Correction DS 4

Exercice 1 :

Q1. En A on a $z=0$ et $\theta=0$
Au bout de 1 tour $z=h$ et $\theta=2\pi$

Or d'après l'énoncé $z(\theta)=\gamma.\theta$

$$\Rightarrow \boxed{h=\gamma.2\pi}$$

Q2. D'après l'énoncé $3h=10\ m \Rightarrow h=\frac{10}{3}m$

$\underline{h=3{,}3\ m}$.

D'où $\gamma=\frac{10}{3.2\pi} = \underline{0{,}53\ m.rad^{-1}}$

Q3. $\vec{OM}(t)=r\,\vec{u_r}+z\vec{u_z}$ en coordonnées cylindriques

Au cours de ce mouvement $r=R$

Soit $\boxed{\vec{OM}(t)=R\vec{u_r}+z\vec{u_z}}$

Et $\boxed{\vec{v}(t)=\frac{d\vec{OM}}{dt}=R\dot{\theta}\vec{u_\theta}+\dot{z}\vec{u_z}}$

Q4. $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz$$

signe $\ominus$ car (Oz) est dirigé vers le bas.

Or $z = r\theta \Rightarrow \dot{z} = r\dot{\theta}$

D'où $E_m = \frac{1}{2} m \left(R^2 \frac{\dot{z}^2}{r^2} + \dot{z}^2 \right) - mgz$

$$E_m = \frac{m}{2} \left(\frac{R^2}{r^2} + 1 \right) \dot{z}^2 - mgz$$

Par identification avec l'expression proposée :

$$\boxed{C_1 = m\left(\frac{R^2}{r^2} + 1\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{C_2 = mg}$$

Q5 AN : $C_1 = 50 \times \left(\frac{5^2}{0{,}53^2} + 1 \right)$

Soit $\underline{C_1 = 4{,}5 \cdot 10^3 \text{ kg}}$ avec 2 chiffres significatifs

$C_2 = 50 \times 10 = \underline{5{,}0 \cdot 10^2 \text{ kg.m.s}^{-2}}$

Q6. Appliquons le théorème de l'énergie mécanique au système {élève} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\Delta E_m = \sum W(\vec{F}_{n.c.})$$

or le système élève est soumis à

* son poids qui est une force conservative
* la réaction du support, qui est orthogonale au déplacement (absence de frottements) donc son travail est nul.

D'où $\Delta E_m = 0$ soit $E_m = cte$.

$$E_m(A) = E_m(B)$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_B^2 - mg(3h)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + 3mgh$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 + 6gh}}$$

Q7 $E_m(t) = cte$ donc $\dfrac{dE_m}{dt} = 0$

En dérivant la relation de la question 4, on obtient :

$$C_1 \dot{z}\ddot{z} - C_2 \dot{z} = 0$$

Q8. $\dot{z} = 0$ ($\Rightarrow$ système immobile) ou $\ddot{z} = \frac{C_2}{C_1}$

Par intégrations successives, on a :

$$\dot{z}(t) = \frac{C_2}{C_1} t + K_1 \quad \text{avec } K_1 = \text{cte}$$

que l'on détermine avec les conditions initiales :

$$\dot{z}(0) = K_1$$

Or $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{u_z} = \frac{R}{\gamma}\dot{z}\,\vec{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{u_z}$

$$\vec{v} = \dot{z}\left(\frac{R}{\gamma}\vec{u_\theta} + \vec{u_z}\right)$$

Au point A : $v_A^2 = \dot{z}(0)^2\left(\frac{R^2}{\gamma^2} + 1\right)$

$$\Rightarrow \dot{z}(0) = \sqrt{\frac{v_A^2}{\frac{R^2}{\gamma^2}+1}} = \frac{v_A}{\sqrt{C_1/m}} = v_A\sqrt{\frac{m}{C_1}}$$

D'où $\dot{z}(t) = \frac{C_2}{C_1} t + v_A\sqrt{\frac{m}{C_1}}$

Et $\boxed{z(t) = \frac{1}{2}\frac{C_2}{C_1} t^2 + v_A\sqrt{\frac{m}{C_1}}\, t}$

car à $t=0$ $z=0$.

