Correction TD 14

Exercice 1 :

Q1. $u(t) = 3\cos(\omega t + \pi/3)$

c'est la partie réelle de $\underline{u}(t) = 3e^{j(\omega t + \pi/3)}$

d'où $\underline{u} = 3e^{j\pi/3}$ de module $U_m = 3$ et

d'argument $\varphi_u = \frac{\pi}{3}$.

Q2. $s(t) = -2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

c'est la partie réelle de $\underline{s}(t) = -2e^{j(\omega t - \pi/4)}$

d'où $\underline{S} = -2e^{-j\pi/4} = 2e^{j\pi}e^{-j\pi/4} = 2e^{j\frac{3\pi}{4}}$

de module $S_m = 2$ et d'argument $\varphi_s = \frac{3\pi}{4}$.

Q3. $i(t) = 4\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right)$

or $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

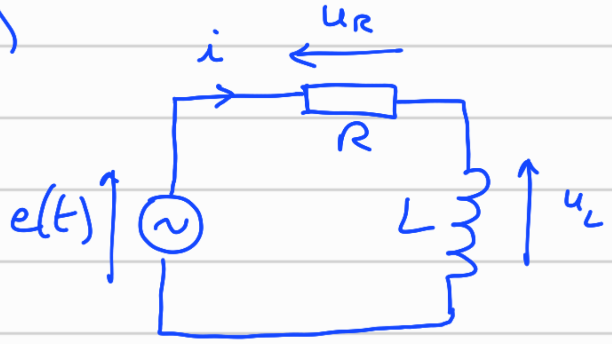
$\Rightarrow i(t) = 4\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{8}\right)$

c'est la partie réelle de $\underline{i}(t) = 4e^{j(\omega t - 3\pi/8)}$

de module $I_m = 4$ et d'argument $\varphi_i = -\frac{3\pi}{8}$

Exercice 2 :

Q1 a)



b) D'après la loi des mailles $\underline{e} = \underline{u_R} + \underline{u_L}$

$$\underline{i_1(t)} = \frac{\underline{e}}{R+jL\omega}$$

$$\underline{I_m}\, e^{j\omega t} = \frac{E e^{j(\omega t - \pi/3)}}{R+jL\omega}$$

$$\underline{I_{1m}} = \frac{E e^{-j\pi/3}}{R+jL\omega} = I_{1m}\, e^{j\varphi_i}$$

Module de $\underline{I_{1m}}$: $I_{1m} = \dfrac{E}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$

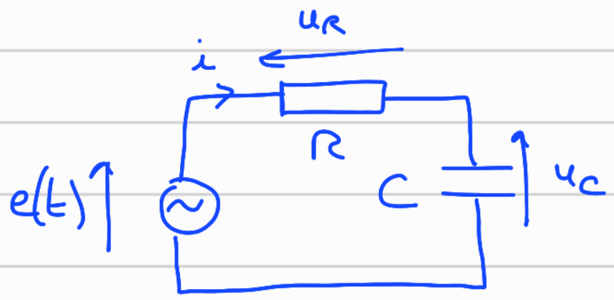
Argument de $\underline{I_{1m}}$: $\varphi_{i_1} = \arg\left(\dfrac{E e^{-j\pi/3}}{R+jL\omega}\right)$

$$\Rightarrow \varphi_{i_1} = -\frac{\pi}{3} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{I_{1m}} = \frac{E}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\, e^{-j\left(\frac{\pi}{3} + \arctan\frac{L\omega}{R}\right)}$$

d'où $\boxed{i_1(t) = \dfrac{E}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{3} - \arctan \dfrac{L\omega}{R}\right)}$

Q2. a)



b) D'après la loi des mailles :

$$\underline{e} = \underline{u_R} + \underline{u_c}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{i_2} = \frac{\underline{e}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{I_{2m}} = \frac{E e^{-j\pi/3}}{R - \frac{j}{C\omega}}$$

de module $\quad I_{2m} = \dfrac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}$

et d'argument $\quad \varphi_{i_2} = \arg\left(\dfrac{E e^{-j\pi/3}}{R - \frac{j}{C\omega}}\right)$

$$\varphi_{i_2} = -\frac{\pi}{3} - \arctan\left(\frac{-1}{RC\omega}\right) = -\frac{\pi}{3} + \arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$

