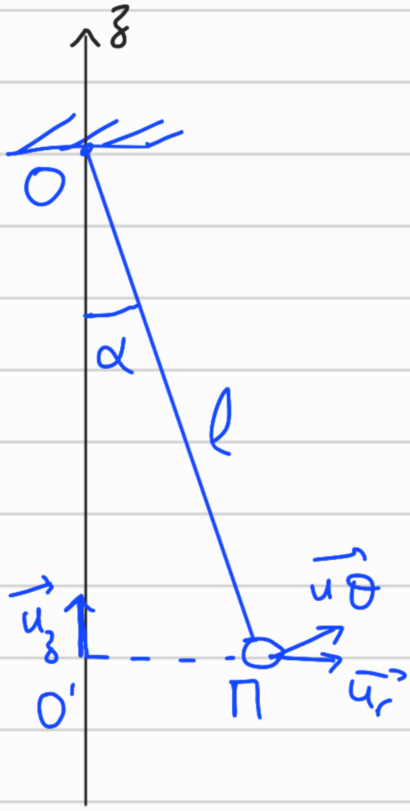
Correction du TD8

Exercice 1 :



Q1. Le mouvement est circulaire autour de l'axe Oz donc il est judicieux d'utiliser les coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

Q2. On applique le principe fondamental de la dynamique au système {bille M} de masse m constante, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

Bilan des forces : Poids : $\vec{P}$ $\begin{cases} \text{vertical} \\ \text{vers le bas} \\ \text{norme } P = mg \end{cases}$

Tension du fil $\vec{T}$ $\begin{cases} \text{direction du fil} \\ \text{vers le point O} \\ \text{norme } T. \end{cases}$

Accélération en coordonnées cylindriques pour un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = l\sin\alpha$ et de vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$

$$\vec{a} = -\ell \sin\alpha\, \omega^2 \, \vec{u_r}$$

soit $m \begin{pmatrix} -\ell\sin\alpha\,\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T\sin\alpha \\ 0 \\ T\cos\alpha \end{pmatrix}$

On a donc le système :

$$\begin{cases} T\sin\alpha = m\ell\sin\alpha\,\omega^2 \\ T\cos\alpha = mg \end{cases}$$

On élimine T en faisant le rapport :

$\tan\alpha = \dfrac{m\ell\sin\alpha\,\omega^2}{mg}$ $\qquad \dfrac{\cancel{\sin\alpha}}{\cos\alpha} = \dfrac{\ell\cancel{\sin\alpha}\,\omega^2}{g}$

$\Longleftrightarrow \ell\cos\alpha\,\omega^2 = g$ $\qquad \boxed{\omega^2 = \dfrac{g}{\ell\cos\alpha}}$

Q3. $\ell\cos\alpha < \ell$ donc $\dfrac{g}{\ell\cos\alpha} > \dfrac{g}{\ell}$

soit $\omega^2 > \dfrac{g}{\ell}$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

En dessous de la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ le système ne peut pas être en mouvement circulaire uniforme.

Exercice 2 :

Q1. Poussée d'Archimède : $\vec{\Pi_A} = -\rho_\ell V_{im} \vec{g}$

avec ρ_ℓ = masse volumique de l'eau salée
V_{im} = volume immergé de l'iceberg.

Q2. L'iceberg est à l'équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen donc d'après le principe d'inertie la somme des forces qu'il subit est nulle :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{\Pi_A}$$

En projetant sur l'axe vertical :