Pour $t = T$ $\quad z = 3h$

Soit $3h = \frac{1}{2}\frac{C_2}{C_1}T^2 + v_A\sqrt{\frac{m}{C_1}}\,T$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{C_2}{C_1}T^2 + v_A\sqrt{\frac{m}{C_1}}\,T - 3h = 0$$

$$\Delta = \frac{m v_A^2}{C_1} + 6\frac{hC_2}{C_1}$$

$\Delta > 0$ donc 2 racines réelles, on garde celle qui est positive :

$$T = \frac{-v_A\sqrt{m/C_1} + \sqrt{\frac{m v_A^2}{C_1} + 6h\frac{C_2}{C_1}}}{C_2/C_1}$$

$$\boxed{T = \frac{-v_A\sqrt{m.C_1} + \sqrt{m v_A^2 C_1 + 6hC_1C_2}}{C_2}}$$

Q9. AN : $T = \dfrac{-5.\sqrt{50.4500} + \sqrt{50.5^2.4500 + 6.\frac{10}{3}.4500.500}}{500}$

$\underline{T = 9{,}5 \text{ s}}$

Q10. La durée de la descente est supérieure à celle estimée avec le modèle sans frottements. Cela prouve l'existence d'une force de frottement qui va travailler et faire diminer ΔE_c (travail résistant donc $W<0$)

Q11. $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}$

or $\vec{F}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposé, soit $\mathcal{P}(\vec{F}) = -Fv$.

Or on a montré que $\vec{v} = \dot{z}\left(\frac{R}{r}\vec{u_\theta} + \vec{u_z}\right)$

Soit $v = \dot{z}\sqrt{\frac{R^2}{r^2}+1} = \dot{z}\sqrt{\frac{C_1}{m}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = -F\dot{z}\sqrt{\frac{C_1}{m}}}$

Q12. D'après le théorème de la puissance mécanique appliqué au système {élève} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F})$$

Or d'après la question Q4 $E_m = \frac{1}{2}C_1\dot{z}^2 - C_2 z$

D'où $C_1\dot{z}\ddot{z} - C_2\dot{z} = -F\dot{z}\sqrt{\frac{C_1}{m}}$

$\Leftrightarrow \quad \dot{z} = 0 \quad \Rightarrow$ élève immobile

ou $\quad c_1 \ddot{z} - c_2 + F\sqrt{\frac{c_1}{m}} = 0$

$$\ddot{z} = \frac{c_2}{c_1} - \frac{F}{\sqrt{mc_1}}$$

$$\dot{z} = \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{F}{\sqrt{mc_1}}\right) t + \dot{z}(0)$$

avec $\dot{z}(0) = v_A\sqrt{\frac{m}{c_1}}$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{F}{\sqrt{mc_1}}\right) t + v_A\sqrt{\frac{m}{c_1}}$$

D'où $\quad z(t) = \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{F}{\sqrt{mc_1}}\right)\frac{t^2}{2} + v_A\sqrt{\frac{m}{c_1}}\, t$

Au point B : $z = 3h$ et $t = T'$

avec $T' = 12\,s$

$$3h = \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{F}{\sqrt{mc_1}}\right)\frac{T'^2}{2} + v_A\sqrt{\frac{m}{c_1}}\, T'$$

On isole F : $\quad 3h - v_A\sqrt{\frac{m}{c_1}}\, T' = \left(\frac{c_2}{c_1} - \frac{F}{\sqrt{mc_1}}\right)\frac{T'^2}{2}$

$$\frac{2}{T'^2}\left(3h - v_A\sqrt{\frac{m}{C_1}}\,T'\right) = \frac{C_2}{C_1} - \frac{F}{\sqrt{m\,C_1}}$$

$$\frac{F}{\sqrt{m\,C_1}} = \frac{C_2}{C_1} - \frac{2}{T'^2}\left(3h - v_A\sqrt{\frac{m}{C_1}}\,T'\right)$$