Soit $\quad \underline{I_{2m}} = \dfrac{E}{\sqrt{R^2 + 1/C^2\omega^2}} \, e^{j\left(-\frac{\pi}{3} + \arctan\frac{1}{RC\omega}\right)}$

$$\Rightarrow \boxed{i_2(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3} + \arctan\frac{1}{RC\omega}\right)}$$

c) $u_c(t) = Re(\underline{u_c})$

et $\underline{u_c} = \underline{Z_c}\ \underline{i_2} = \frac{1}{jC\omega} \frac{Ee^{-j\pi/3}}{R - \frac{j}{C\omega}} e^{j\omega t}$

$$\underline{u_c} = \frac{Ee^{-j\pi/3}}{1 + jRC\omega} e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{U_{cm}} = \frac{Ee^{-j\pi/3}}{1 + jRC\omega}$$

de module $U_{cm} = \frac{E}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}$

et d'argument $\varphi_{u_c} = \arg\left(\frac{Ee^{-j\pi/3}}{1 + jRC\omega}\right)$

$$\varphi_{u_c} = -\frac{\pi}{3} - \arctan\left(\frac{RC\omega}{1}\right)$$

$$\varphi_{u_c} = -\frac{\pi}{3} - \arctan(RC\omega)$$

$$\boxed{u_c(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3} + \arctan RC\omega\right)}$$

Q3. $e(t) = E\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = E\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$

$$e(t) = E\cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

ce qui donne $u_c(t) = \frac{E}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6} + \arctan RC\omega\right)$

(ou bien remplacer cos par sin).

Exercice 3 :

Q1. Deux dipôles sont équivalents si leurs impédances complexes (ou leurs admittances) sont égales :

$$\frac{1}{R+jL\omega} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{jL'\omega} = \frac{jL'\omega + R'}{jR'L'\omega}$$

$$\frac{R-jL\omega}{R^2+L^2\omega^2} = \frac{L'\omega - jR'}{R'L'\omega}$$

On identifie les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} \dfrac{R}{R^2+L^2\omega^2} = \dfrac{L'\omega}{R'L'\omega} = \dfrac{1}{R'} \\ \dfrac{L\omega}{R^2+L^2\omega^2} = \dfrac{R'}{R'L'\omega} = \dfrac{1}{L'\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R' = \frac{R^2+L^2\omega^2}{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{L' = \frac{R^2+L^2\omega^2}{L\omega^2}}$$

Q2. On a donc $RR' = L'L\omega^2$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{RR'}{LL'}$$

Pour $\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'} \Rightarrow \omega^2 = \left(\frac{R}{L}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{R}{L}}$

Exercice 4 :

Q1.

$T(s)$	$\omega(rad.s^{-1})$	$I_m(A)$	$U_m(V)$	$Z_{AB}(\Omega)$
4.10^{-3}	$1,57.10^3$	0,20	8,0	40

$T = 4\,div \times 1\,ms/div = 4.10^{-3}\,s$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{4.10^{-3}} = 1,57.10^3\ rad.s^{-1}$

$U_{Rm} = 2\,div \times 2V/div = 4\,V$

$\Rightarrow I_m = \dfrac{U_{Rm}}{R} = \dfrac{4}{20} = 0,2\,A$

$U_m = 4\,div \times 2V/div = 8V$

$Z_{AB} = \dfrac{U_m}{I_m} = \dfrac{8}{0,2} = 40\ \Omega$

Q2. u_{II} atteint son maximum avant u_I
donc u_{II} est en avance sur u_I.
(donc e est en avance sur i)

Q3. le déphasage entre la tension e et le courant se calcule avec :
$\varphi_e - \varphi_i = 0 - (-\varphi) = \varphi$.
Analyse des courbes : $\varphi = \dfrac{0,5\,div}{4\,div} \times 2\pi$

$\Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$

Sachant que u est en avance sur i (Q2), on a $\varphi_e > \varphi_i$ donc $\boxed{\varphi = +\pi/4}$

Q4. On note R_{AB} est la partie réelle de $\underline{Z_{AB}}$

On a $|\underline{Z_{AB}}| = 40\,\Omega$

et $\arg(\underline{Z_{AB}}) = \dfrac{\pi}{4}$

donc $\underline{Z_{AB}} = 40\, e^{j\pi/4}$

d'où $R_{AB} = 40 \cos \dfrac{\pi}{4}$ (partie réelle de $\underline{Z_{AB}}$)

AN : $R_{AB} = 40 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \underline{28,3\,\Omega}$

Si la résistance de la bobine était nulle nulle, le terme résistif serait totalement dû à la résistance R, et on aurait $R_{AB} = R = 20\,\Omega$. Comme ce n'est pas le cas, la résistance interne de la bobine n'est pas nulle.