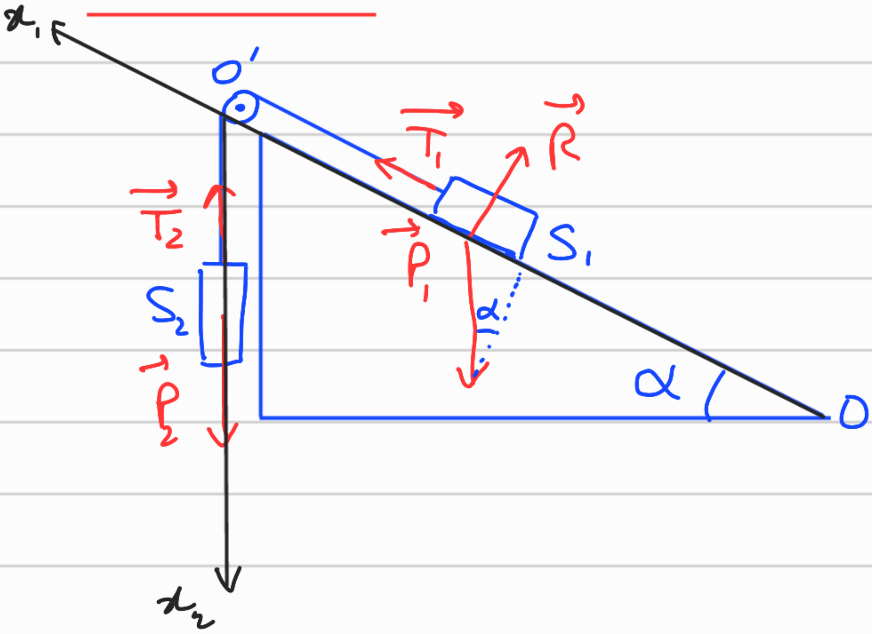
$$0 = -\rho_g V_{tot}\, g + \rho_\ell V_{im}\, g$$

Soit $\boxed{\dfrac{V_{im}}{V_{tot}} = \dfrac{\rho_g}{\rho_\ell}}$

AN : $\dfrac{V_{im}}{V_{tot}} = \dfrac{0{,}92}{1{,}02} = 0{,}90$

90 % du volume de l'iceberg est donc sous la surface de l'eau.

Exercice 3



La tension se conserve le long d'un fil idéal avec une poulie idéale donc

$\|\vec{T_1}\| = \|\vec{T_2}\| = T$

Le solide S_1 glisse sans frottements donc $\vec{R}$ est orthogonale au plan incliné.

On applique la $2^{ème}$ loi de Newton aux 2 masses dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m_1 \vec{a_1} = \vec{T_1} + \vec{R} + \vec{P_1} \quad \text{et} \quad m_2 \vec{a_2} = \vec{T_2} + \vec{P_2}$$

On projette sur les axes (Ox_1) pour S_1 et $(O'x_2)$ pour S_2 :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = T - m_1 g \sin\alpha \\ m_2 \ddot{x}_2 = -T + m_2 g \end{cases}$$

Le fil a une longueur constante donc

$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = a$

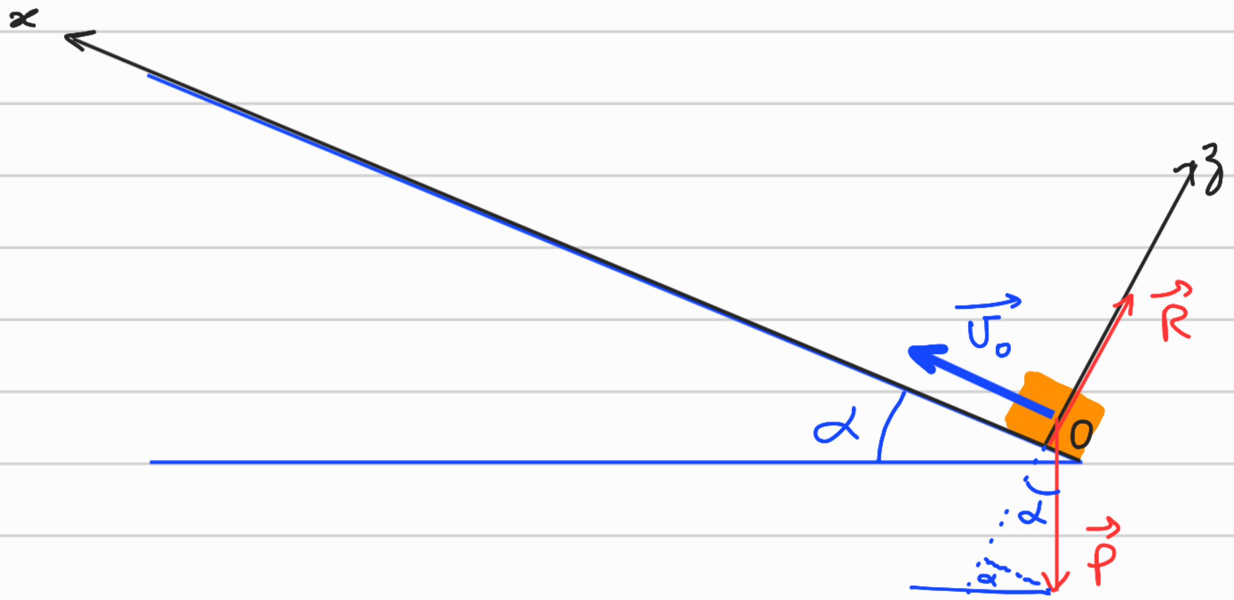
On a donc $\begin{cases} m_1 a = T - m_1 g \sin\alpha \\ m_2 a = -T + m_2 g \end{cases}$