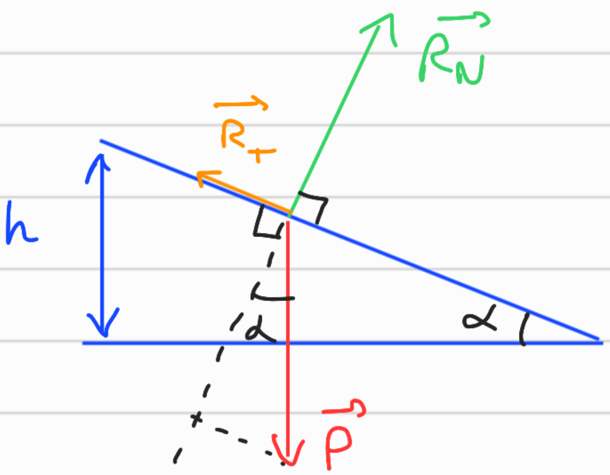
$$\boxed{F = C_2\sqrt{\frac{m}{C_1}} - \frac{2\sqrt{m\,C_1}}{T'^2}\left(3h - v_A\sqrt{\frac{m}{C_1}}\,T'\right)}$$

AN : $F = 500\sqrt{\frac{50}{4500}} - \frac{2\sqrt{50.4500}}{12^2}\left(10 - 5\sqrt{\frac{50}{4500}}\,12\right)$

$\underline{F = 28\ \text{N}}$

Q14. L'angle entre $\vec{P}$ et $\vec{R}$ vaut α

tel que : $\tan\alpha = \dfrac{h}{2\pi R}$



AN : $\tan\alpha = \dfrac{10}{6\pi.5}$

soit $\alpha = 6{,}1°$

l'accélération étant nulle dans la direction orthogonale au support (toboggan)

$$mg\cos\alpha = R_N$$

et d'après la loi de Coulomb du frottement solide : $R_T = f.R_N = F$

Soit $F = f.mg\cos\alpha$

$$\Leftrightarrow \boxed{f = \frac{F}{mg\cos\alpha}}$$

AN : $f = \dfrac{28}{50.10.\cos(61)} = \underline{5{,}7.10^{-2}}$

Exercice 2 :

Q1. les particules ont une charge positive, elles seront accélérées si $V_{G_1} > V_{G_2}$

Soit $V_{G_1} - V_{G_2} > 0$

(le champ $\vec{E}$ est alors dirigé de G_1 vers G_2)

Q2. D'après le théorème de l'énergie cinétique appliqué à un atome d'uranium dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on a :

$$\Delta E_c = \Sigma W(\vec{F})$$

Bilan des forces : $\vec{P}$ négligé

$$\vec{F}_{élec} = q\vec{E} = e\vec{E}$$

$$\frac{1}{2} m u^2 - 0 = e \frac{U}{d} . d = e . U$$

$$\boxed{u_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_2 = \sqrt{\frac{2eU}{m_2}}}$$

Q3. $\Delta E_c = eU \Rightarrow \boxed{U = \dfrac{\Delta E_c}{e}}$

AN avec $\Delta E_c = 150.10^3 . 1{,}60 10^{-19}$ J

et $e = 1{,}60 . 10^{-19}$ C

$\Rightarrow \underline{U = 150 10^3 \ V}$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2 . 1{,}60 . 10^{-19} . 150 . 10^3}{1{,}67 . 10^{-27} . 235}} = 1{,}11 . 10^5 \ m.s^{-1} = \underline{111 \ km.s^{-1}}$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{2 . 1{,}60 . 10^{-19} . 150 . 10^3}{1{,}67 . 10^{-27} . 238}} = 1{,}10 \ 10^5 \ m.s^{-1} = \underline{110 \ km.s^{-1}}$$

Q4. La force doit être dirigée selon la direction (Oy) dans le sens décroissant, or $\vec{F}_{mag} = e\vec{v} \times \vec{B}$ et $\vec{v} = u\vec{e}_x$

Il faut donc que $\vec{B}$ soit dirigée selon $\vec{u}_z$.