Et $R_{AB} = R + r \Rightarrow r = R_{AB} - r$

Soit $\underline{r = 8,3\,\Omega}$

Q6. le dipôle AB a donc une impédance complexe égale à :

$$\underline{Z_{AB}} = R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = |\underline{Z_{AB}}|\, e^{j\varphi}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(\underline{Z_{AB}}) = L\omega - \frac{1}{C\omega} = |\underline{Z_{AB}}| \sin\varphi$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{\omega}\left(|\underline{Z_{AB}}| \sin\varphi + \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{|\underline{Z_{AB}}| \sin\varphi}{\omega} + \frac{1}{C\omega^2}$$

AN : $$L = \frac{40 \times \sqrt{2}/2}{1,57.10^{3}} + \frac{1}{10^{-5}(1,57.10^{3})^2}$$

$$L = 59.10^{-3}\ H = \underline{59\ mH}$$

Exercice 5 :

* Sur la courbe ϕ_u on lit $\omega_0 = 22,5\ Hz$ (valeur pour laquelle $\phi_u = -\pi/2$

* Sur la courbe U_{cm} on lit $\omega_r = 18\ Hz$.

Or $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 1/2Q^2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$\frac{1}{2Q^2} = 1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2\left(1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2\right)}}}$$

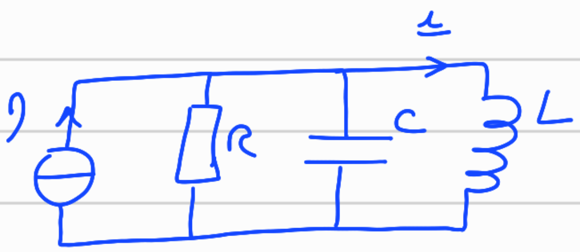
Soit $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2\left(1-\left(\frac{18}{22,5}\right)^2\right)}} = \underline{1,19}$

On retrouve aussi Q avec la relation $U_{cm}(\omega_0) = Q\, U_{cm}(0)$

Ici $\left.\begin{array}{l} U_{cm}(\omega) \simeq 0,0058 \text{ V} \\ U_{cm}(0) = 0,05 \text{ V} \end{array}\right\} Q = \dfrac{0,058}{0,05} = 1,16$

Exercice 6 :

Q1.



On fait un pont diviseur de courant :

$$\underline{i} = \underline{\eta} \, \frac{\underline{Y_L}}{\underline{Y_L} + \underline{Y_C} + \underline{Y_R}}$$

$$\underline{I_m} e^{j\omega t} = \eta_m e^{j\omega t} \, \frac{1/jL\omega}{1/jL\omega + jC\omega + 1/R}$$

$$\boxed{\underline{I_m} = \eta_m \, \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega}}$$

Q2. $A(\omega) = \dfrac{I_m}{\eta_m} = \dfrac{|\underline{I_m}|}{\eta_m}$

Soit $\boxed{A(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}}}$

Q3. Comme dans le cours on pose $x = \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q\omega_0 = \dfrac{R}{L}$

Soit $Q = \dfrac{R}{L} \times \sqrt{LC} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

Ce qui donne :

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + \frac{x}{Q^2}}} = \left[(1-x)^2 + \frac{x}{Q^2}\right]^{-1/2}$$

$$A'(x) = -\frac{1}{2}\left[2(-1)(1-x) + \frac{1}{Q^2}\right] \times \underbrace{\left[(1-x)^2 + \frac{x}{Q^2}\right]^{-3/2}}_{\text{toujours} > 0}$$

$A'(x)$ est du signe de $2(1-x) - \dfrac{1}{Q^2}$

* $A'(x_m) = 0 \iff 2 - 2x_m - \dfrac{1}{Q^2} = 0$

$$x_m = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cet extrémum existe si $1-\frac{1}{2Q^2}>0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2Q^2}<1 \Leftrightarrow Q^2>\frac{1}{2} \Leftrightarrow Q>\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{R>\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