On élimine T : $m_1 a = m_2 g - m_2 a - m_1 g \sin\alpha$

Soit $a(m_1 + m_2) = (m_2 - m_1 \sin\alpha) g$

$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2} g}$$

Exercice 4 :



On applique le principe fondamental de la dynamique au système {brique} de masse constante dans le référentiel terrestre supposé galiléen :
Bilan des forces :

Poids $\vec{P}$ $\begin{cases} \text{vertical vers le bas} \\ \text{norme} \quad P = mg \end{cases}$

Réaction du support : $\vec{R}$ $\begin{cases} \text{orthogonale au plan incliné (pas de frottements)} \\ \text{norme} \quad R. \end{cases}$

On a donc : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$

On projette sur l'axe (Ox) :

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha$$

Soit $\ddot{x} = -g\sin\alpha$

Par intégrations successives et en utilisant les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, on obtient :

$$\dot{x}(t) = -g\sin\alpha\, t + v_0$$

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2 + v_0 t}$$

Q2. La brique s'arrête lorsque $\dot{x} = 0$

$$-g\sin\alpha\, t_f + v_0$$

$$\boxed{t_f = \frac{v_0}{g\sin\alpha}}$$

$$x(t_F) = -\frac{1}{2} g \sin\alpha \left(\frac{v_0}{g\sin\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{v_0}{g\sin\alpha}$$

$$\boxed{x_F = \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}}$$

AN : $t_F = \frac{1{,}5}{9{,}8 . \sin 20} = \underline{0{,}45\ s}$

$$x_F = \frac{1{,}5^2}{2 \times 9{,}8 . \sin 20} = \underline{0{,}36\ m}$$

Q3. En incluant les frottements, le principe fondamental de la dynamique appliqué au système {brique} de masse constante dans le référentiel terrestre supposé galiléen et projeté sur l'axe (Ox) donne :

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - R_t$$

$$= -mg\sin\alpha - \mu_d . R_n$$

De plus, il n'y a pas de mouvement dans la direction (Oz) donc $\ddot{z} = 0$ soit :

$$-mg\cos\alpha + R_n = 0$$

$$\Rightarrow R_n = mg\cos\alpha$$

On obtient donc $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - \mu_d\, mg\cos\alpha$

$$\boxed{\ddot{x}(t) = -g(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha)}$$

Q4. Par intégrations successives en tenant compte des conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$, on a :

$$\dot{x}(t) = -g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)t + v_0$$

et $$\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)t^2 + v_0 t}$$

La brique s'arrête pour $\dot{x}(t_F') = 0$

$\Leftrightarrow$ $-g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)t_F' + v_0 = 0$

$$\boxed{t_F' = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}}$$

et $$x_F' = -\frac{1}{2}g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)\frac{v_0^2}{g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)} + \frac{v_0^2}{g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}$$

$$\boxed{x_F' = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}}$$

AN (pas demandée) : $t_F' = \underline{0{,}29 \text{ s}}$

$x_F' = \underline{0{,}22 \text{ m}}$

Q5. Lorsque la brique est à l'arrêt = à l'équilibre $\vec{P} + \vec{R_T} + \vec{R_N} = \vec{0}$ d'après le principe d'inertie.
En projetant sur l'axe (Ox) on a

$$-mg\sin\alpha + R_T = 0$$

$R_T = mg\sin\alpha > 0$ donc la force de frottement est dirigée vers le haut.

