Correction du TD 16

Exercice 1

Q1. Vrai
Q2. Faux
Q3. Vrai
Q4. Faux
Q5 énergie - travail
Q6. est nul si sa trajectoire est une droite passant par O.
Q7. a la même dimension que le travail d'1 force
permet de savoir si la force modifie la vitesse.
Q8. $-Fa\vec{u_z}$

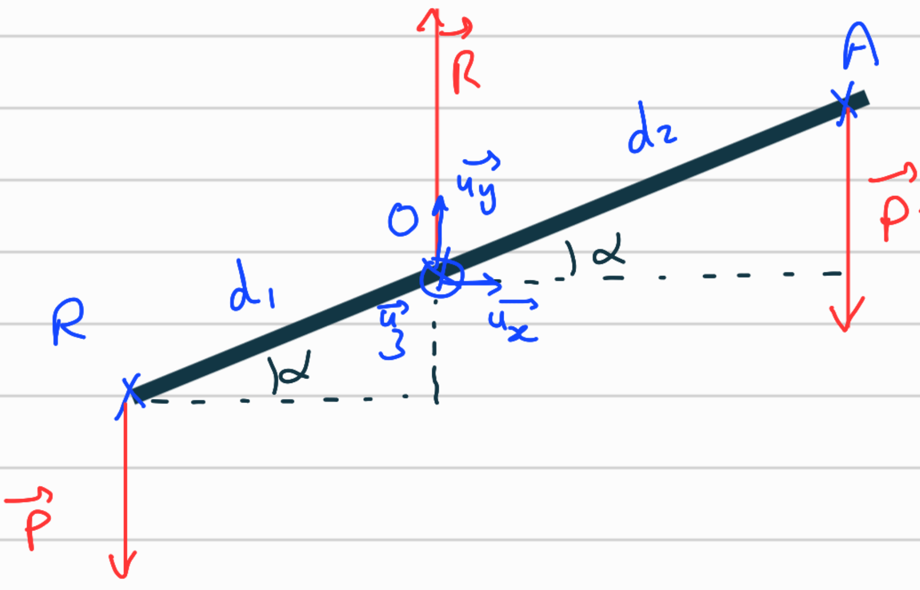
Exercice 2

Q1. On suppose que l'ensemble {pierre-levier-Archi.} est à l'équilibre.
Bilan des forces : * poids de la pierre $\vec{P}$
* poids d'Archimède $\vec{P'}$
* réaction en O $\vec{R}$.

$\Rightarrow$ la somme des moments de ces forces par rapport à O_z est donc nulle.

$$\mathcal{M}_{O_z}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{O_z}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{O_z}(\vec{P'}) = 0$$

On a donc $(\overrightarrow{OR} \times Mg)\cdot\vec{u_y} + (\overrightarrow{OA} \times m\vec{g})\cdot\vec{u_y} + (\overrightarrow{OO} \times \vec{R})\cdot\vec{u_y} = 0$



$+ d_1 \cos\alpha \cdot Mg - d_2 \cos\alpha \cdot mg + 0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{m = \dfrac{M \cdot d_1}{d_2}}$

Q2. Pour être plus efficace avec une force de norme fixée, il faut augmenter le bras de levier. Pour cela, il faut exercer une force perpendiculairement au levier.

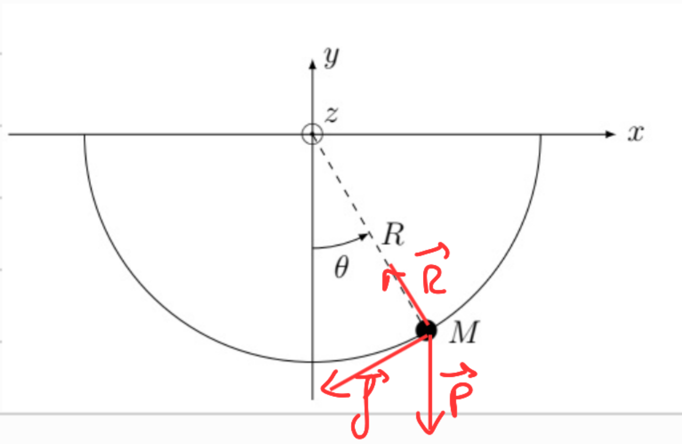
Le moment de la force $\vec{F}$ exercée par Archimède par rapport à (Oz) est donc $-Fd_2$.