* Si $Q<\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad -\frac{1}{Q^2}<-2$

et $2(1-X)<2$

$\Rightarrow \quad 2(1-X)-\frac{1}{Q^2}<0$

donc $A'(X)<0$ pour tout X

$A(\omega)$ est décroissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$

* Si $Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$ il y a un extremum en

$$X_m=1-\frac{1}{2Q^2}$$

$A'(X)<0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(1-X)-\frac{1}{Q^2}<0$

$$2(1-X)<\frac{1}{Q^2}$$

$$1-X<\frac{1}{2Q^2}$$

$$-X<\frac{1}{2Q^2}-1$$

$$X>1-\frac{1}{2Q^2}=X_m$$

et $A'(X)>0$ pour $X<X_m$

$A(X)$ est croissante sur l' intervalle $[0, X_m]$

et décroissante sur l' intervalle $[X_m, +\infty[$

$$X_m = 1 - \frac{1}{2Q^2} \quad \text{avec} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\text{et} \quad X_m = \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2 = \omega_r^2 . LC$$

$$\text{D'où} \quad \omega_r^2 . LC = 1 - \frac{L}{2R^2C}$$

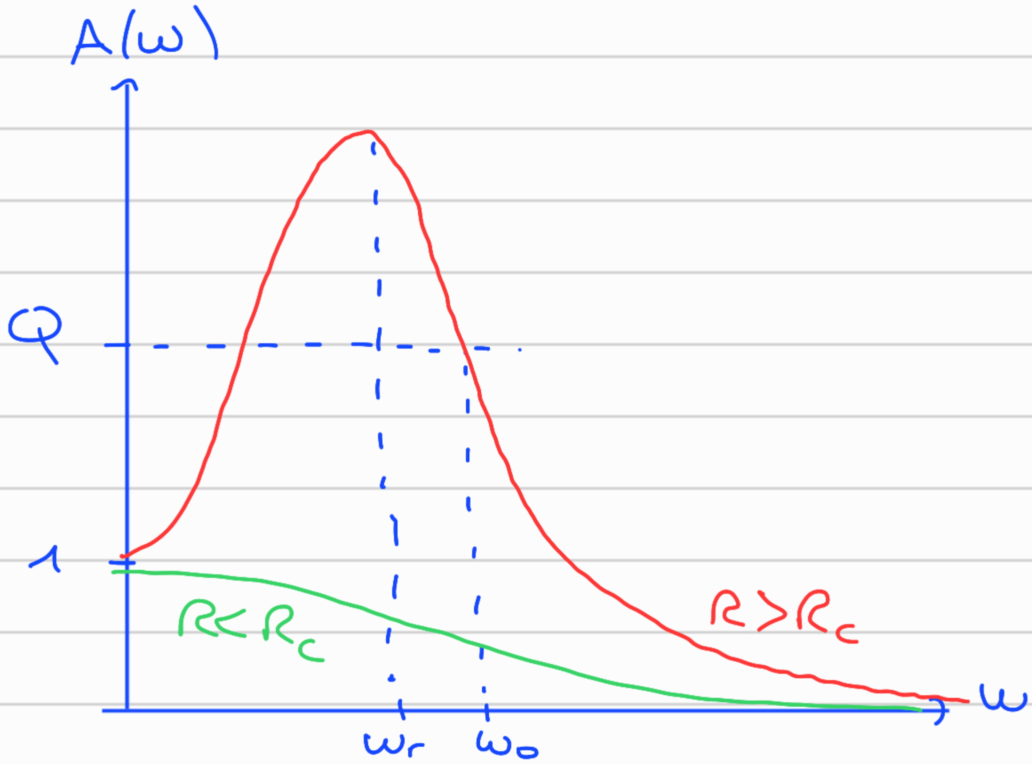
$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{L}{2R^2C}}$$

ω_r existe si et seulement si $\frac{L}{2R^2C} < 1$

$$\frac{2R^2C}{L} > 1 \qquad R^2 > \frac{L}{2C} \qquad \boxed{R > \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Q4. $A(0) = 1$

$$A(\omega_0) = A(X=1) = Q$$



A(ω)
Q
1
R<Rc
R>Rc
ω
ωr
ω0

Exercice 7 :

Q1. $$\underline{Y_{eq}} = jC\omega + \frac{1}{R+jL\omega} = \frac{jC\omega(R+jL\omega)+1}{R+jL\omega}$$

$$\underline{Y_{eq}} = \frac{1-LC\omega^2+jRC\omega}{R+jL\omega}$$

$$\boxed{\underline{Z_{eq}} = \frac{R+jL\omega}{1-LC\omega^2+jRC\omega}}$$

Q2. $$\underline{Z_{eq}} = \frac{1+j\frac{L}{R}\omega}{\frac{1}{R}-\frac{L}{R}C\omega^2+jC\omega}$$

or $\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0}$ $$\Rightarrow \underline{Z_{eq}} = \frac{1+jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{1}{R}-\frac{LC\omega^2}{R}+jC\omega}$$

or $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ $$\Rightarrow \underline{Z_{eq}} = \frac{1+jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\frac{1}{R}\,jRC\omega}$$

avec $RC = \frac{L\omega_0}{Q} \times \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{Q\omega_0}$

$$\Rightarrow \underline{Z_{eq}} = R\,\frac{1+jQ\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Soit $$\boxed{\underline{Z_{eq}} = R\,\frac{1+jQx}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}}$$