Q5. On applique le principe fondamental de la dynamique à la particule chargée dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

En projetant sur $\vec{u_z}$: $\frac{m dv_z}{dt} = 0$

donc $v_z = cte = 0$ d'après les conditions initiales.

$\Rightarrow$ le mouvement est contenu dans le plan (Oxy).

$\vec{F}_{mag} \cdot \vec{v} = 0$ donc d'après le théorème de la puissance cinétique $E_c = cte$ donc la norme de la vitesse est constante

$\Rightarrow$ mouvement uniforme

En utilisant le repère de Frenet on a donc $\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \\ a_N = \frac{v^2}{R} \end{cases}$

D'après le principe fondamental de la dynamique $\vec{F}_{mag} = m\vec{a}$

d'où $e\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a}$

On a donc $a_N = \frac{evB}{m} = cte$

donc $\frac{v^2}{R} = cte \Rightarrow R = cte$ donc mouvement circulaire

On obtient $\frac{v^2}{R} = \frac{evB}{m}$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{mv}{eB}}$$

Or $v = u_{1,2} = \sqrt{\frac{2eU}{m_{1,2}}} \Rightarrow R = \frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2eU}{m}}$

$$\boxed{R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um_1}{e}}} \quad \text{et} \quad \boxed{R_2 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um_2}{e}}}$$

Q6. les ions de l'uranium 235 arrivent en F si $D = 2R_1$

$$\Rightarrow \frac{D}{2} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um_1}{e}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{D} = B\sqrt{\frac{e}{2Um_1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{D}\sqrt{\frac{8Um_1}{e}}}$$

AN : $B = \frac{1}{0{,}940}\sqrt{\frac{8 \cdot 1{,}50.10^4 \cdot 1{,}67.10^{-27} \cdot 235}{1{,}60.10^{-19}}}$

$$\underline{B = 0{,}577\ T}$$

Q7. Pour $B = \frac{1}{D}\sqrt{\frac{8Um_1}{e}}$

on a $R_2 = D\sqrt{\frac{e}{8Um_1}}\sqrt{\frac{2Um_2}{e}}$

$$\Leftrightarrow R_2 = D\sqrt{\frac{m_2}{4m_1}}$$

AN : $R_2 = 0{,}940 \cdot \sqrt{\frac{238}{4 \cdot 235}}$

$$R_2 = 0{,}473\ m$$

$2R_2 - D = 0{,}473 \times 2 - 0{,}940 = 5{,}98.10^{-3}\ m$

On a donc $2R_2 - D > \frac{L'}{2}$ $\Rightarrow 2R_2 > D + \frac{L'}{2}$

$\Rightarrow$ les ions de l'isotope 238 ne passent donc pas dans la fente F.

$\Rightarrow$ Séparation isotopique.

Q8 . $m = N \times 235 \times m_n$

or $N = \dfrac{Q_{tot}}{e} = \dfrac{i \times \Delta t}{e} \times 0{,}7.10^{-2}$

$\Rightarrow m = \dfrac{i \times \Delta t}{e} \times 0{,}7.10^{-2} \times 235 \times m_n$

AN avec $\Delta t = 365{,}25 \times 24 \times 3600$

$\Rightarrow m = \dfrac{0{,}100 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600}{1{,}6.10^{-19}} \times 0{,}7.10^{-2} \times 235 \times 1{,}67.10^{-27}$

$m = 0{,}0542$ kg

$\underline{m = 54{,}2 \text{ g}}$

Exercice 3 :

Q1. $$\psi(S_n, t) = \psi\left(S, t - \frac{d_n}{c_s}\right) = s\left(t - \frac{d_n}{c_s}\right)$$

$$\psi'(S, t) = \psi'\left(S_n, t - \frac{d_n}{c_s}\right) = K\psi\left(S_n, t - \frac{d_n}{c_s}\right)$$
$$= K\psi\left(S, \frac{t - 2d_n}{c_s}\right)$$
$$= K\, s\left(t - \frac{2d_n}{c_s}\right)$$