Pour compenser le moment du poids de la pierre, il faut donc exercer F_{min} telle que : $F_{min} d_2 = Mg \cos\alpha \, d_1$

$\Rightarrow F_{min} = Mg \cos\alpha \dfrac{d_1}{d_2}$ (au lieu de $Mg \dfrac{d_1}{d_2}$)

Exercice 3 :

Q1



$$\overrightarrow{L_O}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M/\mathcal{R})$$
$$= R\vec{u_r} \wedge mR\dot{\theta}\vec{u_\theta} = mR^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

$$L_{Oz}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{L_O}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{u_z} = mR^2\dot{\theta}$$

Q2 $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{R}) = 0$ car la réaction est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$

$$\mathcal{M}_{z}(\vec{P}) = \left(R\vec{u_r} \wedge \left(mg\cos\vec{u_r} - mg\sin\theta\vec{u_\theta}\right)\right) \cdot \vec{u_z}$$
$$= -mgR\sin\theta$$

$$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{f}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u_z}$$
$$= \left(R\vec{u_r} \wedge \left(-\alpha R\dot{\theta}\vec{u_\theta}\right)\right) \cdot \vec{u_z}$$
$$= -\alpha R^2\dot{\theta}$$

Q3. D'après le TMC appliqué au point M dans le référentiel terrestre galiléen :

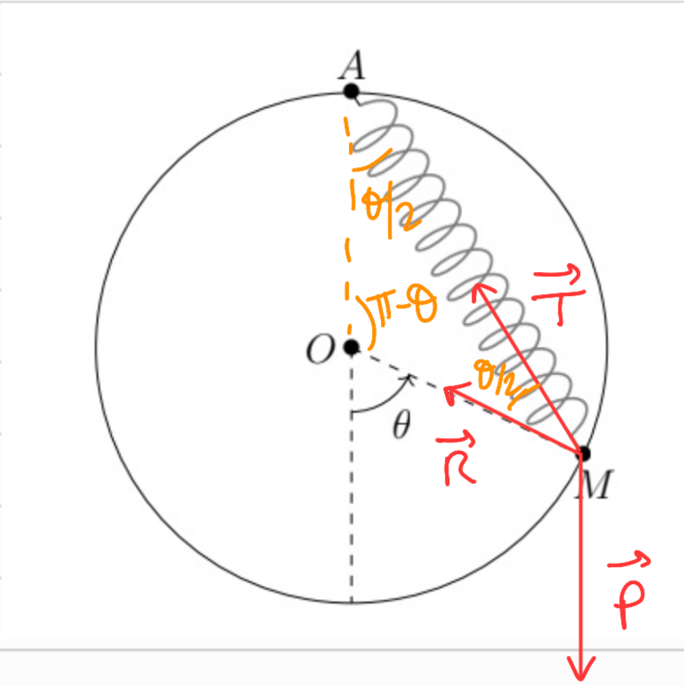
$$\frac{dL_{Oz}(M)}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{f})$$

$$mR\ddot{\theta} = -mgR\sin\theta - \alpha R^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

Exercice 4 :

Q1



× Réaction du support : $\vec{R} = -R\vec{u_r}$

× Poids de la masselotte : $\vec{P}$

$\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

× Force de rappel élastique : $\vec{T}$

$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$

avec $\vec{u} = \cos(\theta/2)\, \vec{u_r} - \sin(\theta/2)\, \vec{u_\theta}$

et $l = 2R\cos(\theta/2)$

$\Rightarrow \vec{T} = -k\left(2R\cos(\theta/2) - l_0\right)\left[\cos(\theta/2)\vec{u_r} - \sin(\theta/2)\,\vec{u_\theta}\right]$