Q3. $|Z_{eq}| = R \dfrac{\sqrt{1+Q^2x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$

On pose $u = x^2$: $|Z_{eq}| = R\sqrt{\dfrac{1+Q^2u}{(1-u)^2+\frac{u}{Q^2}}}$

On pose $f(u) = \dfrac{1+Q^2u}{(1-u)^2+\frac{u}{Q^2}}$

$|Z_{eq}| = R f^{1/2}(u)$

donc $|Z_{eq}|' = \frac{1}{2} R f'(u) \underbrace{f^{-1/2}(u)}_{>0}$

donc $|Z'_{eq}|$ est du signe de $f'(u)$

$$f'(u) = \frac{Q^2\left((1-u)^2 + u/Q^2\right) - (1+Q^2u)\left(-2(1-u)+1/Q^2\right)}{\left[(1-u)^2+\frac{u}{Q^2}\right]^2}$$

$f'(u)$ s'annule pour

$$Q^2(1-u)^2 + u + (1+Q^2u)\left(2(1-u)-\frac{1}{Q^2}\right) = 0$$

$$Q^2 + Q^2u^2 - 2Q^2u + u + (1+Q^2u)\left(2-2u-\frac{1}{Q^2}\right) = 0$$

$$Q^2 + Q^2u^2 - \cancel{2Q^2u} \cancel{+u} + 2 - 2u - \frac{1}{Q^2} + \cancel{2Q^2u} - 2Q^2u^2 \cancel{-u} = 0$$

$$Q^2 - Q^2u^2 + 2 - 2u - \frac{1}{Q^2} = 0$$

$$Q^4 - Q^4u^2 + 2Q^2 - 2Q^2u - 1 = 0$$

$$Q^4u^2 + 2Q^2u + 1 - 2Q^2 - Q^4 = 0$$

$$\Delta = 4Q^4 - 4Q^4(1 - 2Q^2 - Q^4) = 4Q^4(2Q^2 + Q^4)$$

$$u = \frac{-2Q^2 + 2Q^2\sqrt{Q^4 + 2Q^2}}{2Q^4} \qquad (u > 0)$$

$$u = \frac{\sqrt{Q^4 + 2Q^2} - 1}{Q^2}$$

Cette solution est valable si $\sqrt{Q^4 + 2Q^2} > 1$

$\Leftrightarrow Q^4 + 2Q^2 - 1 > 0$

On pose $Q^2 = X$: $X^2 + 2X - 1 > 0$

$\Delta = 4 + 4 = 8$

Ce polynôme est positif "à l'extérieur" des racines, soit pour $X > \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow$ Il y a un extrémum si $\underline{Q^2 > \sqrt{2} - 1}$

Q4. $u = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{\sqrt{Q^4+2Q^2}-1}{Q^2}$

$$\boxed{\omega_r = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{\sqrt{Q^4+2Q^2}-1}}$$

Q5 $\lim\limits_{\omega \to 0} |\underline{Z_{eq}}| = R$ (x tend aussi vers 0)

$\lim\limits_{\omega \to +\infty} |\underline{Z_{eq}}| = 0$ (x tend aussi vers $+\infty$)

$|\underline{Z_{eq}}|$ étant positive, avec 1 seul extrémum $\Rightarrow$ il s'agit d'un maximum.

* Si $Q < \sqrt{\sqrt{2}-1}$ $\Rightarrow$ $|\underline{Z_{eq}}|$ décroît de façon monotone sur l'intervalle $[0; +\infty[$

* Si $Q > \sqrt{\sqrt{2}-1}$ $\Rightarrow$ $|\underline{Z_{eq}}|$ passe par un maximum pour $\omega = \omega_r$, puis décroît jusqu'à 0.

Q6. On a $\underline{e} = \underline{Z_{eq}}\,\underline{i}$ donc $E = |\underline{Z_{eq}}|\, I$

$\Rightarrow I = \frac{E}{Z_{eq}}$ donc les variations d'intensité sont opposées aux variations de $|\underline{Z_{eq}}|$ $\Rightarrow$ phénomène d'antirésonance pour l'intensité.