Q6. La brique reste à l'arrêt tant que

$$R_T = mg\sin\alpha$$

Or $R_{T\,max} = \mu_s \times R_N$ avec $R_N = mg\cos\alpha$

d'où $mg\sin\alpha_{max} = \mu_s . mg\cos\alpha_{max}$

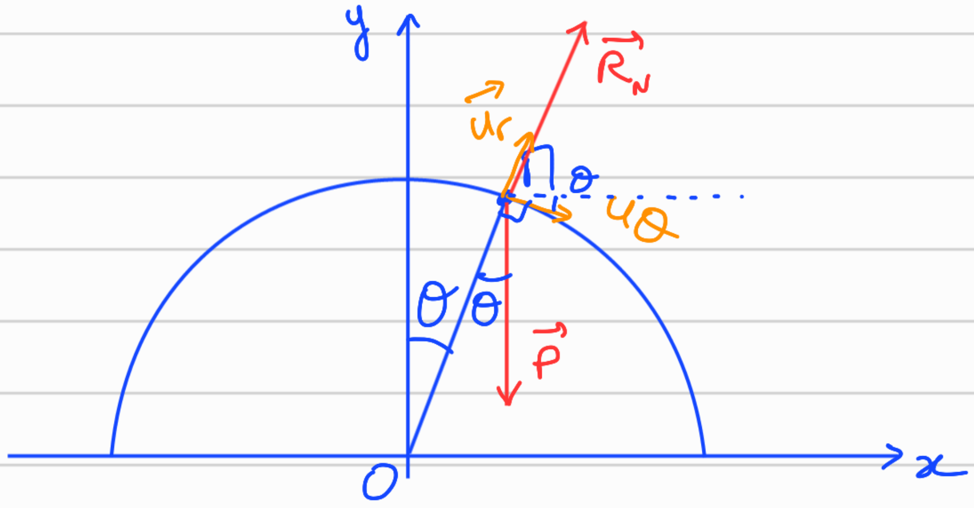
$$\boxed{\tan\alpha_{max} = \mu_s}$$

AN : $\underline{\alpha_{max} = 11°}$

Exercice 5 :

Q1. Pendant la 1ère phase, le mouvement est circulaire : $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$



Bilan des forces :

* Poids $\begin{cases} \text{vertical vers le bas} \\ \text{norme } P = mg \end{cases}$

* Réaction du support : $\begin{cases} \text{orthogonale au support} \\ \text{norme } R_N \end{cases}$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système {esquimau} de masse constante, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N}$$

En projetant selon $\vec{u_\theta}$ on obtient :

$$R\ddot{\theta} = g\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta}$$

Q2. $$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = \frac{g}{R}\frac{d}{dt}(-\cos\theta)$$

$$\left[\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right]_0^t = \frac{-g}{R}\left[\cos\theta\right]_0^t$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - 0 = \frac{-g}{R}(\cos\theta - \cos 0)$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}$$

Q3. En projetant selon $\vec{u_R}$ on a :

$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R_N$$

$$R_N = mg\cos\theta - mR\frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$$

$$R_N = mg\cos\theta - 2mg + 2mg\cos\theta$$

$$\boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2)}$$

Q4. L'esquimau quitte l'igloo lorsque la réaction s'annule :

Soit $\boxed{\cos\theta = \frac{2}{3}}$

Cet angle est indépendant de g donc il serait le même sur une autre planète.

Q5. Pour $\cos\theta = \frac{2}{3}$ on a $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\left(1 - \frac{2}{3}\right)$

soit $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$

et $\vec{v} = R\sqrt{\frac{2g}{3R}}\,\vec{u_\theta}$

Soit $\vec{v} = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}\,\vec{u_\theta}$

et $\vec{u_\theta} = \cos\theta\,\vec{u_z} - \sin\theta\,\vec{u_y}$

donc $v_z = \sqrt{\frac{2Rg}{3}} \cdot \frac{2}{3}$

$$v_y = -\sqrt{\frac{2Rg}{3}}\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{10Rg}{3}} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\vec{v_d} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2Rg}{3}}\,\vec{u_x} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10Rg}{3}}\,\vec{u_y}$$