Q2. $\dfrac{d\vec{L_0}(M/R)}{dt} = \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{T})$

M ayant un mouvement circulaire

$\vec{L_0}(M/R) = R\vec{u_r} \wedge mR\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$= mR^2\dot{\theta}\,\vec{u_3}$

$\Rightarrow mR^2\ddot{\theta}\,\vec{u_3} = \underbrace{\vec{OM}\wedge\vec{P} + \vec{OM}\wedge\vec{R} + \vec{OM}\wedge\vec{T}}$.

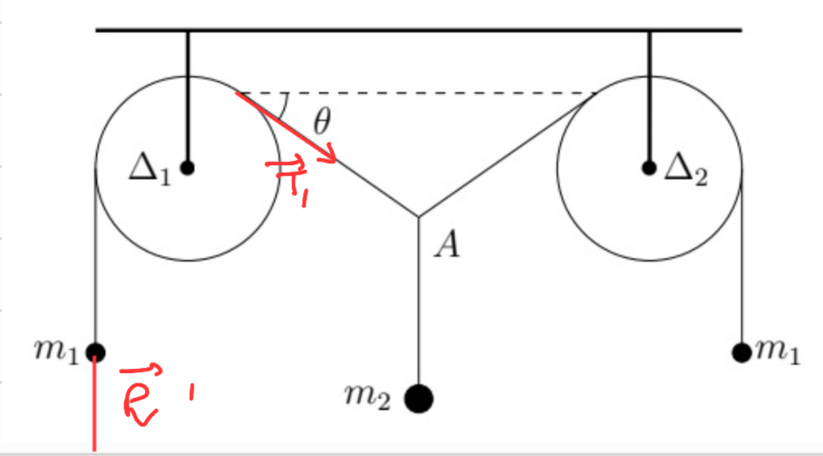
on calcule ces 3 moments
avec les formules des forces établies

$\Rightarrow mR^2\ddot{\theta}\,\vec{u_3} = -mgR\sin\theta\,\vec{u_3} + Rk\left[2R\cos(\theta/2) - l_0\right]\sin(\theta/2)\vec{u_3}$

Soit $mR^2\ddot{\theta} = -mgR\sin\theta + Rk\left(2R\cos(\theta/2) - l_0\right)\sin(\theta/2)$

$$\boxed{mR^2\ddot{\theta} = kR^2\sin\theta - kRl_0\sin(\theta/2) - mgR\sin\theta}$$

Exercice 5 :



on pose les vecteurs unitaires $\odot_{\Delta_1}$ et $\odot_{\Delta_2}$

* Equilibre de la poulie de gauche : $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_1) = \vec{0}$$

(l'action mécanique de liaison autour de l'axe Δ_1 est inconnue mais à un moment nul car on néglige les frottements d'axe).

$$m_1 g R - T_1 R = 0 \Rightarrow T_1 = m_1 g .$$

$\Rightarrow$ on démontre ici que lorsqu'un fil passe par une poulie, la force exercée sur ses extrémités change de direction mais pas de norme.

* Equilibre de la poulie de droite : le même raisonnement donne $T_2 = m_1 g$.

* Equilibre du point A :

$$\vec{P_2} + (-\vec{T_1}) + (-\vec{T_2}) = \vec{0}$$

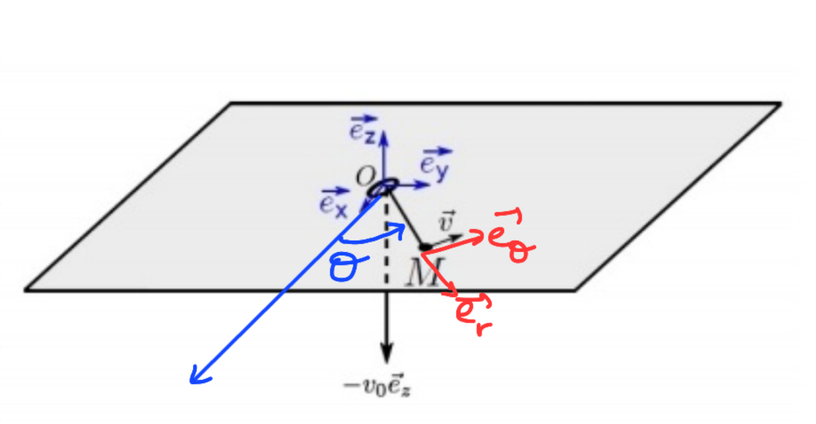
En projetant sur l'axe vertical :