Q2. $$\psi'(S,t) = K s_m \cos\left(\underbrace{\omega\left(t - \frac{2d_n}{c_s}\right)}_{\phi'_n(t)}\right)$$

$$\boxed{\phi'_n(t) = \omega\left(t - \frac{2d_n}{c_s}\right)}$$

Q3. $$\Delta\phi'_n(t) = \phi'_n(t) - \phi'_{n+1}(t)$$
$$= \omega\left(t - \frac{2d_n}{c_s}\right) - \omega\left(t - \frac{2d_{n+1}}{c_s}\right)$$

$$= \frac{2\omega}{c_s}\left(d_{n+1} - d_n\right)$$

Q4. Il y a interférences constructives si

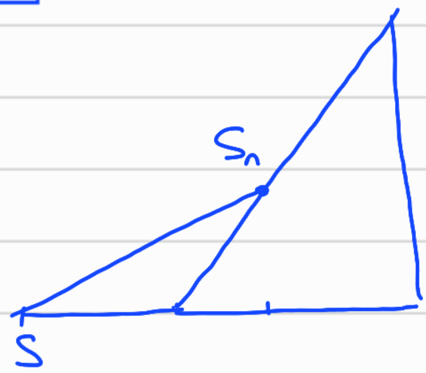
$$\Delta\phi'_n(t) = 2\pi \times m \quad \text{avec} \quad m \text{ entier}$$

$$\Rightarrow \frac{2\omega_m}{C_s}(d_{n+1} - d_n) = 2m.\pi$$

$$\boxed{\omega_m = m . \frac{\pi . C_s}{d_{n+1} - d_n}}$$

et $\boxed{\nu_m = m \frac{C_s}{2(d_{n+1} - d_n)}}$

Q5. $d_n^2 = (a+nb)^2 + (nb)^2$



$$\Rightarrow d_{n+1}^2 - d_n^2 = (a+(n+1)b)^2 + (n+1)^2 b^2 - (a+nb)^2 - (nb)^2$$

$$= \cancel{a^2} + 2a(n+1)b + (n+1)^2 b^2 + (n+1)^2 b^2$$

$$- \cancel{a^2} - n^2 b^2 - 2\cancel{a}nb - n^2 b^2$$

$$= 2ab + 2(n+1)^2 b^2 - 2n^2 b^2$$

$$= 2ab + 2b^2 + 4nb^2$$

Soit $(d_{n+1} - d_n)(d_{n+1} + d_n) = 2ab + 2b^2 + 4nb^2$

or $d_{n+1} + d_n \simeq 2 d_n$

$$\Longrightarrow \quad d_{n+1} - d_n = \frac{2ab + 2b^2 + 4nb^2}{2d_n}$$

$$\gamma_1 = \frac{c_s}{2(2ab + 2b^2 + 4nb^2)} \cdot 2d_n = \frac{c_s d_n}{2ab + 2b^2 + 4nb^2}$$

$$\gamma_1 = \frac{c_s}{2ab\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{2nb}{a}\right)} \cdot d_n$$

$$\gamma_1 = \frac{c_s}{2ab} \times \frac{1}{1 + \frac{b}{a} + \frac{2nb}{a}} \cdot d_n$$

$= g(n)$

$$\boxed{g(n) = \frac{1}{1 + \frac{b}{a} + \frac{2nb}{a}}}$$

Q6. En exploitant la figure 5 on lit d_n maximale pour une valeur de 50 m.

Et avec Pythagore $d_1 = \sqrt{(a+b)^2 + b^2}$

AN : $d_1 = \sqrt{20{,}263^2 + 0{,}263^2} = 20$ m

$t_1 = \frac{2d_1}{c_s}$ AN : $t_1 = \frac{2.20}{340} = 0{,}12$ s.