Q7. $\lim_{Q \to +\infty} \omega_r = \omega_0$

On a alors $\frac{\omega_r}{\omega_0} = 1$ soit $x = 1$

et $|\underline{Z_{eq}}| = R \frac{\sqrt{1+Q^2x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} = R \frac{\sqrt{1+Q^2}}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}}$

$|\underline{Z_{eq}}| \simeq R\sqrt{Q^2+Q^4} \simeq RQ^2.$

Exercice 8 :

Q1. On étudie le système {moteur} assimilé à un point matériel de masse m, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

* poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$
* force de rappel élastique : $\vec{F_{el}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_z}$
* force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{z}\vec{u_z}$
* force supplémentaire modélisant le fonctionnement du moteur : $\vec{F} = F_0 \cos(\omega t)\vec{u_z}$

A l'équilibre (moteur éteint) $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{F} = \vec{0}$.

Le principe d'inertie projeté sur (Oz) donne :

$$-mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$$

Q2. Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f_{el}} + \vec{f} + \vec{F}$$

$$m\ddot{z}\vec{u_z} = -mg\vec{u_z} - k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u_z} - \alpha\dot{z}\vec{u_z} + F_0\cos(\omega t)\vec{u_z}$$

soit $m\ddot{z} = -mg - k(\ell(t) - \ell_0) - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t)$

or $\ell(t) = \ell_{eq} + z = \ell_0 - \frac{mg}{k} + z \Rightarrow \ell(t) - \ell_0 = z - \frac{mg}{k}$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = -\cancel{m}g - kz + \cancel{m}g - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = -kz(t) - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t)$$

D'où l'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_0}{m}\cos\omega t}$$

Q3. On pose $v(t) = V_0\cos(\omega t + \phi)$

soit $\underline{v}(t) = \underline{V}\, e^{j\omega t}$ avec $\underline{V} = V_0 e^{j\phi}$

On a donc $\underline{\ddot{z}} = j\omega \underline{v}$

et $\underline{z} = \frac{1}{j\omega} \underline{v}$

L'équation différentielle en complexe est :

$$\underline{\ddot{z}} + \frac{\alpha}{m} \underline{\dot{z}} + \frac{k}{m} \underline{z} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

$$j\omega \underline{v} + \frac{\alpha}{m} \underline{v} + \frac{k}{j\omega m} \underline{v} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

$$\left(j\omega + \frac{\alpha}{m} + \frac{k}{j\omega m}\right) \underline{V} = \frac{F_0}{m}$$

D'où $\underline{V} = \dfrac{F_0/m}{j\omega + \frac{\alpha}{m} - j\frac{k}{\omega m}}$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{\alpha}{m} = 2\lambda$

$$\underline{V} = \frac{F_0/m}{2\lambda + j\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)}$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$\underline{V} = \frac{F_0/m}{2\lambda + j\omega_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Q5 $V_0(\omega) = |\underline{V}| = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{4\lambda^2 + \omega_0^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

Cette expression est de la forme de l'intensité dans le RLC série.

$\lim_{\omega \to 0} V_0 = 0$

$\lim_{\omega \to +\infty} V_0 = 0$

et V_0 est maximale pour $\omega = \omega_0$

(dénominateur minimal)

Q6. Avec les valeurs proposées on détermine les pulsations propres :

* $\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 632 \text{ rad.s}^{-1}$ $\Rightarrow$ proche de ω

l'amplitude des vibrations sera donc importante.

* $\omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} = 316 \text{ rad.s}^{-1}$ $\Rightarrow$ plus éloigné

de ω donc ce choix paraît plus pertinent.
(Pour une étude complète il faudrait étudier la largeur de la bande passante, ce qui nécessite de connaître α).

Exercice 9 :

On étudie le système {masse m placée en M} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

D'après le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe Oz, dont l'origine est prise à la position d'équilibre

$$m\ddot{z} = -k(\ell(t) - \ell_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_0(t)) - mg$$

A l'équilibre $0 = -k(\ell_{eq} - \ell_0) - mg$

$$\Rightarrow \ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

De plus $\ell(t) = \ell_{eq} + z(t) - z_0$

$$= \ell_0 - \frac{mg}{k} + z(t) - z_0$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = -k\left(z(t) - z_0 - \frac{mg}{k}\right) - h(\dot{z} - \dot{z}_0) - mg$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = -k(z - z_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_0)$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_0 + \frac{h}{m}\dot{z}_0$$

$$= \frac{k}{m}\left(a\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right) - \frac{h}{m}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

or $x = vt$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{ak}{m}\cos\left(\frac{2\pi v}{\lambda}t\right) - \frac{2\pi a h}{\lambda m}\sin\left(\frac{2\pi v}{\lambda}t\right)$$