$$m_2 g = 2 m_1 g \sin\theta \Rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{m_2}{2m_1}}$$

(Si $m_2 > 2m_1$ cette solution n'est pas définie, la masse m_2 entraine les 2 masses m_1 et l'ensemble tombe !)

Exercice 6 :

Q1.



On utilise un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz, tel que $\vec{OM} = r\vec{u_r}$ avec $r = \ell(t) = \ell_0 - v_0 t$

$$\vec{v}(M/R) = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\vec{L_O}(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M/R)$$

$$= r\vec{u_r} \wedge (m\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})$$

$$= mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

Soit $\boxed{\vec{L_O}(M/R) = m(l_0 - v_0 t)^2 \dot{\theta}\vec{u_z}}$

Q2. On détermine la somme des moments des forces exercées sur M :

$$\Sigma \vec{\mathcal{M}_O}(F) = \vec{OM} \wedge \vec{P} + \vec{OM} \wedge \vec{R} + \vec{OM} \wedge \vec{T}$$

$$= \vec{OM} \wedge \underbrace{(\vec{P} + \vec{R})}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{T}}_{=\vec{0}}$$

car absence de frottements

car $\vec{T}$ est colinéaire à $\vec{OM}$.

D'après le TMC appliqué au point M dans R galiléen, on a $\frac{d\vec{L_O}(M/R)}{dt} = \vec{0}$

Soit $\vec{L_O}(M/R) = cte$.

$$\Rightarrow \boxed{m(l_0 - v_0 t)^2 \dot{\theta} = cte}$$

Q3. $\omega(t) = \dot{\theta} \Rightarrow m(l_0 - v_0 t)^2 \omega = m l_0^2 \omega_0$

$$\Rightarrow \boxed{\omega(t) = \frac{l_0^2 \omega_0}{(l_0 - v_0 t)^2}}$$

($\omega(t)$ augmente au cours du temps)

Q4. $E_c = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right)$

$$= \frac{1}{2} m \left[(-v_0)^2 + (l_0 - v t)^2 \left(\frac{l_0^2 \omega_0}{(l_0 - v_0 t)^2} \right)^2 \right]$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{l_0^4 \omega_0^2}{(l_0 - v_0 t)^2} \right)}$$

L'énergie cinétique de la masse m augmente. Elle provient du travail de la force de tension du fil fourni par l'opérateur.

Cette expression est valable pour $t < \frac{l_0}{v_0}$

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \frac{m l_0^4 \omega_0^2}{(l_0 - v_0 t)^2} - \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{l_0^4 \omega_0^2}{l_0^2} \right)$$

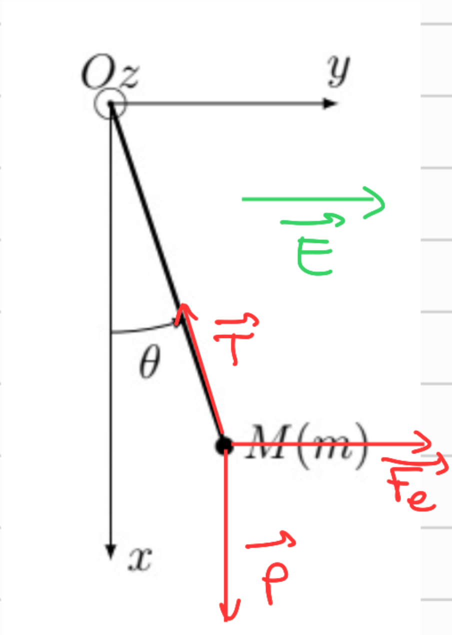
$$W = \frac{1}{2} m l_0^4 \omega_0^2 \left[\frac{1}{(l_0 - v_0 t)^2} - \frac{1}{l_0^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} m l_0^4 \omega_0^2 \left(\frac{l_0^2 - (l_0 - v_0 t)^2}{l_0^2 (l_0 - v_0 t)^2} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} m l_0^2 \omega_0^2 \left(\frac{2 l_0 v_0 t - v_0^2 t^2}{(l_0 - v_0 t)^2} \right)$$