$$\boxed{\vec{v_d} \simeq 1{,}7\sqrt{R}\,\vec{u_x} - 1{,}9\sqrt{R}\,\vec{u_y}}$$

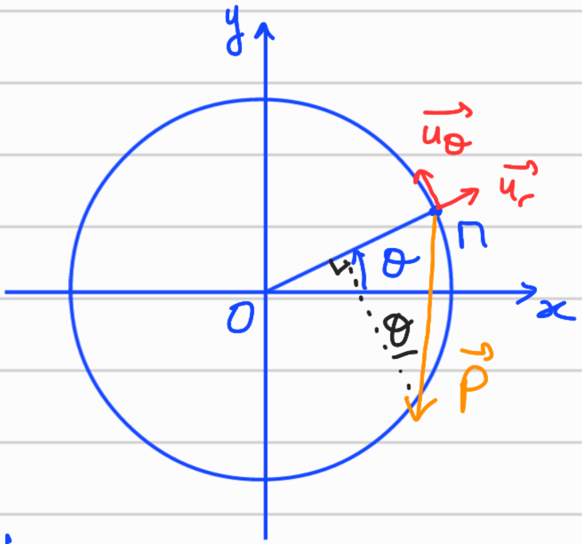
$$\left(\text{et } v_d = \sqrt{\frac{4}{9}\cdot\frac{2Rg}{3} + \frac{1}{9}\frac{10Rg}{3}} = \sqrt{\frac{18Rg}{27}} = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}\right)$$

Exercice 6 :

Q1. On étudie le système {chaussette} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Dans la 1ère phase, le système est en mouvement circulaire uniforme, de rayon R et de vitesse angulaire ω.

$$\vec{v} = R\omega\,\vec{u_\theta}$$

$$\vec{a} = -R\omega^2\,\vec{u_r}$$



Q2. Bilan des forces sur la chaussette :

* Poids $\vec{P}$ $\begin{cases} \text{verticale vers le bas} \\ \text{norme } P = mg \end{cases}$

* Réaction du tambour : $\vec{R}$ (pas connue à priori, une composante radiale selon $\vec{u_r}$ notée $\vec{R_N}$ et une composante tangentielle notée $\vec{R_T}$).

On applique le principe fondamental de la dynamique au système {chaussette} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

Soit $\begin{pmatrix} -mR\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_N \\ R_T \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} R_N &= mg\sin\theta - mR\omega^2 \\ R_T &= mg\cos\theta \end{aligned}}$$

Q3. La composante radiale s'annule pour θ_0 tel que $mg\sin\theta_0 = mR\omega^2$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin\theta_0 = \frac{R\omega^2}{g}}$$

AN avec $R = 0{,}25$ m et $\omega = \dfrac{50 \times 2\pi}{60}$

$$\sin\theta_0 = \frac{0{,}25 \times 50^2 \times 4\pi^2}{60^2 \times 9{,}81}$$

Soit $\underline{\sin\theta_0 = 44°}$

Q4. Lorsque la réaction du support s'annule, il n'y a plus contact entre le tambour et la chaussette, elle se décolle de la paroi.

A partir du point $M_0(R, \theta_0)$, la chaussette est en mouvement à accélération $\vec{a} = \vec{g}$ constante puisqu'elle n'est alors soumise qu'à son poids. Et sa vitesse initiale vaut

