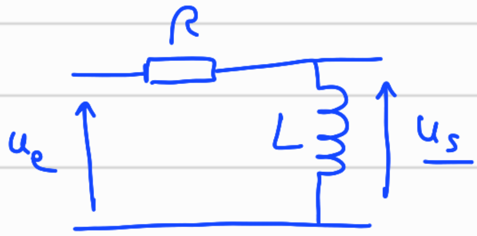
Correction du TD 15

Exercice 1 :

Q1.



* À basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil donc $\underline{u_s}$ est nulle.
  ⇒ le filtre coupe les basses fréquences.

* À haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert donc $\underline{u_s} = \underline{u_e}$
  ⇒ le filtre transmet les hautes fréquences.

⇒ Fitre passe-haut.

Q2. $$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{L\omega}}$$

Q3. Proposition b.

Q4. La pulsation de coupure est définie par $G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

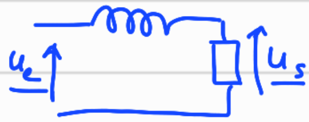
avec $$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}$$

$$G_{max} = \lim_{\omega \to +\infty} G = 1$$

D'où l'équation $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{L^2\omega_c^2}}}$

$$2 = 1 + \frac{R^2}{L^2\omega_c^2} \Rightarrow \frac{R^2}{L^2\omega_c^2} = 1$$

$$\boxed{\omega_c = \frac{R}{L}}$$

Q5. * circuit de l'étudiant 1 : 

BF : $u_s = u_e$
HF : $u_s = 0$ } passe bas donc courbe ⓒ

* circuit de l'étudiant 2 : $R = 0{,}10\,k\Omega$
donc $\omega'_c = 0{,}10\,\omega_c$
filtre passe haut avec 1 fréquence de coupure à -3 dB 10 fois plus basse : courbe ⓐ

et asymptote BF = pente à $+20$ dB/dec
car $G_{dB} = 20 \log G = -20 \log\left(1+\frac{R^2}{L^2\omega^2}\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow G_{dB} = -10 \log\left(1+\frac{R^2}{L^2\omega^2}\right)$$

$$\lim_{\omega \to 0} G_{dB} = -20 \log\left(\frac{R}{L}\right) + 20 \log(\omega)$$

* circuit de l'étudiant 3 : courbe ⓑ.

(Courbe ⓓ : pente à $+40$ dB/dec ⇒ filtre du

2^{nd} ordre, pas étudié ici).

Q6. $L = \frac{R}{\omega_c}$ et sur le diagramme de Bode ⓑ on lit $\omega_c = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$

$\Rightarrow L = \frac{10^3}{10^3} = \underline{1{,}0 \text{ H}}$

Q7. A basse pulsation $\omega \to 0$ $\underline{H} \simeq j\frac{L\omega}{R}$
donc la phase vaut $\frac{\pi}{2}$

Q8. En notant $\omega_0 = 1.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ on a $\underline{H} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$

Pour $\omega \ll \omega_0$ on a $\underline{H} \simeq j\frac{\omega}{\omega_0}$

Donc $\underline{u_s} = \frac{1}{\omega_0} j\omega \underline{u_e} = \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e}{dt}$

$\Rightarrow$ A très basse fréquence, ce filtre a un comportement dérivateur.

En sortie on aura donc un signal créneau.

Q9. signal d'entrée complexe, de pulsation ω_0 :

$\underline{u_e} = E e^{j\pi/4} e^{j\omega_0 t}$

avec $\omega_0 = R/L$, soit $\underline{H} = \frac{j\,\omega/\omega_0}{1 + j\,\omega/\omega_0}$

Pour $\omega = \omega_0$ on a donc $\underline{H} = \dfrac{j}{1+j}$

$$\underline{u_s} = E e^{j\pi/4} e^{j\omega_0 t} \cdot \frac{j}{1+j}$$

avec $j = e^{j\pi/2}$ et $1+j = e^{j\pi/4}$

$$\Rightarrow \quad \underline{u_s} = E e^{j\pi/4} e^{j\omega_0 t} e^{j\pi/2} e^{-j\pi/4}$$

$$\underline{u_s} = E e^{j\pi/2} e^{j\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \quad u_s = E\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{u_s = -E\sin(\omega_0 t)}$$