Exercice 7 :

Q1. On étudie le système {boule} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



Bilan des forces :

* poids $\vec{P} = m\vec{g}$
* tension du fil $\vec{T}$
* force électrique $\vec{F_e} = Q\vec{E}$

On applique le TMC au système {boule} dans le référentiel terrestre, par rapport à l'axe (Oz) :

$$\frac{dL_{Oz}(M/R)}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_e}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{T})$$

Le mouvement de M est circulaire

donc $L_{O_3}(M/R) = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u_3}$

$= (R\vec{u_r} \wedge mR\dot{\theta}\vec{u_\theta}) \cdot \vec{u_3}$

$= mR^2\dot{\theta}$

$\mathcal{M}_{O_3}(\vec{T}) = 0$ car $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires

$\mathcal{M}_{O_3}(\vec{P}) = -mgR\sin\theta$

$\mathcal{M}_{O_3}(\vec{F_e}) = QER\cos\theta$

méthode du bras de levier ou calcul direct avec les composantes des vecteurs.

On obtient : $\boxed{mR^2\ddot{\theta} = QER\cos\theta - mgR\sin\theta}$

Q2. Lorsque M est à l'équilibre $\theta = $ cte
donc $\ddot{\theta} = 0$

$\Rightarrow QER\cos\theta_{eq} = mgR\sin\theta_{eq}$

$\Leftrightarrow \boxed{\tan\theta_{eq} = \frac{QE}{mg}}$

Q3. On pose $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$ (avec $\varepsilon \ll 1\,\text{rad}$)

En faisant les developpements limités d'ordre 1 au voisinage de θ_{eq} on obtient :

$$mR^2\ddot{\varepsilon} = QER\cos(\theta_{eq}+\varepsilon) - mgR\sin(\theta_{eq}+\varepsilon)$$

$$mR^2\ddot{\varepsilon} = QER(\cos\theta_{eq} - \varepsilon\sin\theta_{eq}) - mgR(\sin\theta_{eq} + \varepsilon\cos\theta_{eq})$$

$$mR^2\ddot{\varepsilon} = \underbrace{QER\cos\theta_{eq} - mgR\sin\theta_{eq}}_{=0} - QER\varepsilon\sin\theta_{eq} - mgR\varepsilon\cos\theta_{eq}$$

$$mR^2\ddot{\varepsilon} = -\varepsilon(QER\sin\theta_{eq} + mgR\cos\theta_{eq})$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{mg\cos\theta_{eq} + QE\sin\theta_{eq}}{mR}\varepsilon = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0}$$

avec $$\omega_0^2 = \frac{mg\cos\theta_{eq} + QE\sin\theta_{eq}}{mR}$$

$$= \frac{mg\cos\theta_{eq}}{mR}\left(1 + \underbrace{\frac{QE\sin\theta_{eq}}{mg\cos\theta_{eq}}}_{=\tan\theta_{eq}}\right)$$

