Correction du TD12

Exercice 1 :

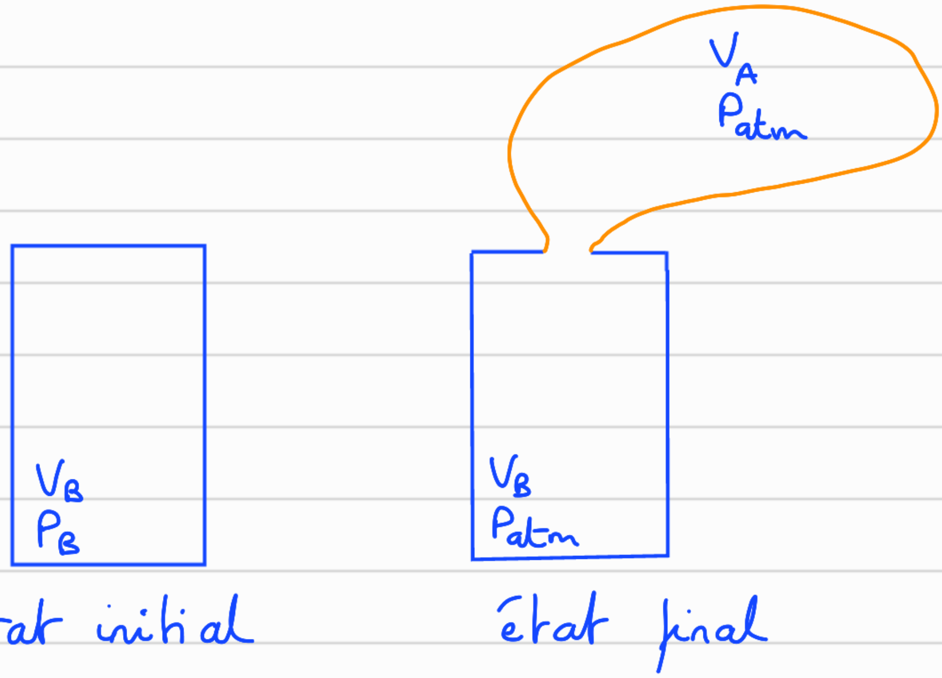
Q1. c'est la température qui varie entre les 2 situations (le pneu est supposé indilatable).
On a donc n et V constants
D'après la loi des GP : $PV = nRT$
on a donc $\frac{nR}{V} = \frac{P}{T}$

D'où $\frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f} \Rightarrow \boxed{T_f = \frac{P_i}{P_f} T_i}$

AN : $T_f = \frac{2,3}{2,1} \times (273,15 + 20) = 321 \text{ K}$

$\underline{T_f = 47,9\,°C}$

Q2.



D'après la loi des GP $PV = nRT$

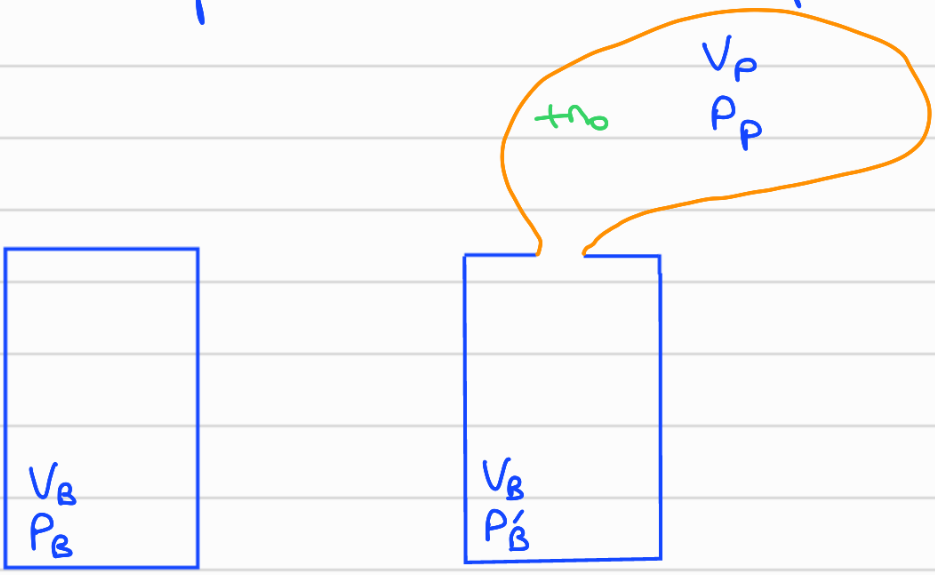
Or ici c'est la température qui est constante (et n aussi pour le système {gaz} considéré) :