Q 10. $\omega_1 = \dfrac{\omega_0}{10}$ donc $\omega_1 \ll \omega_0$

$\omega_2 = 10\omega_0$ donc $\omega_2 \gg \omega_0$

Et $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

donc $\underline{H}(j\omega_1) = \dfrac{j\,\omega_1/\omega_0}{1+j\,\omega_1/\omega_0} \approx j\dfrac{\omega_1}{\omega_0}$

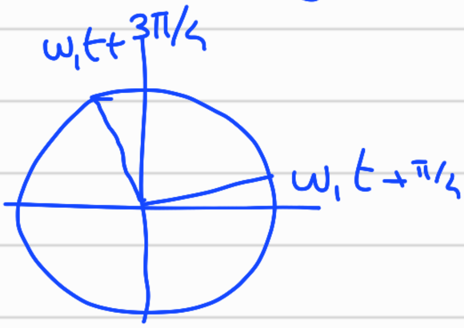
et $\underline{H}(j\omega_2) = \dfrac{j\,\omega_2/\omega_0}{1+j\,\omega_2/\omega_0} \approx 1$

D'où

$$\underline{u_s} = E_1 e^{j(\omega_1 t + \pi/4)} \times j\frac{\omega_1}{\omega_0} + E_2 e^{j(\omega_2 t + \pi/4)}$$

$$= E_1 \frac{\omega_1}{\omega_0} e^{j\pi/2} e^{j(\omega_1 t + \pi/4)} + E_2 e^{j(\omega_2 t + \pi/4)}$$

$$u_s(t) = E_1 \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos\left(\omega_1 t + \frac{3\pi}{4}\right) + E_2 \cos(\omega_2 t + \pi/4)$$

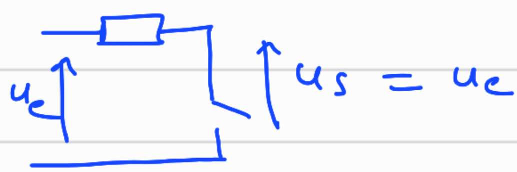


$$\boxed{u_s(t) = \frac{E_1}{10} \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right) + E_2 \cos(\omega_2 t + \pi/4)}$$

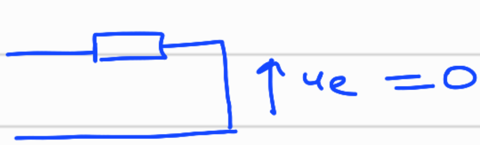
Exercice 2 :

Q1. Pour supprimer la valeur moyenne il faut supprimer la composante continue (= de fréquence nulle) $\Rightarrow$ il faut un filtre passe haut.

Filtre de gauche : BF :



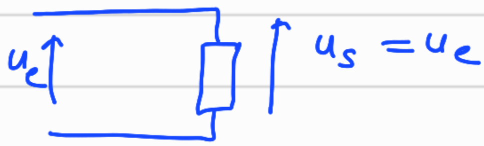
HF



Ce filtre transmet les signaux à basse fréquence et coupe les signaux à haute fréquence ⇒ passe bas.

Filtre de droite : BF :

HF



Ce filtre transmet les hautes fréquence et coupe les signaux à basse fréquence ⇒ filtre passe haut ⇒ utile pour coupe la composante continue.

Q2. $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{R}{R + 1/jC\omega} = \dfrac{RjC\omega}{1 + RjC\omega}$

On pose $\dfrac{1}{\omega_c} = RC \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \dfrac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

AN : $\omega_c = \dfrac{1}{10^6 \cdot 10^{-7}} = \underline{10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$

Q3. * pour $\omega \gg \omega_c$ $\underline{H}(j\omega) \simeq 1$ donc asymptote horizontale à haute fréquence

* pour $\omega \ll \omega_c$ $\underline{H}(j\omega) \simeq j\dfrac{\omega}{\omega_c}$