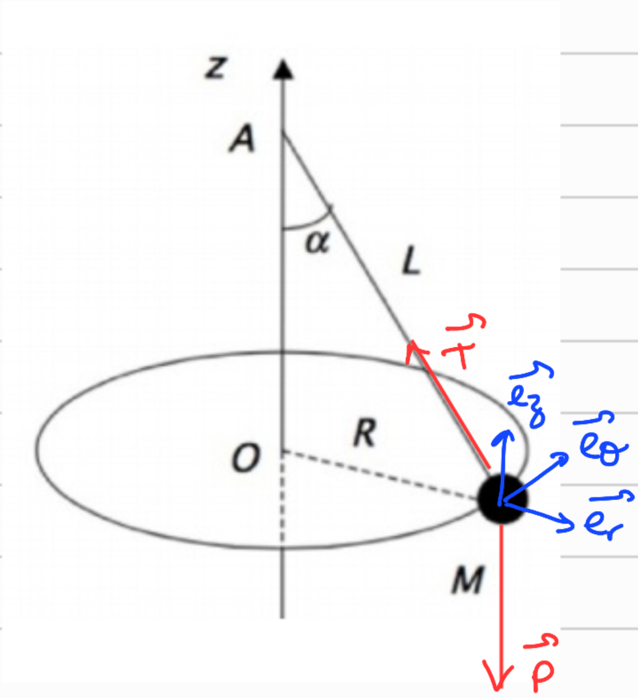
$$= \frac{mg\cos\theta_{eq}}{mR}(1+\tan^2\theta_{eq})$$

Et $$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{mR}{mg\cos\theta_{eq}(1+\tan^2\theta_{eq})}}$$

Exercice 8 :

Q1. Il est judicieux de calculer les moments des forces par rapport à A ($\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) = \vec{0}$).

Q2.



avec $AO = L\cos\alpha$ et $R = L\sin\alpha$

Bilan des forces sur la masse : $\vec{T}$ et $\vec{P}$.

TMC appliqué à M dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_A(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T})$$

avec $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) = \vec{AM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ car $\vec{AM}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires.

et $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = \vec{AM} \wedge \vec{P} = \underbrace{\vec{AO} \wedge \vec{P}}_{=\vec{0}} + \vec{OM} \wedge \vec{P}$

car $\vec{AO}$ et $\vec{P}$ sont colinéaires

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = R\vec{u_r} \wedge (mg\vec{u_z}) = mgR\vec{u_\theta}$$

$$= mgL\sin\alpha\ \vec{u_\theta}$$

et $\vec{L_A}(M) = \vec{AM} \wedge m\vec{v}(M/R)$

$$= (\vec{AO} + \vec{OM}) \wedge mR\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$= -L\cos\alpha\,\vec{u_z} \wedge mR\dot{\theta}\vec{e_\theta} + L\sin\alpha\,\vec{u_r} \wedge mR\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$= mL^2\sin\alpha.\cos\alpha\,\dot{\theta}\,\vec{u_r} + L^2\sin^2\alpha\, m\dot{\theta}\,\vec{u_z}$$

$$= \frac{1}{2}mL^2\sin\alpha.\cos\alpha.\,\omega\,\vec{u_r} + \underbrace{L^2\sin^2\alpha\, m\omega\,\vec{u_z}}_{=cte}$$

$$\frac{d\vec{L_A}(M)}{dt} = mL^2\sin\alpha.\cos\alpha.\,\omega^2\,\vec{u_\theta}$$

$\Rightarrow$ $mL^2\sin\alpha.\cos\alpha.\omega^2 = mgL\sin\alpha$.

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}}$$

Si $\omega \to +\infty$ $\cos\alpha \to 0$ donc $\alpha \to \pi/2$

Si $\frac{g}{\omega^2 L} > 1$ pas de solution $(\omega < \sqrt{g/L})$

Exercice 9 :

Q1. Bilan des forces : $\vec{P}$
$\vec{R}$
$\vec{T}$

En projetant le PFD dans le plan vertical on a $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a_z}$

Or le mouvement est plan. On a donc $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

On peut donc appliquer le TMC avec seulement le moment de $\vec{T}$:

$$\frac{d\vec{L_O}(M/R)}{dt} = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \text{ car}$$

$\vec{OM}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires.

$\Rightarrow$ le moment cinétique est constant.