$$\vec{v_0} = R\omega \, \vec{u_{\theta_0}} .$$

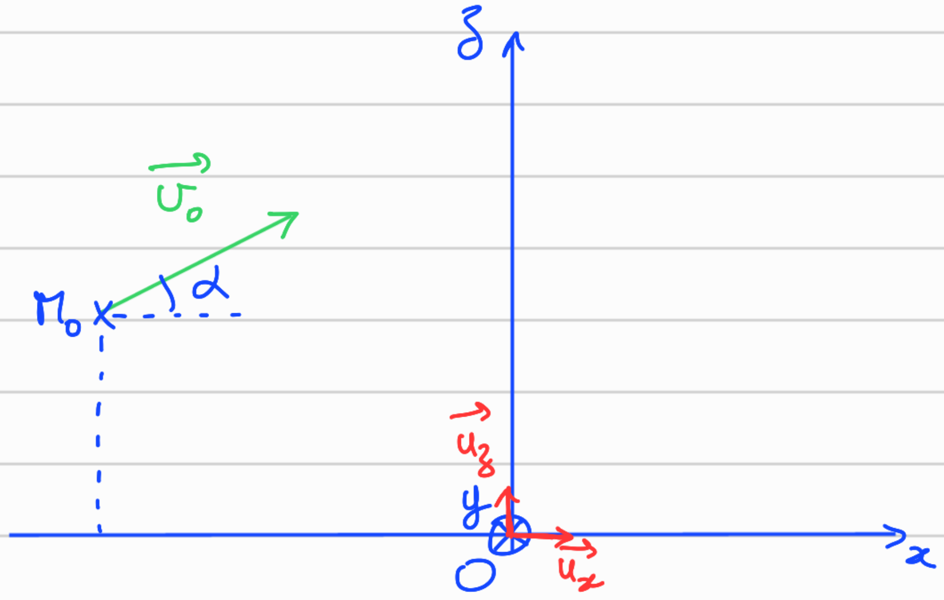
Exercice 7 :

Q1. On applique le principe fondamental de la dynamique au système {ballon} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P}$$

On projette selon les 3 axes d'un repère cartésien :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$



On choisit l'origine du repère au sol sous le panier et on utilise les conditions initiales

$$\vec{v}(0) = v_0 \cos\alpha \, \vec{u_x} + v_0 \sin\alpha \, \vec{u_z}$$

$$\vec{OM}(0) = -D\,\vec{u_x} + h\,\vec{u_z}$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha . t - D \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha . t + h \end{cases}}$$

Q2. On isole t dans l'expression de x

$$t = \frac{x + D}{v_0 \cos\alpha}$$

$$\boxed{z(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x+D}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x+D}{v_0 \cos\alpha}\right) + h}$$

Q3. Pour que le panier soit marqué, il faut $z(0) = H$.

$$H = -\frac{1}{2} g \left(\frac{D}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{D}{v_0 \cos\alpha}\right) + h$$

$$H = -\frac{g D^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + D \tan\alpha + h.$$

or $1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

soit $H = -\frac{g D^2}{2 v_0^2} (1 + \tan^2\alpha) + D \tan\alpha + h$

On résout le polynôme du second degré en $\tan\alpha$. On pose $X = \tan\alpha$

$$\frac{gD^2}{2v_0^2}X^2 - DX + \frac{gD^2}{2v_0^2} + H - h = 0$$

$$X^2 + \frac{2Dv_0^2}{gD^2}X + \frac{2v_0^2}{gD^2}\left(\frac{gD^2}{2v_0^2} + H - h\right) = 0$$

$$X^2 + \frac{2v_0^2}{gD}X + 1 + \frac{2v_0^2}{gD^2}(H-h) = 0$$

Q4. Ce polynôme admet des racines réelles si $\Delta > 0$.

$$\Delta = \frac{4v_0^4}{g^2D^2} - 4\left(1 + \frac{2v_0^2}{gD^2}(H-h)\right) > 0$$

On pose $Y = v_0^2$. On a donc le polynôme

$$\frac{4}{g^2D^2}Y^2 - \frac{8}{gD^2}(H-h)Y - 4 > 0$$

$$\Delta = \frac{64}{g^2D^4}(H-h)^2 + \frac{64}{g^2D^2} = \frac{64}{g^2D^4}\left((H-h)^2 + D^2\right) > 0$$

Ce polynôme est du signe de $\frac{4}{gD^2}$ (donc >0) à l'extérieur des racines

Racines : $Y = \frac{4}{gD^2}(H-h)\times\frac{g^2D^2}{4} \pm \frac{4}{gD^2}\sqrt{(H-h)^2+D^2}\times\frac{g^2D^2}{4}$

$$Y = g(H-h) \pm g\sqrt{(H-h)^2+D^2}$$

Pour $Y < g(H-h) - g\sqrt{(H-h)^2+D^2}$

Et $Y > g(H-h) + g\sqrt{(H-h)^2+D^2}$

le polynôme est positif.

Or $Y = v_0^2$ donc $Y > 0$ ce qui exclut les valeurs négatives.