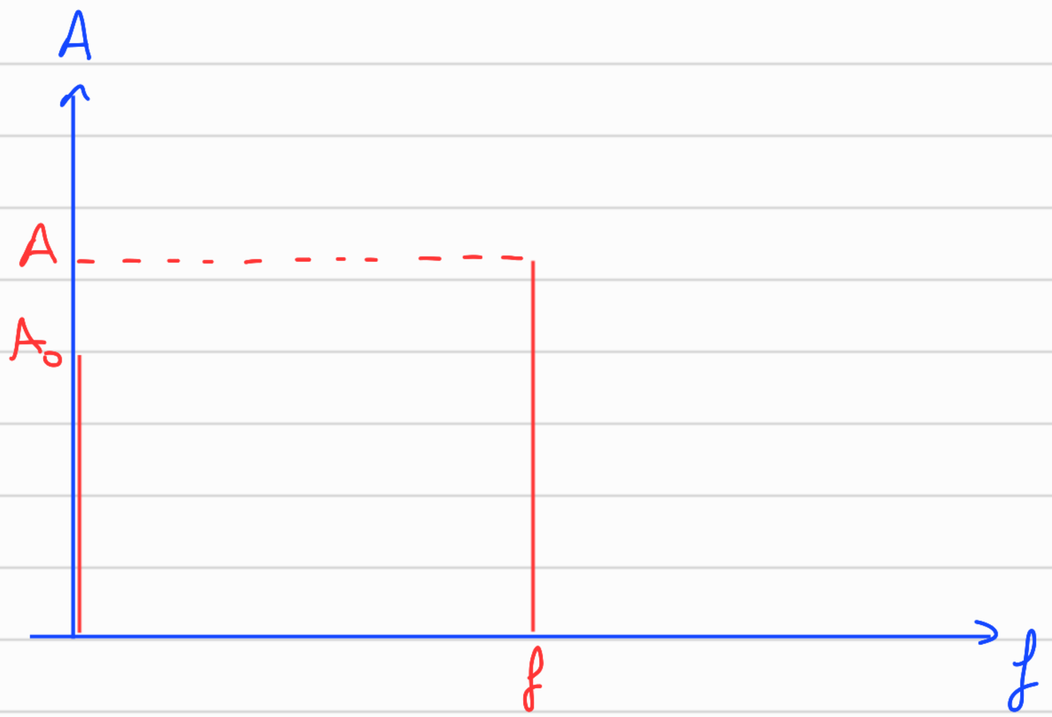
donc $G_{dB} = 20 \log \omega - 20 \log \omega_c$
⇒ asymptote oblique de pente +20dB/déc
⇒ cohérent avec le diagramme de Bode fourni.

Intersection des 2 asymptotes en ω_c

$$0 = 20 \log \omega - 20 \log \omega_c$$

et $\omega_c = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ que l'on peut placer au niveau de l'intersection des asymptotes.

Q4.



Q5. Ce filtre doit couper la composante continue et transmette la composante sinusoïdale.
⇒ f doit être très suppérieure à la fréquence de coupure du filtre :

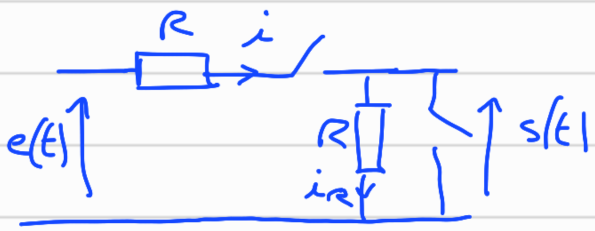
$f \gg 10\,Hz$. ($f > 50\,Hz$ avec lecture sur le diagramme de Bode).

Q6. * En mode DC pour voir le signal il faut un gros calibre (99 V/div) $\Rightarrow$ on ne verra pas bien les oscillations.

* En mode AC on supprime la composante continue de 10V, on peut donc choisir un calibre plus petit qui permet de voir les oscillations.

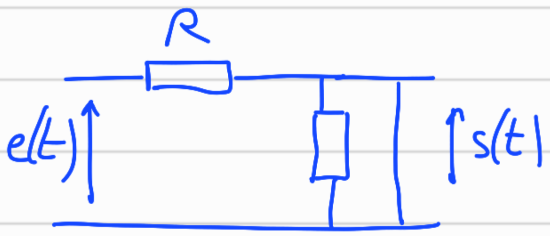
Exercice 3 :

Q1. A basse fréquence :



$i_R = 0$ donc $s(t) = 0$

A haute fréquence



$s(t) = 0$

Ce filtre ne transmet ni les basses ni les hautes fréquences $\Rightarrow$ passe-bande.

Q2. $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + R + \frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\underline{Z_{eq}}}\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)}$

avec $\dfrac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \dfrac{1}{R} + jC\omega$

$\Rightarrow \underline{H} = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)} = \dfrac{1}{1 + 1 + \frac{1}{jRC\omega} + jRC\omega + 1}$

$\underline{H} = \dfrac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \dfrac{1/3}{1 + \frac{j}{3}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$

On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{RC} \Rightarrow \boxed{\underline{H} = \dfrac{1/3}{1 + \frac{j}{3}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$

Par identification $H_0 = 1/3$

$Q = 1/3$.