Q2. $\vec{L_O}(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)$

$\vec{v}(t=0) = \vec{0}$ donc $\vec{L_O} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ le mouvement est rectiligne suivant (Ox) (la vitesse reste colinéaire à $\vec{e_x}$)

Q3. PFD projeté sur (Ox) :

$m\ddot{x} = -k(\ell - \ell_i)$

or $x = \ell \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_i$

Solution : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \ell_i$

à $t=0$ $x(0) = 1,2\ell_i \Rightarrow A = 0,2\,\ell_i$

et $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow \boxed{\ell(t) = 0,2\,\ell_i\cos(\omega_0 t) + \ell_i}$

On a donc $0,8\,\ell_i < \ell(t) < 1,2\,\ell_i$

Q4. $\vec{L_O}(\Pi/R) = \vec{O\Pi} \wedge m\vec{v} = r\vec{e_r} \wedge m(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta})$

$\boxed{\vec{L_O}(\Pi/R) = m r^2 \dot{\theta}\,\vec{e_z}}$

Et à $t=0$ $\vec{L_O}(\Pi/R) = m\ell_i^2\omega\,\vec{e_z}$

Q5. $E_p = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$.

Ici $\vec{P}$ ne travaille pas donc l'énergie potentiel de pesanteur reste constante.

La réaction du support est orthoogonale au déplacement $\Rightarrow$ ne travaille pas.

Or $\Delta E_m = W(\vec{R}) = 0$

donc l'énergie mécanique est constante.

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}ml_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}k(l_1-l_0)^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{2}(r-l_0)^2}$$

Q6. On a donc :

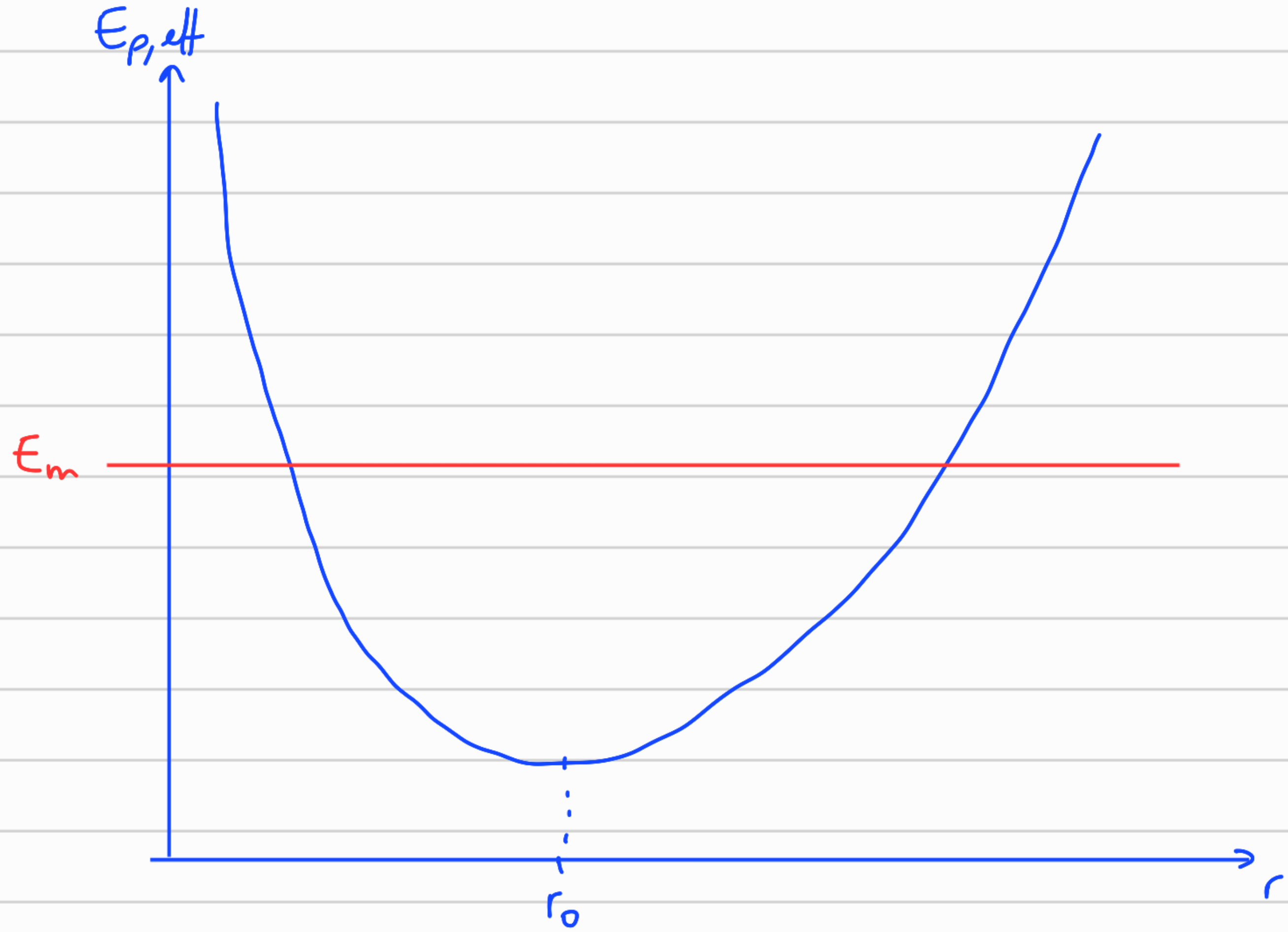
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(r-l_0)^2$$