$$P_B V_B = (V_A + V_B) P_{atm}$$

$$V_A = \frac{P_B V_B}{P_{atm}} - V_B = V_B \left(\frac{P_B}{P_{atm}} - 1 \right)$$

AN : $V_A = 60 \times \left(\frac{15}{1,0} - 1 \right) = \underline{840 \text{ L}}$

Q3. La température est à nouveau constante mais cette fois le volume est connu on cherche la pression.
Et le pneu contenait déjà du gaz (n_0)



état initial état final

On a donc $nRT = cte$ pour cette transformation.

Or dans l'état final $n = n_1 + n_2$

n_1 → dans la bouteille ; n_2 → dans le pneu

Et on a $P'_B V_B = n_1 RT$ (dans la bouteille)

$P_p V_p = (n_0 + n_2) RT$ (dans le pneu)

d'où $n = n_1 + n_2 = \dfrac{P'_B V_B}{RT} + \left(\dfrac{P_p V_p}{RT} - n_0\right)$

avec $n_0 RT = P_{atm} V_p$ (pneu initialement à P_{atm})

$$\Rightarrow n = \frac{P'_B V_B}{RT} + \left(\frac{P_p V_p}{RT} - \frac{P_{atm} V_p}{RT}\right)$$

$$\Rightarrow nRT = P'_B V_B + P_p V_p - P_{atm} V_p$$

$$\Rightarrow P_B V_B = P'_B V_B + P_p V_p - P_{atm} V_p$$

$$P'_B V_B = P_B V_B - P_p V_p + P_{atm} V_p$$

$$P'_B V_B = P_B V_B + V_p (P_{atm} - P_p)$$

$$P'_B = P_B + \frac{V_p}{V_B}(P_{atm} - P_p)$$

AN : $P'_B = 15 + \dfrac{50}{60}(1 - 2{,}4) = \underline{13{,}8 \text{ bar}}$

$$\Delta P = P'_B - P_B = \frac{V_P}{V_B}(P_{atm} - P_p) = 1,2 \text{ bar}.$$

On peut donc gonfler $\frac{15 - 2,4}{1,2} = 10,5$

soit 10 pneus.

Exercice 2 :

Q1. $\Delta U = m c_{v,l} \Delta T$
$= \rho_l . V . c_{v,l} \Delta T$

AN : $\Delta U = 10^3 . 0,25.10^{-3} . 4,18.10^3 (100-15)$
$= \underline{8,9 . 10^4 \text{ J}}$

Q2. $\Delta U = m c_{v,vap} \Delta T = M \times n \, c_{v,vap} \Delta T$

AN : $\Delta U = 18.10^{-3} . 1,85.10^3 (200 - 115) = \underline{6,2 . 10^3 \text{ J}}$

Q3. $\Delta U = n C_{v_m} \Delta T$

Or pour un GP monoatomique $C_{v_m} = \frac{3}{2} R$

$\rightarrow \Delta U = 1 . \frac{3}{2} . 8,314 . (35-10) = \underline{3,1.10^2 \text{ J}}$

Exercice 3 :

On étudie le système {piston} à l'équilibre mécanique dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On pose l'axe Oz vertical orienté vers le haut.

Bilan des forces sur le piston :

* poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$

* force de pression exercée par l'air extérieur : $\vec{F_{ext}} = -P_0 S\,\vec{e_z}$

* force de pression exercée par l'air intérieur : $\vec{F_{int}} = P_{int} \cdot S\,\vec{e_z}$

* la force exercée par la masse M supplémentaire $\vec{F_M} = -Mg\,\vec{e_z}$

(se détermine avec le principe des actions réciproques après avoir fait un bilan des forces sur la masse M).