Q3 $G = \dfrac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

Le gain est maximal lorsque le dénominateur est minimal soit pour $\omega = \omega_0$, avec $\underline{G_{max} = H_0}$.

$G_{max,dB} = 20 \log H_0 = -20 \log 3 \approx \underline{-9,5 \text{ dB}}$.

$$\varphi(\omega_0) = \arg(H_0) = \underline{0}$$

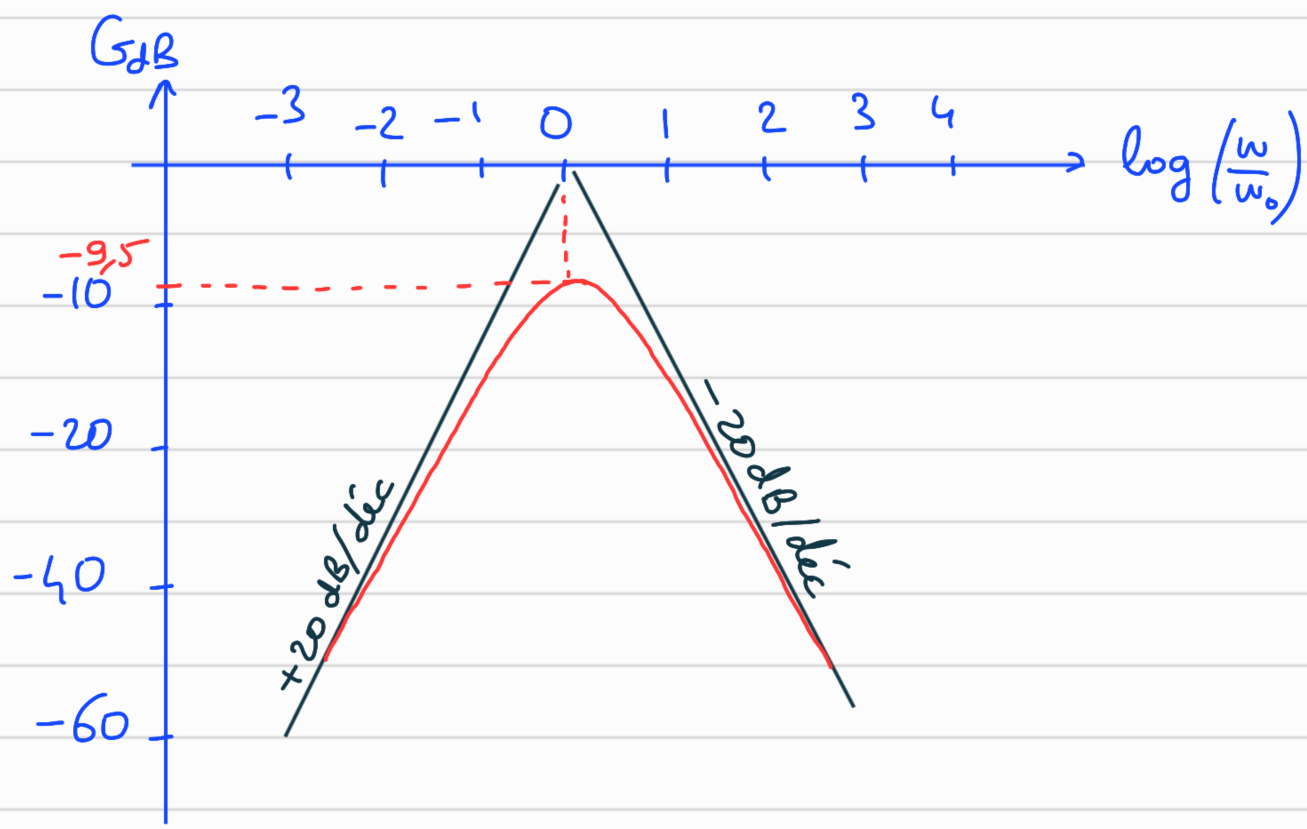
Q4. * Pour $\omega \ll \omega_0$ $\underline{H} \approx j\dfrac{\omega}{\omega_0}$