On pose $\omega = \dfrac{2\pi v}{\lambda}$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{ak}{m}\cos(\omega t) - \frac{2\pi a h}{\lambda m}\sin(\omega t)$$

On utilise la notation complexe pour résoudre cette équation différentielle avec une excitation de forme sinusoïdale :

On pose $\underline{z} = z_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \underline{Z} e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z} = z_m e^{j\varphi}$

Avec cette notation :

$$\ddot{\underline{z}} = -\omega^2 \underline{Z} e^{j\omega t} = -\omega^2 \underline{z}$$

$$\dot{\underline{z}} = j\omega \underline{Z} e^{j\omega t} = j\omega \underline{z}$$

$$\underline{z_0} = a e^{j\omega t}$$

$$\dot{\underline{z_0}} = a j\omega e^{j\omega t} = j\omega \underline{z_0}$$

L'équation différentielle devient :

$$-\omega^2 \underline{z} + \frac{h}{m} j\omega \underline{z} + \frac{k}{m}\underline{z} = a e^{j\omega t}\left(\frac{k}{m} + \frac{h}{m} j\omega\right)$$

$$\underline{z}\left(\frac{k}{m} + j\omega\frac{h}{m} - \omega^2\right) = a^{ej\omega t}\left(\frac{k}{m} + j\omega\frac{h}{m}\right)$$

Soit $\underline{Z} = a\dfrac{k/m + j\omega\, h/m}{k/m + j\omega\, h/m - \omega^2} = a\dfrac{k + j\omega h}{k + j\omega h - m\omega^2}$

Module $|\underline{Z}| = a\sqrt{\dfrac{k^2+(\omega h)^2}{(k-m\omega^2)^2+(\omega h)^2}}$

limites BF et HF :

* Pour $\omega \to 0$ $\quad |\underline{Z}| \to a$
* Pour $\omega \to +\infty$ $\quad |\underline{Z}| \to 0$

$$|\underline{Z}| = a\sqrt{\frac{1+\left(\omega\frac{h}{k}\right)^2}{\left(1-\frac{m\omega^2}{k}\right)^2+\omega^2\left(\frac{h}{k}\right)^2}}$$

On pose $\omega_0^{\,2} = \dfrac{k}{m}$

$$|\underline{Z}| = a\sqrt{\frac{1+\omega^2\left(\frac{h}{m\omega_0^2}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\omega^2\left(\frac{h}{m\omega_0}\right)^2}}$$

$$|\underline{Z}| = a\sqrt{\frac{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\,\frac{h^2}{m^2\omega_0^2}}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\,\frac{h^2}{m^2\omega_0^2}}}$$

On pose $Q = \dfrac{m\omega_0}{h}$ et $X = \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

$$|\underline{Z}| = a\sqrt{\frac{1+X/Q^2}{(1-X)^2+\frac{X}{Q^2}}} = a\left(1+\frac{X}{Q^2}\right)^{1/2}\left((1-X)^2+\frac{X}{Q^2}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{d|Z|}{dX} = a\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Q^2}\left(1+\frac{X}{Q^2}\right)^{-1/2}\cdot\left((1-X)^2+\frac{X}{Q^2}\right)^{-1/2}$$

$$+\,a\left(1+\frac{X}{Q^2}\right)^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-2(1-X)+\frac{1}{Q^2}\right)\left((1-X)^2+\frac{X}{Q^2}\right)^{-3/2}$$

$$=\underbrace{\frac{a}{2Q^2}\left((1-X)^2+\frac{X}{Q^2}\right)^{-3/2}(1+X)^{-1/2}}_{>0}\left[\left[(1-X)^2+\frac{X}{Q^2}\right]+\left[2(1-X)-\frac{1}{Q^2}\right]Q^2\times\left(1+\frac{X}{Q^2}\right)\right]$$

donc $\frac{d|Z|}{dx}$ est du signe de :

$$A = (1-x)^2+\frac{x}{Q^2}+\left(2-2x-\frac{1}{Q^2}\right)\left(1+\frac{x}{Q^2}\right)Q^2$$

$$= (1-X)^2+\frac{X}{Q^2}+\left(2-2X-\frac{1}{Q^2}\right)\left(Q^2+X\right)$$

$$= \cancel{1}+X^2-\cancel{2X}+\cancel{\frac{X}{Q^2}}+2Q^2+\cancel{2X}-2XQ^2-2X^2-\cancel{1}-\cancel{\frac{X}{Q^2}}$$