* La réaction des parois du cylindre, si on suppose qu'il glisse sans frottements et que le cylindre est d'axe vertical $\vec{R} = \vec{0}$ d'après le PFD projeté sur le plan horizontal).

Situation 1 :

$$-mg + (P_1 - P_0)S = 0 \Rightarrow P_1 = \frac{mg}{S} + P_0$$

D'après la loi des GP $P_1 . \underbrace{Sh_1}_{=V_1} = nRT_0$

d'où $\left(\frac{mg}{S} + P_0\right) Sh_1 = nRT_0$

$$\Rightarrow \boxed{h_1 = \frac{nRT_0}{mg + P_0.S}}$$

Situation 2 :

$$-mg + (P_2 - P_0)S = 0 \Rightarrow P_2 = \frac{mg}{S} + P_0$$

et $P_2 . Sh_2 = nRT$

$$\Rightarrow \left(\frac{mg}{S} + P_0\right) Sh_2 = nRT$$

$$\Rightarrow \boxed{h_2 = \frac{nRT}{mg + P_0 S}}$$

Situation 3 :

Il faut inclure la force $\vec{F_n}$ dans la 1ère loi de Newton :

$$-(m+n)g + (P_3 - P_0)S = 0$$

$$P_3 = \frac{(m+n)g}{S} + P_0$$

Et on a $P_3 S h_3 = nRT$

$$\Rightarrow \left(\frac{(m+n)g}{S} + P_0\right) S h_3 = nRT$$

$$\Rightarrow \boxed{h_3 = \frac{nRT}{(m+n)g + P_0 S}}$$

Situation 4 :

On a la même équation pour l'équilibre mécanique : $P_4 = \frac{(m+n)g}{S} + P_0$

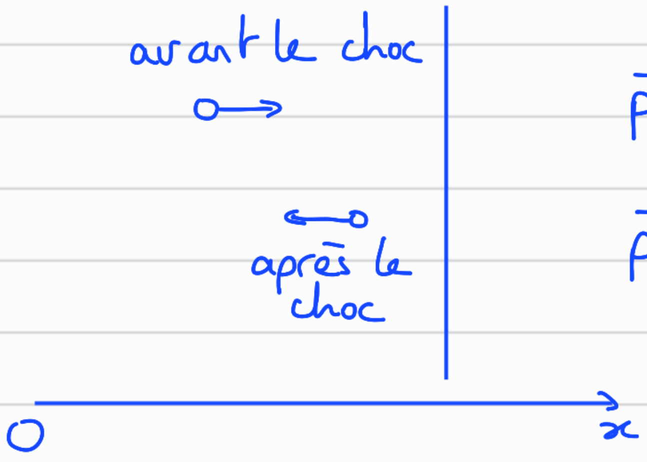
Et $P_4 S h_4 = nRT_0$

$$\left(\frac{(m+n)g}{S} + P_0\right) S h_4 = nRT_0$$

$$\boxed{h_4 = \frac{nRT_0}{(m+n)g + P_0 S}}$$

Exercice 4 :

Q1.



$$\vec{p_i} = m\vec{v_i} = mv\vec{e_x}$$

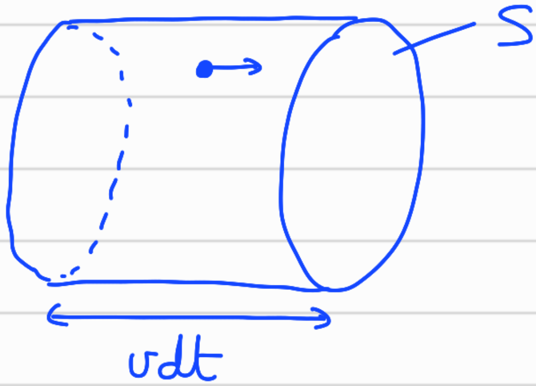
$$\vec{p_f} = m\vec{v_f} = -mv\vec{e_x}$$

$$\delta\vec{p} = \vec{p_f} - \vec{p_i} = -mv\vec{e_x} - mv\vec{e_x}$$

$$\boxed{\delta\vec{p} = -2mv\vec{e_x}}$$

Q2. Le nombre de molécules qui vont "frapper" la paroi pendant la durée dt sont celles qui étaient comprises dans le volum $S \times v\,dt$ et avaient une vitesse selon $+\vec{e_x}$, soit 1/6ème de ces molécules.

