Correction du TD 18

Exercice 1

Q1. Γ = moment des actions mécaniques exercées par le moteur.

$P = \Gamma . \omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma = \frac{P}{\omega}}$

AN avec $P = 180 \times 736$ W
et $\omega = 7 \times 2\pi$ rad.s^{-1}

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{180 \times 736}{7 \times 2\pi} = \underline{3{,}0.10^3 \text{ N.m}}.$$

Q2. $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ avec $J_\Delta = \frac{2}{5} m_T R^2$

et $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{5} m_T R^2 \frac{4\pi^2}{T^2}$$

AN : $E_c = \frac{1}{5} 6{,}0.10^{24} . (6380.10^3)^2 . \frac{4\pi^2}{86164^2}$

$$\underline{E_c = 2{,}6.10^{29} \text{ J}}$$

Q3. $L = J\omega = mR^2\omega$

AN avec $\omega = 1000 \times 2\pi/60$

$L = 5{,}0 . 0{,}25^2 . 1000 \times 2\pi/60 = \underline{33\ J.s}$

Exercice 2 :

Q1. * Système {mur} de masse m de centre d'intertie G et de moment d'inertie J.

* Référentiel terrestre supposé galiléen.

* Bilan des actions mécaniques :
  - poids $\vec{P}$, s'exerce en G.
  - action de la grue $\vec{F}$, s'exerce en A
  - réaction du support $\vec{R}$, s'exerce en O.

Q2. $\dfrac{dL_{Oy}(mur)}{dt} = \mathcal{M}_{Oy}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oy}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{Oy}(\vec{F})$

Avec $L_{Oy}(\text{mur}) = J\dot{\theta}$

$\mathcal{M}_{Oy}(\vec{R}) = 0$ car la droite d'action de $\vec{R}$ coupe l'axe (Oy).

$\mathcal{M}_{Oy}(\vec{P}) = -mga\cos\theta$ (bras de levier $= a\cos\theta$ et le poids fait tourner dans le sens indirect par rapport à Oy).

$\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}) = FH\cos\theta$ (bras de levier $H\cos\theta$ et $\vec{F}$ fait tourner dans le sens direct par rapport à Oy).

$$\Rightarrow \boxed{J\ddot{\theta} = (FH - mga)\cos\theta}$$

Q3. Si la rotation se fait à vitesse $\dot{\theta}$ constante $\ddot{\theta} = 0$ et

$(FH - mga)\cos\theta = 0 \quad \forall\theta$ donc

$$\boxed{F = mg\frac{a}{H}}$$

Q4. $P(\vec{F}) = \mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}).\dot{\theta} = FH\omega_0\cos\theta.\dot{\theta}$

Travail de la grue :

$$W = \int_0^{t_F} P(\vec{F})\, dt = \int_0^{t_F} FH \cos\theta\, \dot{\theta}\, dt$$

