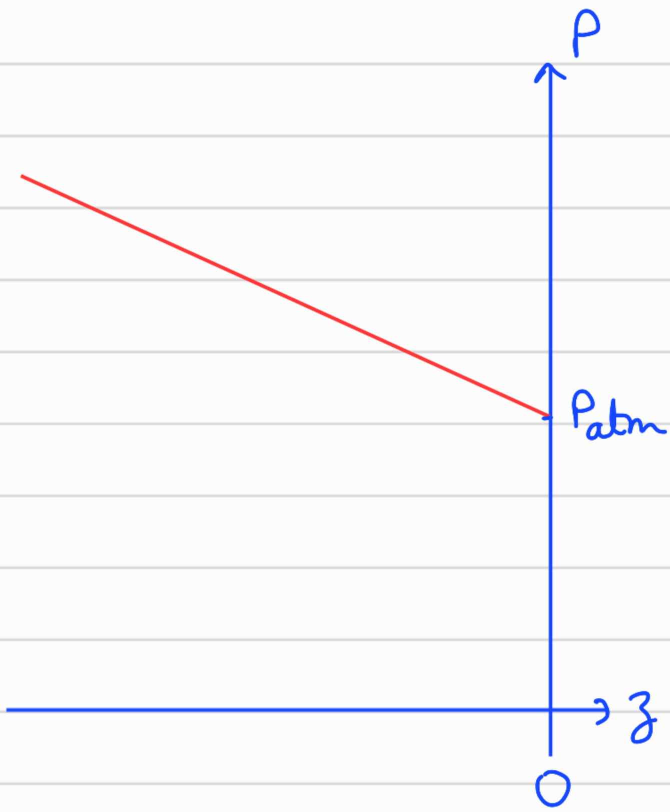
Correction DM 6

Partie I : Plongée libre

Q1. $P(z) = P_{atm} - \rho g z$.

avec les valeurs fournies : $P(z) = 1{,}013.10^5 - 9{,}81.10^3 z$



Q2. On considère une évolution isotherme pour l'air enfermé dans les poumons, que l'on considère comme parfait :

On a donc $PV = cte$ soit

$$P(z)\,V(z) = P_{atm} V_M$$

$$\Rightarrow V(z) = \frac{P_{atm}}{P(z)} V_m$$

avec l' expression de $p(z)$ donnée on a :

$$\boxed{V(z) = \frac{P_{atm} \cdot V_{n}}{P_{atm} - \rho g z}}$$

A la profondeur $z = -10$ m on a

$$V(10) = \frac{1{,}015.10^5 \cdot 7.10^{-3}}{1{,}015 - 1{,}0.10^3 \cdot 9{,}81.(-10)} = \underline{3{,}6.10^{-3} \text{ m}^3}$$

Q3. $\vec{P_a} = \vec{\pi} + m\vec{g}$ avec $\vec{\pi}$ = poussé d'Archimède

avec $\vec{\pi} = \rho \cdot g V_{plongeur} \vec{u_z}$ donc $\|\vec{\pi}\|$ est proportionnelle au volume du plongeur.

Comme le volume du plongeur diminue (ses poumons ont un volume qui diminue) le poids apparent du plongeur diminue.

Q4. D'après la Q3, $\vec{P_A} = g(\rho V^*(z) - m - m_1)\vec{u_z}$

On a donc $P_a = 0$ pour $V^*(z) = \frac{m + m_1}{\rho}$

$$\Longleftrightarrow \quad V_0 + V(z) = \frac{m + m_1}{\rho}$$

En remplaçant $V(z)$ par son expression

obtenue à la Q2 on obtient :

$$V_0 + \frac{P_{atm} V_n}{P_{atm} - \rho g z} = \frac{m + m_1}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \quad m_1 = \rho \left(V_0 + \frac{P_{atm} V_n}{P_{atm} - \rho g z} \right) - m$$

AN : $m_1 = 1{,}0.10^3 \left(0{,}077 + \frac{1{,}013.10^5 . 7.10^{-3}}{1{,}013.10^5 - 1{,}0.10^3 . 9{,}81.(-5)} \right) - 80$

$\underline{m_1 = 1{,}7 \text{ kg}}$.

Partie II : Plongée avec bouteille et détendeur

Q6. On considère tout le gaz contenu dans l'ensemble piston + bouteille :
À la fin de la 1ère phase (admission) ce gaz occupe le volume $V_b + V_{max}$ et est à la pression P_{atm}.

À ce moment là S se ferme et S' s'ouvre puis le piston se déplace jusqu'en AA' (compression), le volume occupé par le gaz est donc $V_{min} + V_b$, et la pression est P_b.