densité particulaire = nb de molécules par unité de volume : $n^* = \dfrac{N}{L^3}$ (énoncé)



$$d_n = \frac{1}{6} \times n^* \times v\,dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{N}{L^3} \cdot S v\,dt$$

Si on considère une surface carrée de côté L alors $S = L^2$ d'où

$$\boxed{dn = \frac{1}{6}\frac{N}{L} v\, dt}$$

La variation de quantité de mouvement totale est donc $\delta \vec{p_{tot}} = dn \times \delta \vec{p}$

$\Rightarrow \delta \vec{p_{tot}} = \frac{1}{6}\frac{N}{L} v\, dt . (-2mv\vec{e_x})$ pour une durée dt. Si on fait tendre dt vers 0 on obtient la dérivée de $\vec{p_{tot}}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{p_{tot}}}{dt} = -\frac{1}{3}\frac{N}{L} mv^2 \vec{e_x}}$$

Q3. En appliquant la $2^{ème}$ loi de Newton au système composé des molécules du gaz projeté dans la direction x :

$$\frac{d\vec{p_{tot}}}{dt} = \vec{F}_{paroi/gaz}$$

Or d'après le principe des actions réciproques

$$\vec{F}_{paroi/gaz} = -\vec{F}_{gaz/paroi}$$

Et d'après la définition de la pression :

$$P.S\,\vec{e_x} = \vec{F}_{gaz/paroi}$$

D'où $\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = -P.S\,\vec{e_x} = -PL^2\,\vec{e_x}$

Soit $-\frac{1}{3}\frac{N}{L}v^2\,\vec{e_x} = -PL^2\,\vec{e_x}$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{1}{3}\frac{N}{L^3}mv^2 \quad \text{et} \quad V = L^3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{1}{3}\frac{N}{V}mv^2}$$

Q4. Pour un GP monoatomique $U = \frac{3}{2}nRT$

Q5. En identifiant les 2 expressions de U :

$$\begin{cases} U = \frac{3}{2}nRT \\ U = N.\frac{1}{2}mv^2 \end{cases} \Rightarrow 3nRT = N.mv^2$$

Soit $\frac{1}{3}Nmv^2 = nRT$ d'où $\boxed{PV = nRT}$

ce qui est la loi des GP.

Exercice 5 :

Pour comprendre le comportement de la pompe, il faut s'intéresser au 1er aller-retour du piston :

* A l'intant initial :
  - la pression dans le réservoir et dans le cylindre est P_0
  - la valve K_1 est fermée
  - la valve K_2 est ouverte
  - le volume du cylindre est minimal : $V_{cyl} = V_{min}$

* Dès que le piston remonte, la pression dans le cylindre devient inférieure à P_0 donc la valve K_2 se ferme et la valve K_1 s'ouvre.

* Au cours de la remontée du piston, la quantité de matière de gaz dans l'ensemble cylindre + réservoir est constante, égale à $P_0(V+V_{min})$. Lorsque le piston est au plus haut,

on a donc : $P_1(V+V_{max}) = P_0(V+V_{min})$

Comme $V+V_{max} > V+V_{min}$, on a $P_1 < P_0$

* Au cours de la redescente du piston, la pression dans le cylindre devient supérieure à P_1 donc la valve K_1 se ferme. Le réservoir reste à P_1.

Dans le cylindre : $P_{cyl} \cdot V_{cyl} = P_1 V_{max}$.

Or on avait $P_1 = P_0 \dfrac{V+V_{min}}{V+V_{max}}$

$$\Rightarrow P_{cyl} \cdot V_{cyl} = P_0 \frac{V+V_{min}}{V+V_{max}} \cdot V_{max}$$

$$\Rightarrow P_{cyl} = P_0 \frac{V+V_{min}}{V+V_{max}} \frac{V_{max}}{V_{cyl}}$$

$\Rightarrow$ P_{cyl} augmente lorsque au cours de la descente du piston.