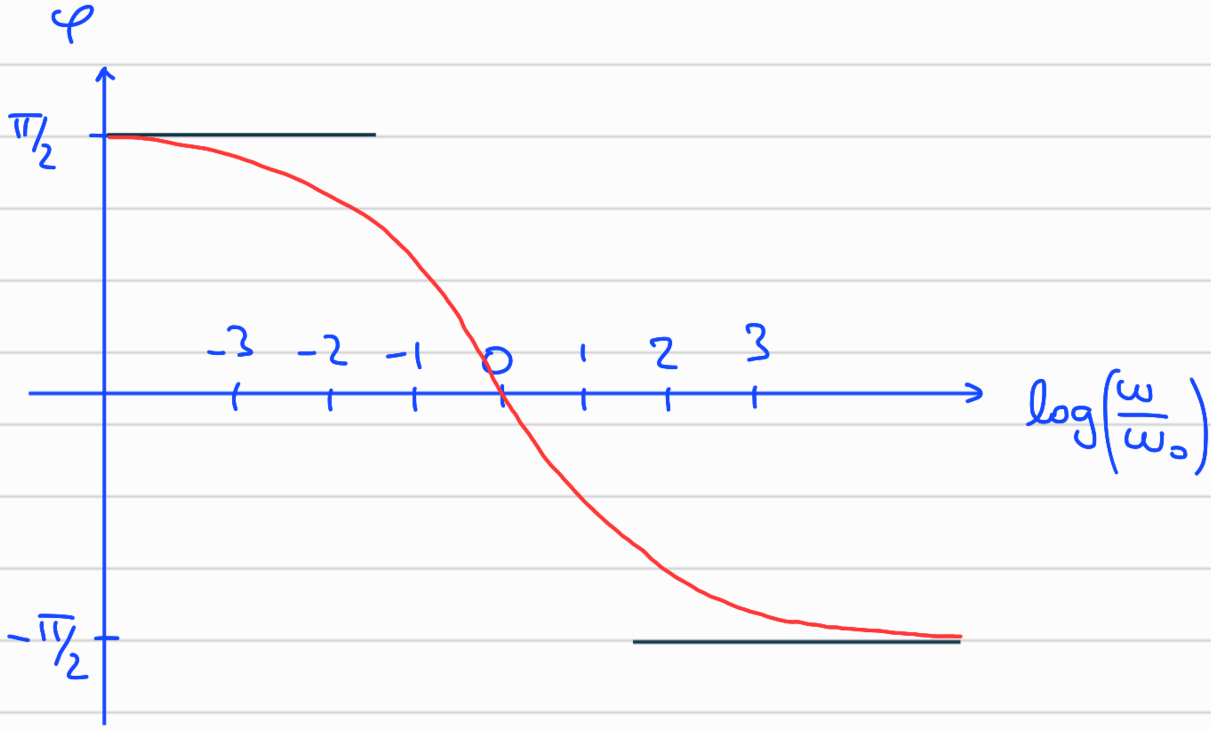
$\Rightarrow G_{dB} \approx 20 \log \omega - 20 \log \omega_0$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

* Pour $\omega \gg \omega_0$ $\underline{H} \approx -j\dfrac{\omega_0}{\omega}$

$\Rightarrow G_{dB} \approx 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

La courbe de gain admet donc une asymptote oblique de pente +20 dB/décade à basse fréquence, et une asymptote de pente -20 dB/décade à haute fréquence.





Q5. Si le signal d'entrée est

$$e(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + E_0\cos(10\omega t) + E_0\cos(100\omega t)$$

alors le signal de sortie s'écrit :

$$s(t) = S_0 + S_1\cos(\omega t + \varphi_1) + S_0\cos(10\omega t + \varphi_2) + S_0\cos(100\omega t + \varphi_3)$$

* La composante continue n'est pas transmise (passe bande) $\Rightarrow S_0 = 0$

* Pour le signal de pulsation $\omega = \frac{\omega_0}{10}$, l'amplitude vaut :

$$S_1 = E_0\, G\left(\frac{\omega_0}{10}\right) = E_0 \frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{1}{10}-10\right)^2}} \simeq \frac{E_0/3}{\sqrt{\frac{100}{9}}} \simeq \frac{E_0}{10}$$

et la phase $\varphi_1 = -\arctan\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}-10\right)\right) \simeq 73°$

* Pour le signal de pulsation $10\omega = \omega_0$ l'amplitude vaut :

$$S_2 = E_0 G(\omega_0) = \frac{E_0}{3}$$

et la phase $\varphi_2 = 0$

* Pour le signal de pulsation $100\omega = 10\omega_0$ l'amplitude vaut :

$$S_3 = E_0 G(10\omega_0) = E_0 \frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2\left(10-\frac{1}{10}\right)}} \simeq \frac{E_0}{10}$$