Comme la transformation est supposée isotherme, et que le nombre de moles de gaz n'a pas varié, la quantité nRT_a est constante soit

$$P_{atm}(V_b+V_{max}) = P_b(V_{min}+V_b)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_b = P_{atm}\,\frac{V_b+V_{max}}{V_b+V_{min}}}$$

Nombre de moles de gaz dans la bouteille :

* avant la compression : $n_i = \frac{P_{atm}.V_b}{RT_a}$

* après la compression : $n_f = \frac{P_{atm}.V_b}{RT_a}\,\frac{V_b+V_{max}}{V_b+V_{min}}$

$$\Rightarrow n_f = \frac{P_{atm}V_b}{RT_a}\,\frac{V_b+V_{max}}{V_b(1+V_{min}/V_b)}$$

d'où $\Delta n = n_f - n_i = -\frac{P_{atm}V_b}{RT_a} + \frac{P_{atm}V_b}{RT_a}\,\frac{V_b+V_{max}}{V_b+V_{min}}$

soit $\Delta n = \frac{P_{atm}V_b}{RT_a}\left(\frac{V_b+V_{max}}{V_b+V_{min}} - 1\right)$

$$= \frac{P_{atm}V_b}{RT_a}\left(\frac{V_b+V_{max}-V_b-V_{min}}{V_b+V_{min}}\right)$$

$$= \frac{P_{atm}V_b}{RT_a}\left(\frac{V_{max}-V_{min}}{V_b\left(1+\frac{V_{min}}{V_b}\right)}\right)$$

or $V_{min} \ll V_b$ donc $\boxed{\Delta n \approx \dfrac{P_{atm}}{RT_a}(V_{max} - V_{min})}$

AN : $\Delta n = \dfrac{1{,}013.10^5}{8{,}314.293}\left(2.10^{-3} - 2.10^{-5}\right)$

$\underline{\Delta n = 8{,}2.10^{-2} \text{ mol}}$

Q7. La soupape S' s'ouvre quand la pression dans le cylindre est égale à la pression dans la bouteille p. La quantité de matière étant constante pendant cette 1ère partie du retour, on a :

$$P_{atm} V_{max} = P_b V'$$

$$\Rightarrow \boxed{V' = \frac{P_{atm}}{p} V_{max}}$$

A la fin de la compression on a tout le gaz dans le volume $V_b + V_{min}$ à la pression p' soit :

$$P_{atm} V_{max} + p V_b = p'(V_{min} + V_b)$$

$$\boxed{p' = \frac{P_{atm} V_{max} + p.V_b}{V_{min} + V_b}}$$

D'où $\Delta p = p' - p = \dfrac{P_{atm} V_{max} + p V_b}{V_{min} + V_b} - p$

$$\Delta p = \frac{P_{atm} V_{max} + p V_b - p V_{min} - p V_b}{V_{min} + V_b}$$

$$\boxed{\Delta p = \frac{P_{atm} V_{max} - p V_{min}}{V_{min} + V_b}}$$

On remarque que Δp tend vers 0 lorsque p augmente, ce qui correspond au remplissage maximal de la bouteille.

$\Delta p = 0$ pour $\boxed{p_{max} = P_{atm} \dfrac{V_{max}}{V_{min}}}$

Q8. AN : $\Delta p = \dfrac{1{,}013.10^5 . 2.10^{-3} - 0{,}2.10^7 . 2.10^{-5}}{2.10^{-5} + 5.10^{-3}}$

$$\underline{\Delta p = 0{,}32.10^5 \text{ Pa}}$$

$p_{max} = 1{,}013.10^5 . \dfrac{2.10^{-3}}{2.10^{-5}} = \underline{1{,}0.10^7 \text{ Pa}}$

Q9. $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \alpha \dfrac{P_{atm} V_{max} - p V_{min}}{V_{min} + V_b}$

d'où l'équation différentielle :

$$\frac{dp}{dt} + \frac{V_{min} . \alpha}{(V_{min} + V_b)} p = \alpha \frac{P_{atm} V_{max}}{(V_{min} + V_b)}$$

Q10 On peut mettre l'équation précédente sous forme canonique :

$$\frac{dp}{dt} + \frac{p}{\tau} = \frac{p_\infty}{\tau}$$

dont la solution est $p(t) = p_\infty + A e^{-t/\tau}$

on détermine A avec les conditions initiales :