$$= FH \left[\sin\theta\right]_{\theta_i}^{\theta_f}$$

Calcul de l'intégrale avec $\theta_i = 0$ et $\theta_f = \frac{\pi}{2}$

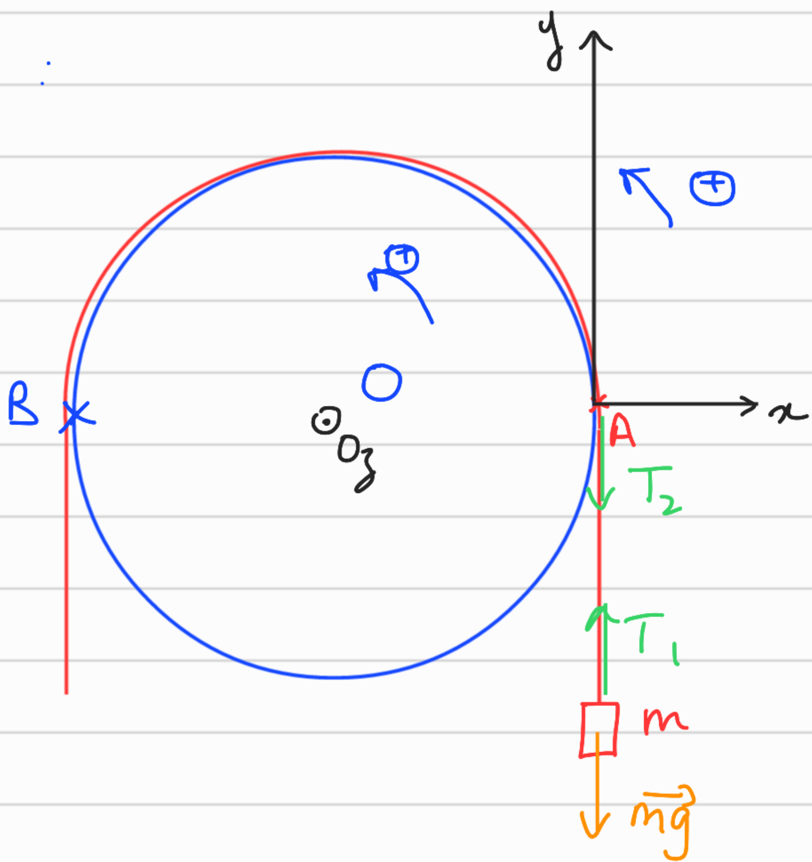
$$W = FH\,(1-0) \qquad \text{avec } F = mg\frac{a}{H}$$

$$\boxed{W = mga}$$

AN : $W = 5{,}0.10^3 . 10 . 1{,}2 = \underline{6{,}0.10^4\, J}$

Exercice 2 :

Q1.



Q2. Lorsque la poulie tourne d'un angle θ on déroule une longueur de fil $\ell = R\theta$.
Avec le choix des orientations de l'angle θ et de l'axe Oz $\dot{y} = R\dot{\theta}$

Q3. Bilan des actions mécaniques sur le système {poulie + fil} dans $\mathcal{R}$ galiléen :

* liaison pivot d'axe Oz
* force de l'opérateur
* traction du fil.

La poulie est à l'équilibre si $\sum \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}) = 0$

Le moment de la liaison pivot par rapport à Oz est nul (liaison parfaite).

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}) &= RF \\ \mathcal{M}_{Oz}(\vec{T}) &= -Rmg \end{aligned}\right\} \quad F = mg$$

AN : $\underline{F = 50\ \text{N}}$

Q4. * On applique le principe fondamental de la dynamique au système {masse m}

$$m\ddot{y} = -mg + T_1$$

On a montré que $y = \theta R \Rightarrow \ddot{y} = \ddot{\theta} R$

* On applique le TMC au système {poulie + fil} :

$$I\ddot{\theta} = -RT_2$$

le fil étant inextensible $T_1 = T_2 = T = m\ddot{y} + mg$
$= mR\ddot{\theta} + mg$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{RT}{I} = \frac{-2RT}{m_p R^2} = \frac{-2T}{m_p R}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-2}{m_p R}\left(mg + m\ddot{\theta}R\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}\left(1 + \frac{2m}{m_p}\right) = -2\frac{m}{m_p}\frac{g}{R}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-2\,m/m_p\; g/R}{1 + \frac{2m}{m_p}} = -\frac{g}{R}\;\frac{2m}{m_p + 2m}$$

d'où $\boxed{\ddot{y} = -g\frac{1}{1 + 0{,}5\frac{m_p}{m}}}$

et $T = -mg\frac{1}{1+0{,}5\frac{m_p}{m}} + mg = mg\left(1 - \frac{1}{1+0{,}5\frac{m_p}{m}}\right)$

$$\boxed{T = mg\cdot\frac{m_p}{m_p + 2m}}$$

Exercice 4.