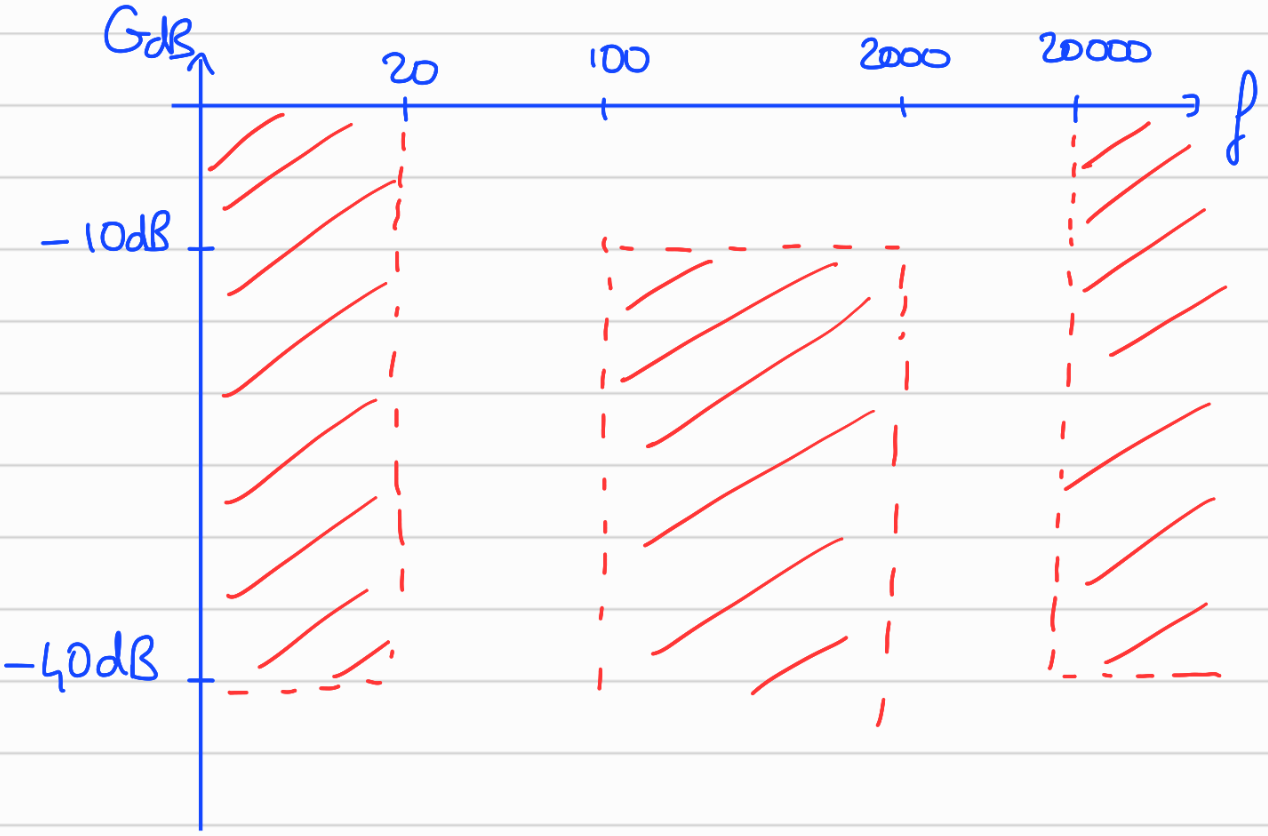
et la phase $\varphi_3 = -\arctan\left(\frac{1}{3}\left(10-\frac{1}{10}\right)\right) \simeq -73°$

On a donc

$$\boxed{s(t) = \frac{E_0}{10}\cos\left(\frac{\omega_0}{10}t + 73°\right) + \frac{E_0}{3}\cos(\omega_0 t) + \frac{E_0}{10}\cos(10\omega_0 t - 73°)}$$

Exercice 4 :

Q1. On veut garder $G_{dB} > -10\,dB$ pour $100 < f < 20\,000$ Hz et $G_{dB} < -40\,dB$ pour $20 < f < 100$ Hz et $f > 20\,000$ Hz.



Q2. Il faut donc utiliser un filtre passe-bande.

Pour centrer la fréquence propre par rapport au spectre de la voie humaine, il faut $\log(f_0) = \dfrac{\log 100 + \log 2000}{2}$

$\Rightarrow \underline{f_0 = 447\ Hz}$.

Q3. La largeur de la bande-passante vérifie $Q = \dfrac{f_0}{\Delta f}$

Et on veut $\Delta f = 1900\ Hz$.