P_{cyl} atteint P_0 pour $V_{cyl} = V_{max} \dfrac{V+V_{min}}{V+V_{max}}$

Remarque : ce volume est supérieur à V_{min} ($V_{cyl} - V_{min} > 0$)

A cet instant la valve K_2 s'ouvre et lorsque le piston est revenu à V_{min} la pression dans le cylindre vaut P_0.

* le processus se répète à chaque aller-retour du piston avec une pression dans le réservoir qui diminue à chaque étape.

Q1. A l'instant $n\tau$:

* la pression dans le cylindre est P_0 et son volume est V_{min}

On a donc $P_0 V_{min} = nRT_0$.

le piston commence à remonter (valve K_1 étant fermée), la valve K_2 se ferme dès le début de la remontée car à la moindre dépression K_2 se ferme.

On a donc $P_{cyl} \cdot V_{cyl} = nRT_0$ (les 2 valves sont fermées)

K_1 s'ouvre lorsque $P_{cyl} = P[n]$

Soit $V_{cyl} = \dfrac{nRT_0}{P[n]}$

Or V_{cyl} ne peut dépasser V_{max}. Pour que K_1 s'ouvre, il faut donc : $\dfrac{nRT_0}{P[n]} < V_{max}$

Or $nRT_0 = P_0 V_{min} \Rightarrow \dfrac{P_0}{P[n]} < \dfrac{V_{max}}{V_{min}}$

Soit $\boxed{P[n] > P_0 \dfrac{V_{min}}{V_{max}}}$

Q2. A la date $t = n\tau$ la loi du GP donne :

$$P_0 V_{min} = x_n R T_0 \quad \text{dans le cylindre}$$

$$P[n] . V = y_n R T_0 \quad \text{dans l'enceinte}$$

avec x_n = quantité de matière de gaz dans le cylindre (volume V_{min})

y_n = quantité de matière de gaz dans l'enceinte (volume V)

Le piston remonte sans que K_2 ne s'ouvre car la pression dans le cylindre est inférieure à P_0.

Or il y a conservation de la matière au cours de la remontée du piston (K_2 étant fermée). On a donc :

$$x_n + y_n = \frac{P_0 V_{min}}{RT_0} + \frac{P[n] V}{RT_0} = \frac{P[n+1](V + V_{max})}{RT_0}$$

Soit : $(x_n + y_n) R T_0 = P_0 V_{min} + P[n] . V = P[n+1](V + V_{max})$

$$\Rightarrow \left(P[n+1] - P[n]\right)(V + V_{max}) + P[n] V_{max} = P_0 V_{min}$$

$$\Rightarrow P[n+1] - P[n] + P[n] \frac{V_{max}}{V + V_{max}} = \frac{P_0 V_{min}}{V + V_{max}}.$$

En identifiant, on obtient :

$$a = \frac{V_{max}}{V + V_{max}} \quad \text{et} \quad b = \frac{V_{min}}{V + V_{max}}$$

Q2. $\dfrac{P[n+1]-P[n]}{\tau} + \dfrac{a}{\tau} P[n] = P_0 \dfrac{b}{\tau}$

Soit pour $\tau \to 0$ $\quad \dfrac{dP(t)}{dt} + \dfrac{a}{\tau} P(t) = \dfrac{b}{\tau} P_0$

Q3. Solution : $P(t) = \dfrac{b}{a} P_0 + A e^{-\frac{at}{\tau}}$

On détermine A avec les conditions initiales : à $t=0$ $\quad P(0) = P_0$

$\Rightarrow P_0 = \dfrac{b}{a} P_0 + A \Rightarrow A = P_0\left(1 - \dfrac{b}{a}\right)$

Soit $P(t) = \dfrac{V_{min}}{V_{max}} P_0 + P_0\left(1 - \dfrac{V_{min}}{V_{max}}\right) e^{-\frac{V_{max}\, t/\tau}{V+V_{max}}}$

Q4. a) $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \dfrac{b}{a} P_0 = \dfrac{V_{min}}{V_{max}} P_0$

AN : $P(\infty) = \dfrac{1}{10} 10^5 = 10^4$ Pa.

b) On avait montré que $P[n] > \dfrac{P_0 V_{min}}{V_{max}}$

donc la pression limite est $P_{min} = P_0 \dfrac{V_{min}}{V_{max}}$

* La pompe fonctionne tant que la pression dans l'enceinte est assez élevée pour permettre l'ouverture de K.