Q1. $E_p = mgz + \frac{1}{2}C\theta^2 + \text{cte}$

avec $z = L\cos\theta$

$$\Rightarrow \boxed{E_p = mgL\cos\theta + \frac{1}{2}C\theta^2 + \text{cte}}$$

Q2. les positions d'équilibre sont définies par $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$

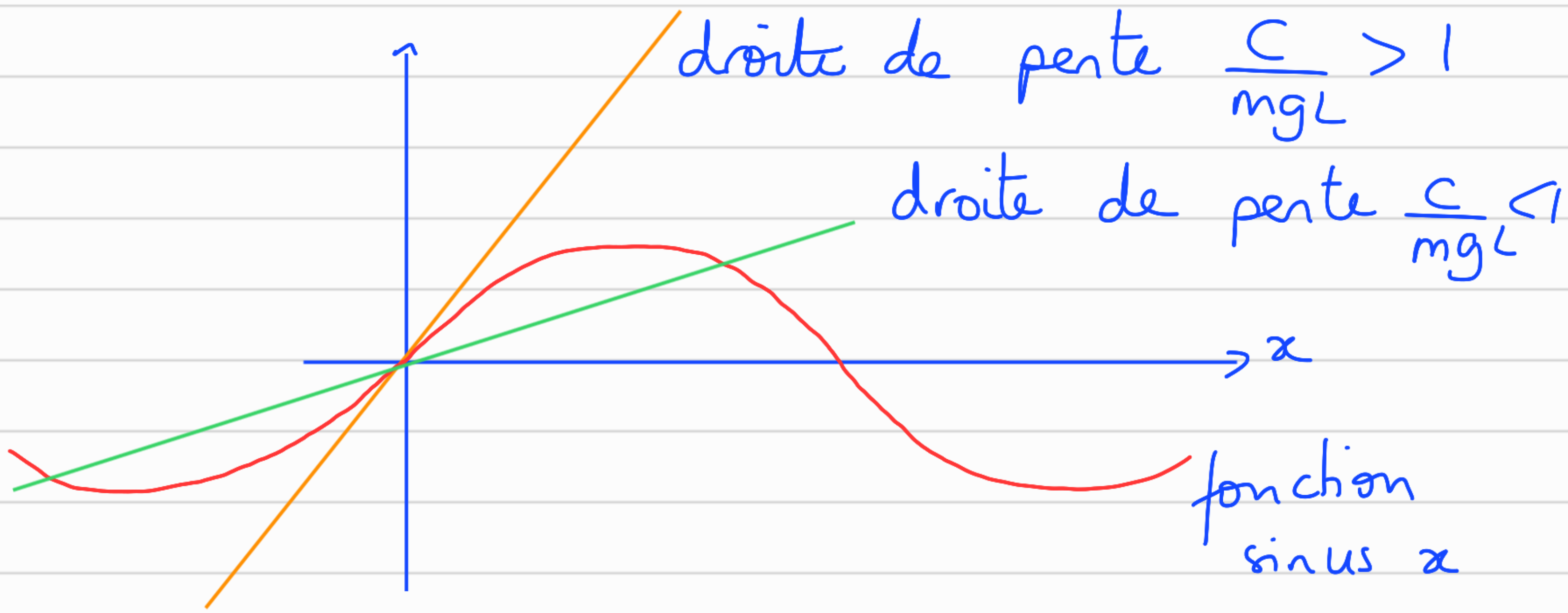
$$\Rightarrow -mgL\sin\theta_{eq} \cdot \dot{\theta}_{eq} + C\theta_{eq}\dot{\theta}_{eq} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\theta_{eq} = \frac{C\theta_{eq}}{mgL}}$$

Q3. Pour tout x, $\sin x < x$ donc

* si $\frac{C}{mgL} > 1$ la seule position d'équilibre possible est $\theta = 0$.

* si $\frac{C}{mgL} < 1$ 2 positions d'équilibre supplémentaires :



Remarque : si $\frac{C}{mgL}$ est encore plus faible il peut y avoir d'autres positions d'équilibre pour lesquelles la tige a fait plus d'1 tour.

Etude qualitative des équilibres : une position d'équilibre est stable si en écartant le système de cette position il y revient.

* si $C/mgL > 1$ le ressort est tellement raide qu'il ramène toujours la tige à la verticale $\Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow$ eq. stable.