$t_N = \frac{2d_N}{c_s}$ AN : $t_N = \frac{2.50}{340} = 0{,}29$ s

l'écho a donc une durée $\tau = t_N - t_1$

AN : $\tau = 0{,}29 - 0{,}12 = \underline{0{,}17 \text{ s}}$

Q7. Au début de l'écho on entend le

$\nu_1(t_1) = \frac{c_s}{2ab} g(1) . d_1$

on lit $g(1)d_1 = 19{,}5$

d'où $\nu_1 = \frac{340}{2.20.0{,}263} . 19{,}5 = \underline{630 \text{ Hz}}$

A la fin de l'écho, on entend le

$\nu_1(t_N) = \frac{c_s}{2ab} g(N) d_N$ avec $N = 91$
(valeur maximale
de n)

Sur le graphique, on lit $g(N)\, d_N = 14,7$ m.

D'où $\nu_1(t_N) = \dfrac{340}{2 \cdot 20 \cdot 0,263} \times 14,7 = \underline{475 \text{ Hz}}$.

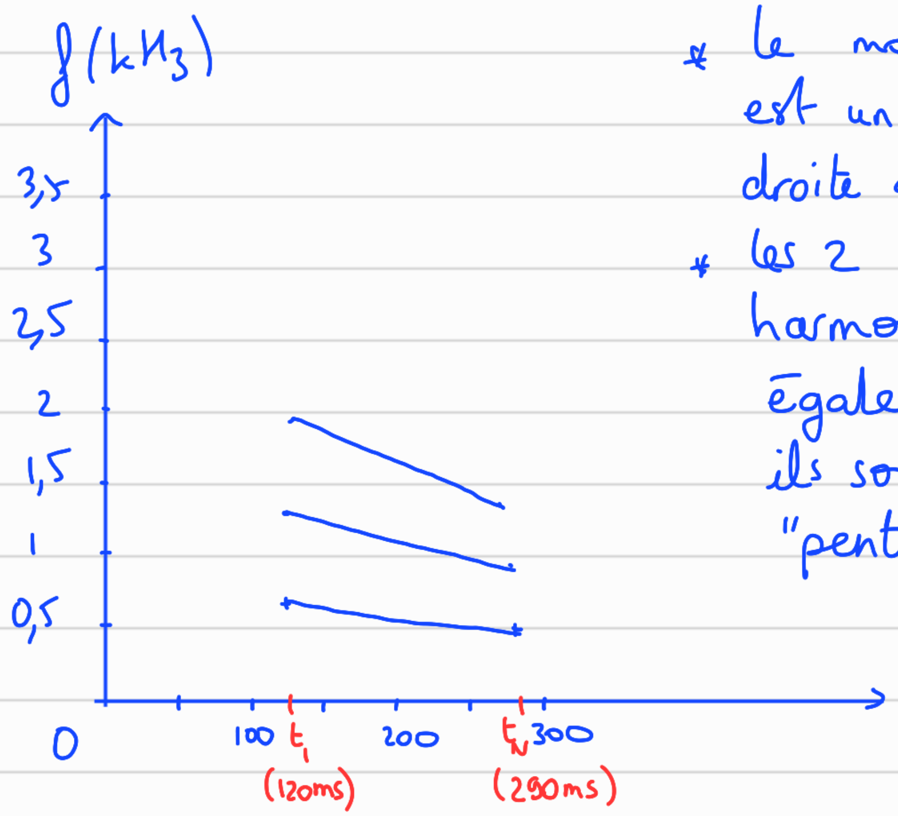
Q8. Le chant du quetzal dure approximativement $\delta t = 210 - 60 = 150$ ms

A $t = 140$ ms on lit $f_{q1} \approx 600$ Hz

$f_{q2} \simeq 1200$ Hz

$f_{q3} \simeq 1800$ Hz

Q9



* le mode fondamental est un segment de droite décroissante
* les 2 premiers harmoniques également, et ils sont plus "pentus".

Q10. On retrouve des fréquences du même ordre de grandeur et avec des sonogrammes de même allure ⇒ grande ressemblance, mais c'est difficile de conclure car d'un oiseau à un autre ou d'un jour à l'autre il peut y avoir des différences