* La pression finale dans l'enceinte est celle obtenue lorsque, quand le piston est en position haute on a $P(\infty)$.
Soit par conservation de la matière :
$P_0 V_{min} = P(\infty) V_{max}$.

c) On remplace $P[n]$ et $P[n+1]$ par $P(\infty)$

$$P[\infty] - P[\infty] + P[\infty] \cdot \frac{V_{max}}{V+V_{min}} = \frac{P_0}{V+V_{max}}$$

$$\Leftrightarrow \quad P[\infty] = P_0 \frac{V_{min}}{V_{max}}$$

Q5. D'après la relation obtenue entre $P[n+1]$ et $P[n]$ on a :

$$P[n+1] = P[n] \frac{V}{V+V_{max}} + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}}$$

et $$P[n] = P[n-1] \frac{V}{V+V_{max}} + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}}$$

d'où $$P[n+1] = P[n-1] \cdot \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^2 + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}} \left(1 + \frac{V}{V+V_{max}}\right)$$

$$P[n+1] = P[n-2] \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^3 + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}} \left(1 + \frac{V}{V+V_{max}} + \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow P[n+1] = P[0]\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n+1} + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}} \sum_{0}^{n} \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{i}$$

somme des n+1 premiers termes d'1 suite géométrique de raison q et de 1er terme a =

$$\frac{(1-q)^{n+1}}{1-q} \qquad \Rightarrow \sum_{0}^{n}\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{i} = \frac{1-\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n+1}}{1-\frac{V}{V+V_{max}}}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n+1}}{V_{max}}\left(V+V_{max}\right)$$

$$\Rightarrow P[n+1] = P_0\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n+1} + P_0 \frac{V_{min}}{V_{max}}\left(1-\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n+1}\right)$$

Soit $P[n] = P_0\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n} + P_0 \frac{V_{min}}{V_{max}}\left(1-\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n}\right)$

$$= P_0\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n} - P_0\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n} \cdot \frac{V_{min}}{V_{max}} + \frac{P_0 V_{min}}{V_{max}}$$

$$= P_0\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{n}\left(1-\frac{V_{min}}{V_{max}}\right) + P_0\frac{V_{min}}{V_{max}}$$

AN : $P[100] = 10^5\left(\frac{10^{-2}}{10^{-2}+10^{-5}}\right)^{100}(1-0{,}1) + 10^5 \cdot 0{,}1$

$$P[100] = 9.10^4 \left(\frac{10^{-2}}{10^{-2}+10^{-5}}\right)^{100} + 10^4$$

$$= 9{,}1439 . 10^4 \text{ Pa}$$

$$= \underline{0{,}914 . 10^5 \text{ Pa}} \quad \text{avec 3 c.s.}$$

Avec l'expression solution de l'équation différentielle on a :

$$P(t) = \frac{V_{min}}{V_{max}} P_0 + P_0 \left(1 - \frac{V_{min}}{V_{max}}\right) e^{-\frac{V_{max}}{V+V_{max}} t/\tau}$$

Soit $P(100\tau) = \frac{V_{min}}{V_{max}} P_0 + P_0 \left(1 - \frac{V_{min}}{V_{max}}\right) e^{-\frac{100 V_{max}}{V+V_{max}}}$

AN : $P(100\tau) = 0{,}1 . 10^5 + 10^5 (0{,}9) e^{-\frac{100 . 10^{-5}}{10^{-2}+10^{-5}}}$

$$= 9{,}1443 . 10^4 \text{ Pa}$$

$$= \underline{0{,}914 . 10^5 \text{ Pa}} \quad \text{avec 3 c.s}$$

écart relatif : $\frac{(9{,}1443 - 9{,}1439)}{9{,}1443} \times 100 = 4.10^{-3} \%$