* si $C/mgL < 1$ la raideur du ressort ne permet pas de ramener la tige à l'équilibre. Les 2 positions d'équilibre symétriques $\theta \neq 0$ sont stables et la position $\theta = 0$ ne l'est plus.

Q4. Stabilité des équilibres : il faut étudier le signe de $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}$.

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = C - mgL\cos\theta$$

Valeur en $\theta = 0$:

$$\left.\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = C - mgL > 0 \text{ si } C > mgL \Rightarrow \text{eq stable}$$

Q5. En présence de 2 forces conservatives, on a donc un mouvement conservatif : $E_m = \text{cte}$.

Avec $E_m = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + mgL\cos\theta$

Ainsi $\frac{dE_m}{dt} = 0 \iff mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\dot{\theta}\theta - mgL\sin\theta\dot{\theta} = 0$

$$\iff \boxed{mL^2\ddot{\theta} + C\theta - mgL\sin\theta = 0}$$

Q6. Pour de faibles valeurs de θ, $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C - mgL}{mL^2}\theta = 0$$

qui est l'équation d'un O.H de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C - mgL}{mL^2}}$$

et de période propre $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{C - mgL}}$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\frac{C}{mL} - g}}$$

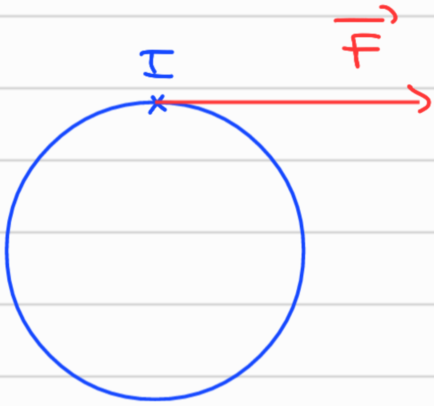
En posant $g_0 = \frac{C}{mL}$: $\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_0 - g}}}$

Si g_0 est réglé très proche de la valeur de g, alors de faibles variations de la valeur de g se traduisent par de fortes variations de la période des oscillations

Remarque : si $g_0 < g$ l'équation différentielle change de nature, ce n'est plus celle d'un OH.
$\Rightarrow$ il n'y a plus d'oscillations.

Exercice 5 :

Q1. La force $\vec{F}$ s'exerce sur un point de la corde qui a la même vitesse que le point I de la périphérie de la toupie



$P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}(I)$ Soit $\boxed{P(\vec{F}) = FR\omega}$

Q2. La toupie est soumise à :

* son poids $\vec{P}$
* la réaction du support $\vec{R}$
* la force $\vec{F}$ exercée par toto $\vec{F}$

Seule la force exercée par toto travaille (altitude constante donc $W(\vec{P})=0$ et contact toupie-support immobile donc $W(\vec{R})=0$

$\Rightarrow$ D'après le TEC appliqué à la toupie dans R galiléen on a :

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F}) = FR\omega$$

On a $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$

Pour un cylindre plein de masse m et de rayon R $J_\Delta = \frac{1}{2} mR^2$

$\Rightarrow E_c = \frac{1}{4} mR^2\omega^2$ et $\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} mR^2\omega\dot{\omega}$

Le TEC donne donc $FR\omega = \frac{1}{2} mR^2 \omega\dot{\omega}$

Soit $\boxed{\dot{\omega} = \frac{2F}{mR}}$

avec F, m et R constants $\dot{\omega} = cte$

et $\omega = \dot{\omega} t$. La vitesse angulaire augmente proportionnellement au temps.