Il faut donc $v_0^2 > g\left(H-h+\sqrt{(H-h)^2+D^2}\right)$

Soit $\boxed{v_0 > \sqrt{g\left(H-h+\sqrt{(H-h)^2+D^2}\right)}}$

Q6 AN pour un lancer franc :

$$v_0 > \sqrt{9{,}81\left(3{,}05-2+\sqrt{(3{,}05-2)^2+4{,}60^2}\right)}$$

Soit $\underline{v_0 > 7{,}5 \text{ m.s}^{-1}}$

AN Pour un panier à 3 points :

$$v_0 > \sqrt{9,81\left(3,05-2+\sqrt{(3,05-2)^2+6,25^2}\right.}$$

$$\underline{v_0 > 8,51\ m.s^{-1}}$$

Q7. $$X^2 + \frac{2v_0^2}{gD}X + 1 + \frac{2v_0^2}{gD^2}(H-h) = 0$$

La condition $\Delta > 0$ étant remplie,

on a $$X = \frac{v_0^2}{gD} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

avec $$\Delta = \frac{4v_0^4}{g^2D^2} - 4\left(1 + \frac{2v_0^2}{gD^2}(H-h)\right)$$

$$= \frac{4}{g^2D^2}\left(v_0^4 - g^2D^2 - 2v_0^2g(H-h)\right)$$

$$X = \frac{v_0^2}{gD} \pm \frac{\sqrt{v_0^4 - g^2D^2 - 2v_0^2g(H-h)}}{gD}$$

donc $$\tan\alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g^2D^2 - 2v_0^2g(H-h)}}{gD}.$$

Il y a donc 2 valeurs possibles pour $\tan\alpha$.

Q8. Pour $v_0 = 10\,m.s^{-1}$ et $D = 4,60\,m$ (lancer franc) on a

$$\tan\alpha = \frac{10^2 \pm \sqrt{10^4 - 9{,}81^2 . 4{,}60^2 - 2.10^2 . 9{,}81(3{,}05-2)}}{9{,}81 \times 4{,}60}$$

$$\tan\alpha = 3{,}92 \quad \text{ou} \quad \tan\alpha = 0{,}51$$

Soit $\underline{\alpha = 75{,}7°}$ ou $\underline{\alpha = 27°}$

Q9. L'équation à résoudre pour marquer est :

$$H = -\frac{gD^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + D\tan\alpha + h \quad (\to Q.3)$$

On isole v_0 :

$$H - h - D\tan\alpha = -\frac{gD^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

$$2v_0^2\cos^2\alpha\left(H - h - D\tan\alpha\right) = -gD^2$$

$$v_0^2 = \frac{gD^2}{2\cos^2\alpha(h + D\tan\alpha - H)}$$

Soit $$\boxed{v_0 = \frac{D}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(h - H + D\tan\alpha)}}}$$

Q10. AN : $$v_0 = \frac{4{,}60}{\cos 70}\sqrt{\frac{9{,}81}{2(2 - 3{,}05 + 4{,}60\tan 70)}} = 8{,}8\,m.s^{-1}$$

Exercice 8 :

Q1. On applique le principe fondamental de la dynamique au système {plongeur} de masse constante dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

Ici la seule force prise en compte est le poids donc $m\vec{a} = \vec{g}$.

On se place en coordonnées cartésiennes avec l'origine du repère au niveau de l'eau, et l'axe Oz descendant :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = g \end{cases}$$

Par intégrations successives et avec les conditions initiales du problème : $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = 0$, on a :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = g\frac{t^2}{2} \end{cases}$$

On détermine t_c tel que $z(t_c) = h$

$$\boxed{t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

AN : $t_c = \sqrt{\frac{2.10}{9,8}} = \underline{1,4\,s}$

et $v_e = \dot{z}(t_c)$ soit $\boxed{v_e = \sqrt{2gh}}$

AN : $v_e = \sqrt{2.9{,}8.10} = \underline{14 \text{ m.s}^{-1}}$

Q2. Dans la 2ème phase du mouvement (après son entrée dans l'eau), le plongeur est soumis à des forces supplémentaires : la poussé d'Archimède et les frottements fluides.
Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système {plongeur} dans le référentiel terrestre et projeté sur l'axe (Oz) donne :

$$m\ddot{z} = mg - \frac{m}{d_h} g - k\dot{z}$$

En notant $\dot{z} = v_z$ on obtient :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{k}{m} v_z = \left(1 - \frac{1}{d_h}\right) g$$