$$= -X^2-2Q^2X+2Q^2$$

$$\Delta = 4Q^4+8Q^2 = 4Q^2(Q^2+2)$$

$$X_r = \frac{2Q^2-2Q\sqrt{Q^2+2}}{-2} = Q\sqrt{Q^2+2}-Q^2$$

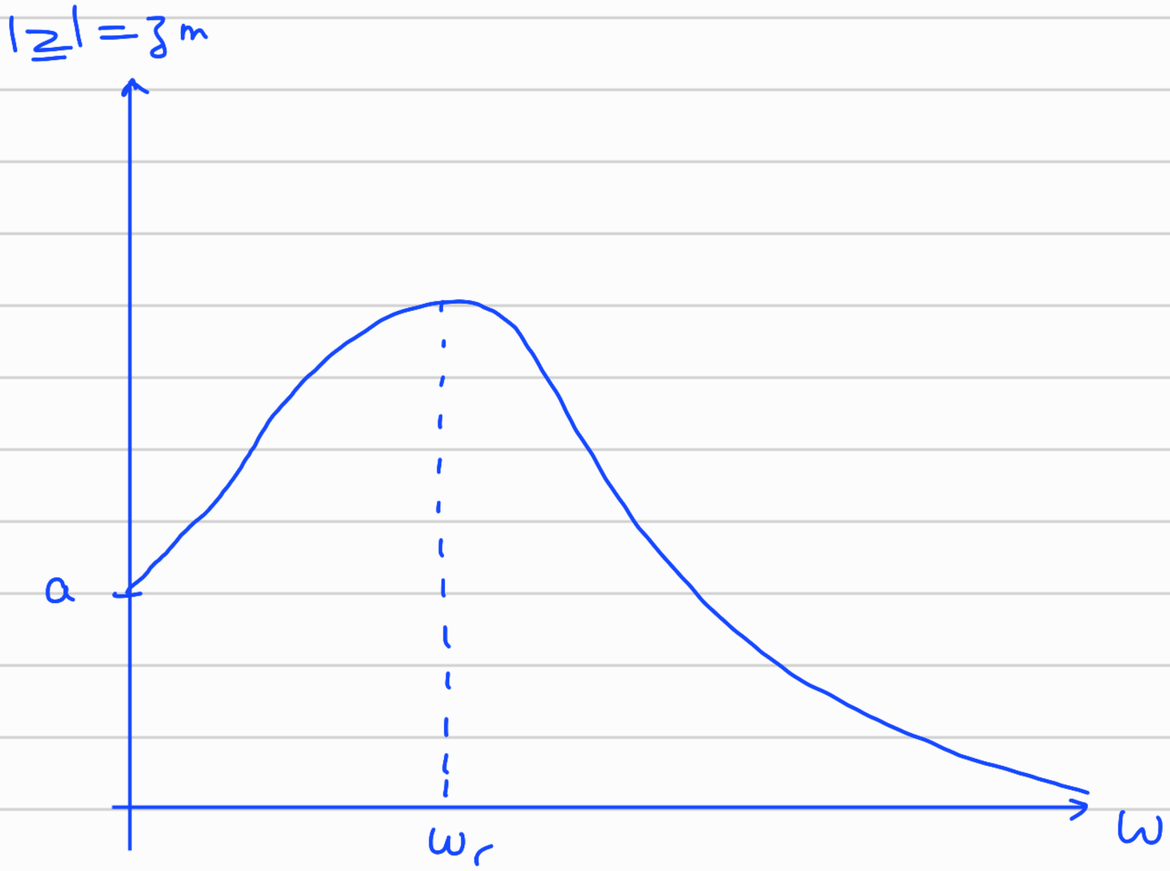
$$\left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2 = Q\sqrt{Q^2+2}-Q^2 = Q^2\left(\frac{1}{Q}\sqrt{Q^2+2}-1\right) = Q^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{Q^2}}-1\right)$$

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 Q\sqrt{\sqrt{1+\frac{2}{Q^2}}-1}}$$

Sachant qu'un polynôme de degré 2 est du signe de "a" à l'extérieur des racines, on peut dire que A est positif pour $X < X_r$ et négatif pour $X > X_r$.

La fonction $|\underline{Z}(\omega)|$ est donc croissante sur $[0, \omega_r]$ et décroissante sur $[\omega_r, +\infty[$

$|\underline{Z}(0)| = a$ et $\lim\limits_{\omega \to +\infty} |\underline{Z}| = 0$ d'où :



Pour minimiser l'amplitude des oscillations il faut donc rouler à vitesse élevée : $\omega \gg \omega_r$ (on rappelle que $\omega = \frac{2\pi v}{d}$).

Remarque : en roulant à vitesse constante ω augmente lorsque d diminue.