$\Rightarrow Q = \dfrac{447}{1900} = \underline{0{,}24}$

Q4. Calculons les pentes entre les valeurs particulières :

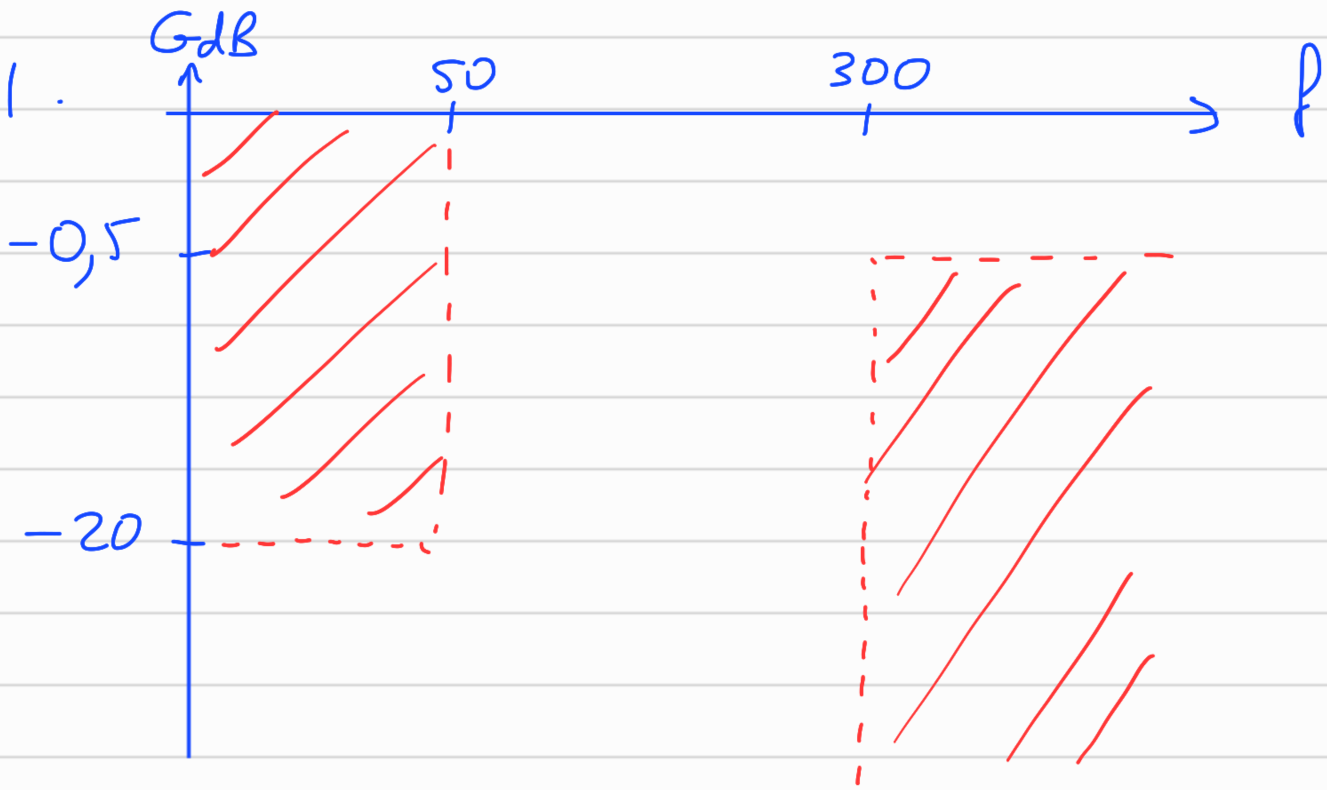
$$\left.\begin{array}{l} G_{dB}(20Hz) = -40\,dB \\ G_{dB}(100Hz) = -10\,dB \end{array}\right\} \text{Pente} = \frac{-40+10}{\log 20 - \log 100} = 43\,dB/déc$$

$$\left.\begin{array}{l} G_{dB}(2000Hz) = -10\,dB \\ G_{dB}(20000Hz) = -40\,dB \end{array}\right\} \text{Pente} = \frac{-10+40}{\log(2000) - \log(20000)} = -30\,dB/déc$$

Le filtre RLC présente des pentes à 0 et 40 dB/déc donc ne conviendrait pas.

Exercice 5 :

Q1.