$\Rightarrow$ très bonne corrélation entre le modèle continu et le modèle discret.

b) Il faut résoudre l'équation :

$$P_0 \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{100} \left(1 - \frac{V_{min}}{V_{max}}\right) + P_0 \frac{V_{min}}{V_{max}}$$

$$= \frac{V_{min}}{V_{max}} P_0 + P_0 \left(1 - \frac{V_{min}}{V_{max}}\right) e^{-\frac{V_{max}}{V+V_{max}} t_0/\tau}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{V}{V+V_{max}}\right)^{100} = e^{-\frac{V_{max}}{V+V_{max}} t_0/\tau}$$

$$\Leftrightarrow 100 \ln\left(\frac{V}{V+V_{max}}\right) = -\frac{V_{max}}{V+V_{max}} \cdot \frac{t_0}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_0}{\tau} = 100 \ln\left(\frac{V+V_{max}}{V}\right) \left(1 + \frac{V}{V_{max}}\right)$$

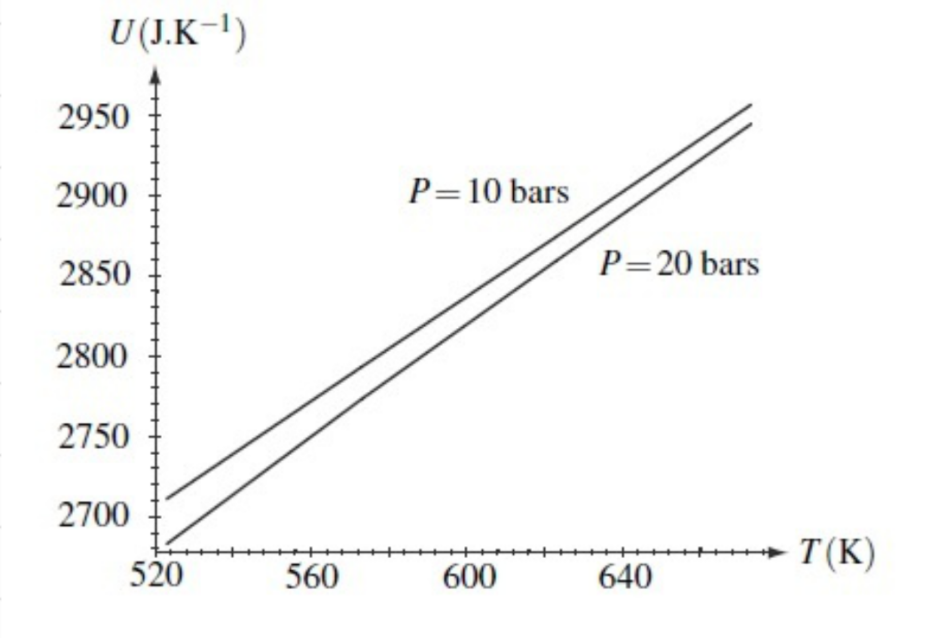
AN : $\frac{t_0}{\tau} = 100 \ln\left(\frac{10^{-2}+10^{-5}}{10^{-2}}\right)\left(1 + \frac{10^{-2}}{10^{-5}}\right)$

$$\frac{t_0}{\tau} = 100{,}05$$

$\Rightarrow$ cohérent avec ce qui précède.

Exercice 6 :

Q1.



Q2. On obtient 2 droites pour $U = f(T)$ pour ces 2 pressions, cela prouve donc que l'énergie interne de ce gaz dépend de la pression.
$\Rightarrow$ Ce n'est pas un gaz parfait, il faut tenir compte des interactions.

Q3. Capacité thermique à volume constant

$$C_v = \left.\frac{dU}{dT}\right|_V \Rightarrow \text{pente des droites.}$$

On obtient $C_v = 28\ J.mol^{-1}$ à $P = 10bars$

$C_v = 29\ J.mol^{-1}$ à $P = 20\ bars$

Pour un GP on a $C_v = \frac{3}{2}R = 12{,}5\ J.mol^{-1}$

Ici la pente est donc plus élevée du fait des vibrations et des rotations.