Q3. On applique le TEC entre l'instant initial et l'instant final :

$$E_{cf} - E_{ci} = W_{if}(\vec{F})$$

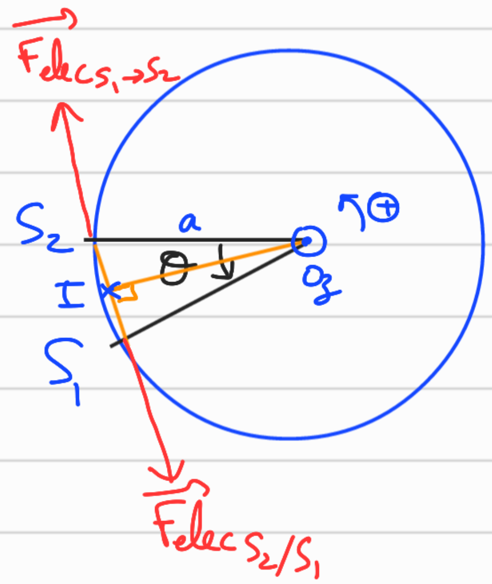
$$\frac{1}{2} J_\Delta \omega_f^2 - 0 = 4 \times 2\pi R \times F$$

$$\omega_f = \sqrt{\frac{16\pi R F}{J}}$$

En remplaçant J par son expression :

$$\boxed{\omega_f = \sqrt{\frac{32\pi F}{mR}}}$$

Exercice 6 :



Q1. $$E_{p,elec} = \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0 S_1S_2}$$

et $$S_1S_2 = 2 \times a \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{p,elec} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a \sin\theta/2}}$$

Q2. $E_{p,\text{torsion}} = \frac{1}{2}C(\theta-\theta_b)^2 = \frac{1}{2}C\theta^2$

car $\theta_b = 0$ dans la $1^{\text{ère}}$ expérience.

$$E_p = E_{p\,\text{torsion}} + E_{p\,\text{elec}} = \frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a \sin\theta/2}$$

On pose $E_0 = \frac{1}{2}C$

$$\Rightarrow E_p = E_0\left(\theta^2 + \frac{2q^2}{C\,8\pi\varepsilon_0 a\sin\theta/2}\right)$$

$$E_p = E_0\left(\theta^2 + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a C.\sin\theta/2}\right)$$

On pose $b = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a C}$ $\Rightarrow$ $\boxed{E_p = E_0\left(\theta^2 + \frac{b}{\sin\theta/2}\right)}$

Q3. θ_1 vérifie $\left.\frac{dE_p}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_1} = 0$

Avec $E_p = E_0\left(\theta^2 + b\sin^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$$\Rightarrow \left.\frac{dE_p}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_1} = 2E_0\,\theta_1\dot{\theta}_1 - bE_0 . \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right).\frac{\dot{\theta}_1}{2}\sin^{-2}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = 0$$

$$2\theta_1\dot{\theta}_1 - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a C} . \cos\frac{\theta_1}{2} . \frac{\dot{\theta}_1}{2} . \sin^{-2}\frac{\theta_1}{2} = 0$$

$$2\theta_1 - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a C} \cdot \frac{\cos\theta_1/2}{2\sin^2(\theta_1/2)} = 0$$

θ_1 est une position d'équilibre stable : si on écarte la bille de cette position elle y revient.
(= c'est un minimum de E_p)

Q4. $$\overrightarrow{F}_{elec\, S_1/S_2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 S_1S_2^3} \overrightarrow{S_1S_2}$$

le bras de levier correspond à la distance $OI = a\cos\theta/2$

$$\mathcal{M}_{(O_3)}(\overrightarrow{F}_{elec\, S_1/S_2}) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2a\sin\theta/2)^2} \cdot a\cos\theta/2$$

$$\mathcal{M}_{O_3}(\overrightarrow{F}_{elec\, S_1/S_2}) = -\frac{q^2 \cdot \cos\theta/2}{16\pi\varepsilon_0 a \sin^2\theta/2}$$

$$\mathcal{M}_{O_3}(\overrightarrow{F}_{éle\, S_2/S_1}) = \frac{q^2 \cos\theta/2}{16\pi\varepsilon_0 a \sin^2\theta/2}$$

$$\mathcal{M}_{O_3}(\overrightarrow{F}_{rappel/S_1}) = -C\theta$$

$\Rightarrow$ la position d'équilibre vérifie :

$$\mathcal{M}_{O_3}(\overrightarrow{F}_{elec\, S_1/S_2}) + \mathcal{M}_{O_3}(\overrightarrow{F}_{rappel/S_1}) = 0$$

$$-C\theta_1 + \frac{q^2 \cos\theta_1/2}{16\pi\varepsilon_0 a \sin^2\theta_1/2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\theta_1 - \frac{q^2 \cdot \cos\theta_1/2}{8\pi\varepsilon_0 a C \sin^2\theta/2} = 0$$

ce qui est la même équation.