Pente de l'asymptote à basse fréquence déterminée avec les 2 points particuliers :

$$\left.\begin{array}{l} G_{dB}(50) = -20 \text{ dB} \\ G_{dB}(300) = -0{,}5 \text{ dB} \end{array}\right\} \text{pente} = \frac{-20+0{,}5}{\log 50 - \log 300}$$

$$= 25 \text{ dB/déc.}$$

⇒ un filtre d'ordre 1 ne peut pas convenir, il faut un filtre d'ordre 2.

Q2. $$\underline{H} = \frac{jL\omega}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{-LC\omega^2}{jRC\omega + 1 - LC\omega^2}$$

$$\underline{H} = \frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{R}{L}\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

En identifiant on a $\frac{1}{Q} = \frac{R}{L}$

$$\Rightarrow Q = \frac{L}{R}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}} \quad \text{avec } \boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \text{ et } \boxed{Q = \frac{L}{R}}$$

Q3. Pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \underline{H} = \frac{-x^2}{1-x^2-jx\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow G = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2+2x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-2x^2+x^4+2x^2}}$$

$$G = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/x^4}}$$

$$G_{dB} = -10\log\left(1+\frac{1}{x^4}\right) = -10\,g(x)$$

Or on a la contrainte $G_{dB}(f_1) \leq -20$ dB

$\Rightarrow -10\,g(x) \leq -20$ dB

$g(x_1) \geq 2$

On lit sur la courbe $g(x_2) \geq 2$ pour

$x_1 \leq 3.10^{-1}$ $\quad \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_0} \leq 3.10^{-1}$

$$\omega_0 \geq \frac{\omega_1}{3.10^{-1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} \geq \frac{2\pi . f_1}{3.10^{-1}}$$

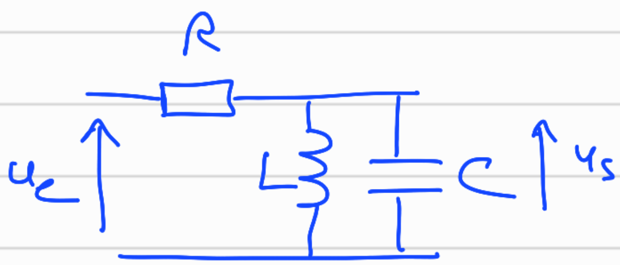
$$\sqrt{LC} \leqslant \frac{0{,}3}{2\pi . f_1} \Rightarrow LC \leqslant \left(\frac{0{,}3}{2\pi f_1}\right)^2$$

$$L \leqslant \frac{0{,}3^2}{4\pi^2 f_1^2 C}$$

$$\underline{L_{maxi} = 0{,}91 \text{ H}}.$$

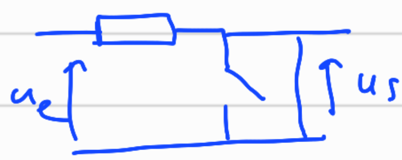
Exercice 6 :

Comme il s'agit d'un filtre passe-bande, il coupe les basses-fréquences et les hautes fréquences.
Il faut donc une bobine et un condensateur en parallèle aux bornes de la tension de sortie :



BF :

HF



En régime continu on a $E_0 = R I_0$

$$\Rightarrow R = \frac{E_0}{I_0} \qquad \text{AN : } R = \frac{15}{15.10^3} = \underline{10^3\,\Omega}$$

Fonction de transfert : $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + R}$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z_{eq}}}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - j\frac{R}{L\omega}} = \frac{1}{1 + j\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

En identifiant : $\begin{cases} \dfrac{Q}{\omega_0} = RC \\ Q\omega_0 = \dfrac{R}{L} \end{cases}$

Soit $Q^2 = \dfrac{R^2 C}{L}$ et $\omega_0 = \dfrac{R}{L} \cdot \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

la bande passande vérifie : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

$$\Rightarrow R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{\sqrt{LC}\,\Delta\omega}$$

$$RC = \frac{1}{\Delta\omega} \Rightarrow C = \frac{1}{R\Delta\omega}$$

avec $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ et $R = 10^3\,\Omega$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{10^3 . 2\pi . 0{,}34 . 10^3} = 4{,}7.10^{-7}\,F$$

$$= \underline{470\ nF}$$

$$L = \frac{1}{C(2\pi f_0)^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_0 LC = 1$$

$$L = \frac{1}{\ }$$

AN : $L = \frac{1}{4{,}7.10^{-7}(2\pi . 1{,}16.10^3)^2}$

$$L = 2{,}1.10^{-2}\ H = \underline{21\ mH}$$