$p(0) = P_{atm}$

$\Rightarrow \quad P_{atm} = p_\infty + A \Rightarrow A = P_{atm} - p_\infty$

d'où $\boxed{p(t) = p_\infty + (P_{atm} - p_\infty) e^{-t/\tau}}$

avec $P_\infty = P_{max} = P_{atm} \dfrac{V_{max}}{V_{min}}$

et $\tau = \dfrac{V_b}{\alpha V_{min}}$

$P(T) = \dfrac{P_{max}}{2}$ pour $\dfrac{P_{max}}{2} = P_{max} + (P_{atm} - P_{max}) e^{-T/\tau}$

$$-\frac{P_{max}}{2} = (P_{atm} - P_{max}) e^{-T/\tau}$$

$$e^{-T/\tau} = \frac{P_{max}}{2(P_{max} - P_{atm})}$$

$$T = -\tau \ln\left(\frac{P_{max}}{2(P_{max} - P_{atm})}\right)$$

AN : $$T = -\frac{5.10^{-3}}{4 . 2.10^{-5}} \ln\left(\frac{1{,}0.10^{7}}{2(1{,}0.10^{7} - 1{,}013.10^{5})}\right)$$

$$\underline{T = 43\,s}$$

Q 11. $$n_i = \frac{P . V_b}{R T_a}$$

AN : $$n_i = \frac{1{,}0.10^{7} . 5.10^{-3}}{8{,}314 . 293} = \underline{21 \text{ moles}}.$$

$$n_s = \frac{P_s . V_b}{R T_e}$$

AN : $$n_s = \frac{4{,}0.10^{5} . 5.10^{-3}}{8{,}314 . 288} = \underline{0{,}84 \text{ moles}}$$

Q12. A la profondeur z, le volume Ω_0 correspond à $n = \frac{P(z) . \Omega_0}{R T_e}$

Avec $n_i - n_s$ moles d'air disponibles, il peut donc effectuer $\frac{n_i - n_s}{n}$ respirations.

Comme chaque respiration a une durée $\frac{1}{f}$, le plongeur peut rester pendant :

$$\Delta t = \frac{n_i - n_s}{n \cdot f} = \frac{n_i - n_s}{p(z)\Omega_0} \cdot \frac{RT_e}{f}$$

or $p(z) = P_{atm} - \rho g z$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{n_i - n_s}{P_{atm} - \rho g z} \frac{RT_e}{\Omega_0 f}}$$

AN : $\Delta t = \frac{21 - 0{,}84}{1{,}013.10^5 - 1{,}0.10^3 . 9{,}81 . (-20)} \cdot \frac{8314 . 288}{2{,}0.10^{-3} . 0{,}2}$

$\underline{\Delta t = 396\ s}$ (avec les valeurs non arrondies de n_i et n_s)

Partie III Accident en cours de remontée

Q13 A température constante, on a
$P(-40) . V_i = P(z_P) . V_m$

avec z_P = profondeur de la perte du détendeur.

$$\Rightarrow \quad P(z_p) = \frac{P(-40).V_i}{V_m} = P_{atm} - \rho g z_p$$

Soit $z_p = \left(P_{atm} - \frac{P(-40)V_i}{V_m}\right) \times \frac{1}{\rho g}$

On choisit $V_i = 4\,L$

AN : $z_P = \left(1{,}013.10^5 - \frac{(1{,}013.10^5 + 10^3.9{,}81.40)4.10^{-3}}{7.10^{-3}}\right) . \frac{1}{10^3.9{,}81}$

$z_P = \underline{-18\ m.}$

Q14. La pression dans les poumons reste égale à $P(z_p)$ puisque le volume et la température sont constants.

On a donc $P(z_A) = P(z_P) - \Delta p$

$\cancel{P_{atm}} - \rho g z_A = \cancel{P_{atm}} - \rho g z_P - \Delta p$

$z_A = \frac{\Delta p}{\rho g} + z_P$

AN : $z_A = -18 + \frac{0{,}5.10^5}{10^3.9{,}81} = \underline{-13\ m}$

Q15 Pour éviter l'accident et avoir un écart de pression de 0,5 bar juste en arrivant à la surface il aurait fallu un volume V_i' lors de la perte du détendeur tel que :

$$z_A = 0 \iff z_D = -\frac{\Delta p}{\rho g}$$

et donc $-\frac{\Delta p}{\rho g} = \left(P_{atm} - \frac{P(-40)V_i'}{V_m}\right) \times \frac{1}{\rho g}$

$$\iff \Delta p = \frac{P(-40).V_i'}{V_m} - P_{atm}.$$

$$\iff V_i' = \frac{(\Delta p + P_{atm})V_m}{P(-40)}$$

AN : $V_i' = \frac{(0{,}5.10^5 + 1{,}013.10^5)7.10^{-3}}{1{,}013.10^5 + 40.10^3.9{,}81}$

$$V_i' = \underline{2{,}1 .10^{-3}\ m^3}$$

Le plongeur aurait dû expirer le volume

$\Delta V = V_i - V_i' = \underline{1{,}9 L}$.