Q5. $\theta_1 = 36° = 0{,}2\pi \text{ rad}$.

$$2 \cdot 0{,}2\pi - \frac{q^2 \cdot \cos(0{,}2\pi)}{8\pi \cdot 8{,}8 \cdot 10^{-12} \cdot 12 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4} \sin^2(0{,}2\pi)} = 0$$

$$0{,}4\pi - 8{,}8 \cdot 10^{14}\, q^2 = 0$$

$$\underline{q = 4 \cdot 10^{-8}\ C}$$

Q6. Le déplacement initial étant dans le sens direct, il faut tourner le bouton dans le sens indirect pour revenir en arrière.

Q7. $S_1S_2 = 2a\sin\frac{\theta}{2}$

$$\left.\begin{aligned} AN:\ S_1S_2 &= 2a \cdot \sin 18 = 0{,}618\,a \\ S_1S_2 &= 2a \sin 9 = 0{,}313\,a \end{aligned}\right\}\ \text{pratiquement divisé par 2}$$

Q8. Dans la loi de Coulomb $p = 2$.

Donc pour une distance divisée par 2 la force électrostatique est multipliée par 4, donc son moment aussi.
⇒ pour être à l'équilibre la torsion du fil doit donc être multipliée par 4 aussi.

$$C\left(\frac{\theta_1}{2} - \theta b_2\right) = 4C\theta_1$$

$$\Rightarrow \quad \theta b_2 = \left(\frac{1}{2} - 4\right)\theta_1 = -\frac{7}{2}\theta_1$$

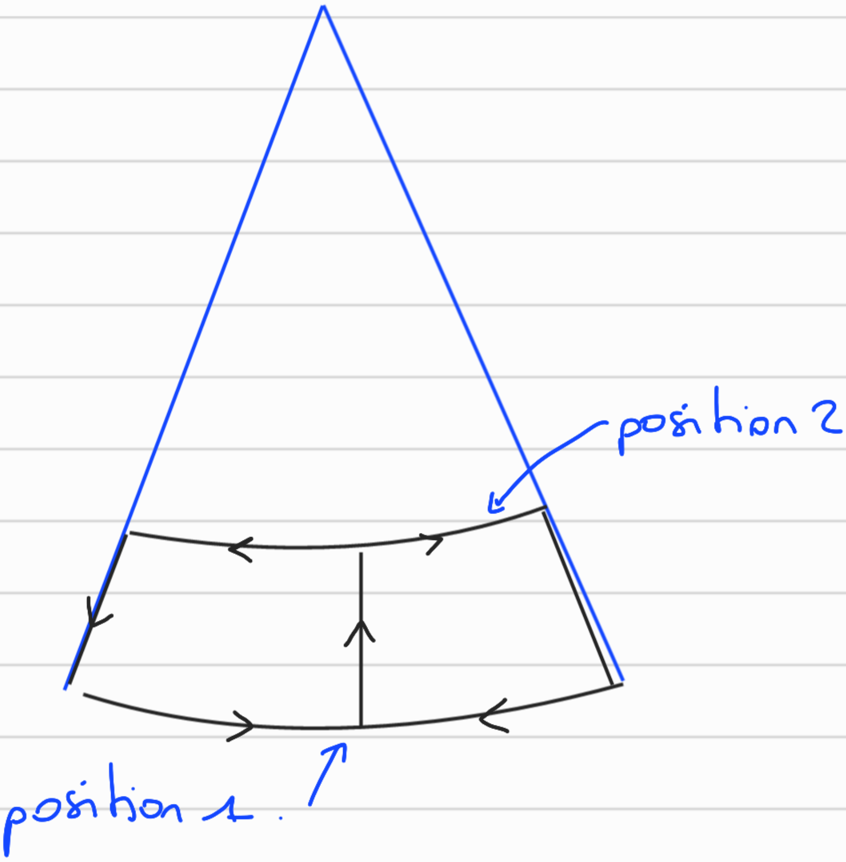
$$\underline{\theta b_2 = 126°}$$

Exercice 7 :