Avec $\tau = \frac{k}{m}$ on a $\boxed{\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = \left(1 - \frac{1}{d_h}\right) g}$

Q3. La solution de cette équation différentielle est la somme d'une solution particulière et de la solution de l'équation homogène :

$$v_{zP} = \tau g\left(1-\frac{1}{dh}\right)$$

$$v_{zH} = A e^{-t/\tau}$$

$$v_z(t) = A e^{-t/\tau} + \tau g\left(1-\frac{1}{dh}\right).$$

On détermine la constante A en posant comme origine des temps l'entrée dans l'eau : $v_z(0) = v_e$. On obtient :

$$v_e = A + \tau g\left(1-\frac{1}{dh}\right) \Rightarrow A = v_e - \tau g\left(1-\frac{1}{dh}\right)$$

$$\boxed{v_z(t) = \left[v_e - \tau g\left(1-\frac{1}{dh}\right)\right] e^{-t/\tau} + \tau g\left(1-\frac{1}{dh}\right)}$$

Q4. On détermine la vitesse limite

$$v_L = \lim_{t\to\infty} v_z$$

$$\boxed{v_L = \tau . g\left(1-\frac{1}{dh}\right)}$$

AN : $v_L = \frac{80}{250} . 9{,}8\left(1-\frac{1}{0{,}9}\right) = \underline{-0{,}35\,m.s^{-1}}$

Q5. $|v_L| = -v_L$ donc

$$\boxed{v_z(t) = \left(v_e + |v_L|\right) e^{-t/\tau} - |v_L|}.$$

le plongeur commence à remonter pour $v_z(t_1) = 0$:

$$(v_e + |v_L|) e^{-t_1/\tau} - |v_L| = 0$$

$$v_e + |v_L| e^{-t_1/\tau} = |v_L|$$

$$t_1 = -\tau \ln \frac{|v_L|}{v_e + |v_L|}$$

$$\boxed{t_1 = \tau \ln \left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right)}$$

AN : $t_1 = \frac{80}{250} \ln \left(1 + \frac{14}{0{,}35}\right) = \underline{1{,}2\ s}$.

Q6. La profondeur maximale atteinte est $z(t_1)$.

On intègre $v_z(t)$ pour obtenir $z(t)$; en prenant comme condition initiale $z(0) = 0$:

$$z(t) = -\tau (v_e + |v_L|) e^{-t/\tau} - |v_L| t + A$$

avec A une constante que l'on

détermine avec la condition initiale $z(0) = 0$:

$$0 = -\tau(v_e + |v_L|)e^0 + A$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \tau(v_e + |v_L|)$$

Soit $\boxed{z(t) = \tau(v_e + |v_L|)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) - |v_L|.t}$

On détermine ensuite $z(t_1)$:

$$z(t_1) = \tau(v_e + |v_L|)\left(1 - e^{-\ln\left(1+\frac{v_e}{|v_L|}\right)}\right) - |v_L|\tau \ln\left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right)$$

$$z(t_1) = \tau(v_e + |v_L|)\left(1 - e^{\ln\left(\frac{|v_L|}{v_e + |v_L|}\right)}\right) - |v_L|\tau \ln\left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right)$$

$$z(t_1) = \tau(v_e + |v_L|)\left(1 - \frac{|v_L|}{v_e + |v_L|}\right) - |v_L|\tau \ln\left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right)$$

$$z(t_1) = \tau(v_e + |v_L|)\left(\frac{v_e}{v_e + |v_L|}\right) - |v_L|\tau.\ln\left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right)$$

$$z(t_1) = \tau.v_e - |v_L|\tau \ln\left(1 + \frac{v_e}{|v_L|}\right)$$

AN : $z(t_1) = 0{,}32.14 - 0{,}35.0{,}32 \ln\left(1 + \frac{14}{0{,}35}\right)$

$\underline{z(t_1) = 4{,}1\,\text{m}}$