Or $mr^2\dot{\theta} = cte = ml_1^2\omega \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{l_1^4\omega^2}{r^4}$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{l_1^4\omega^2}{r^4} + \frac{1}{2}k(r-l_0)^2$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{l_1^4\omega^2}{r^2} + \frac{1}{2}k(r-l_0)^2}_{E_{p\,eff}(r)}$$

Allure de $E_{p,eff}(r)$: pour $r \to 0$ branche d'hyperbole en $1/r^2$
pour $r \to +\infty$ branche de parabole $\frac{kr^2}{2}$



Q7. Il faudrait une énergie mécanique infinie pour s'éloigner à l'infini de O.

Q8. $\dot{r}$ s'annule au cours du mouvement lors $E_{p,eff} = E_m$ (en 2 positions).

$\dot{\theta}$ ne peut pas s'annuler car $L = mr^2\dot{\theta} = cte$

donc il faudrait $r \to +\infty$ ce qui est impossible.

Q9. Il faudrait E_m infinie pour atteindre 0.

Q10. Pour un mouvement circulaire $r = cte = R$

$\dot{r} = 0$

On a donc $\dot{\theta} = cte$ (car $mr^2\dot{\theta} = cte$)

Soit $\dot{\theta} = \dfrac{m\ell_1^2\omega}{mR^2} = \left(\dfrac{\ell_1}{R}\right)^2 \omega$.

Donc le mouvement est uniforme

Q11. La seule possibilité correspond à avoir

$E_m = E_{p,eff\,min}$

$$\frac{dE_{p,eff}}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2} m \ell_1^4 \omega^2 r^{-2} + \frac{1}{2} k (r - \ell_0)^2\right)$$

$$= -m\ell_1^4 \omega^2 r^{-3} + m\omega_0^2 (r - \ell_0)$$

car $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\Rightarrow$ Pour $r = \ell_1$ on a :

$$-m\ell_1^4 \omega^2 \ell_1^{-3} + m\omega_0^2 (\ell_1 - \ell_0) = -m\ell_1\omega^2 + m\omega_0^2(\ell_1 - \ell_0)$$

qui est nul lorsque $\ell_1 \omega^2 = \omega_0^2 (\ell_1 - \ell_0)$

$$\ell_1 (\omega_0^2 - \omega^2) = \omega_0^2 \ell_0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\ell_1 = \dfrac{\ell_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$ (possible si $\omega < \omega_0$)