Q1. * Position 1 (accroupie) : distance a_1 entre le centre de masse et l'axe Δ.
* Position 2 (relevée) : distance a_2 entre le centre de masse et l'axe Δ.

$$\Rightarrow \quad a_1 > a_2 \quad \text{et} \quad J_1 > J_2$$

$$K = \frac{J_2}{J_1}\frac{a_2}{a_1} < 1.$$



Q2. A la position la plus basse le moment cinétique se conserve (les forces poids et tension du fil passent par l'axe Δ)

$$\Rightarrow J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$$

On a donc $\omega_2 > \omega_1$ et donc

$$E_{c_2} = J_2 \omega_2^2 > E_{c_1} = J_1 \omega_1^2 .$$

La vitesse de rotation et l'énergie cinétique du système augmente en subissant une discontinuité, par travail des forces intérieures.

(l'enfant et la balançoire ne constituent pas un solide, mais un système déformable).

Q3. TEC de $\theta = \theta_0$ à $\theta = 0$

$$\frac{1}{2} J_1 (\omega_1^2 - 0) = mg(1-\cos\theta_0) a_1$$

TEC de $\theta = 0$ à $\theta = \theta_1$

$$\frac{1}{2} J_2 (0 - \omega_2^2) = -mg(1-\cos\theta_1) a_2$$

En faisant le rapport membre à membre, il vient

avec $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, au bout d'une demi-oscillation, il vient :

$$\frac{J_2}{J_1}\left(-\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = -\frac{1-\cos\theta_1}{1-\cos\theta_0}\frac{a_2}{a_1}$$

$$\frac{J_1}{J_2}\underbrace{\left(\frac{J_2\omega_2}{J_1\omega_1}\right)^2}_{=1} = \frac{1-\cos\theta_1}{1-\cos\theta_0}\frac{a_2}{a_1}$$

$$(1-\cos\theta_0) = \underbrace{\frac{J_2}{J_1}\frac{a_2}{a_1}}_{=K}(1-\cos\theta_1)$$

$$(1-\cos\theta_0) = K(1-\cos\theta_1)$$

Partant de la même énergie au début de la 1/2 oscillation, on a de même $(1-\cos\theta_1) = K(1-\cos\theta_2)$ et par récurrence au bout de n passages par la position d'équilibre.

$$(1-\cos\theta_0) = K(1-\cos\theta_1) = K^2(1-\cos\theta_2) = \dots = K^n(1-\cos\theta_n)$$

Ce résultat donne $\theta_n = \frac{\pi}{2}$ pour

$K^n = (1-\cos\theta_0)$.

Exercice 8 :

Bilan des actions mécaniques sur le système {manège + enfant} :

* poids : vertical donc parallèle à l'axe de rotation (Oz).
* liaison pivot : parfaite

$\Rightarrow$ le moment cinétique scalaire de l'ensemble {manège + enfant} est constant.

On note α l'angle repérant la position de l'enfant par rapport à une direction fixe, et θ l'angle dont a tourné le manège.

$$L_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta} + mR^2\dot{\alpha} = \text{cte}$$

Avec les conditions initiales $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\dot{\alpha}(0) = 0$ on a donc $L_{Oz}(0) = 0$

$\Rightarrow L_{Oz} = 0$.

Par intégration on a :

$$\Delta\theta = -\frac{mR^2}{J_{Oz}}\Delta\alpha$$

Pour $\Delta\alpha = 2\pi$ $\boxed{\Delta\theta = -2\pi\frac{mR^2}{J_{Oz}}}$

Le manège a tourné en sens inverse de l'enfant.
(Pour avancer, l'enfant doit pousser le manège vers l'arrière. La valeur de l'angle dépend des masses respectives de l'enfant et du manège).