

Correction du TD12

Exercice 1 :

Q1. c'est la température qui varie entre les 2 situations (le pneu est supposé indilatatable).

On a donc n et V constants

D'après la loi des GP : $PV = nRT$

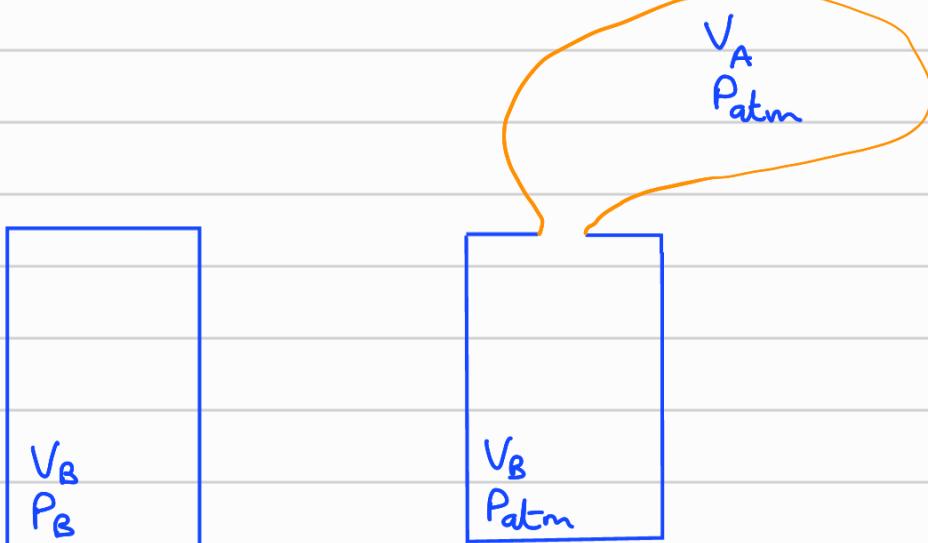
$$\text{on a donc } \frac{nR}{V} = \frac{P}{T}$$

$$\text{D'où } \frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f} \Rightarrow T_f = \frac{P_f}{P_i} T_i$$

$$\text{AN: } T_f = \frac{2,3}{2,1} \times (273,15 + 20) = 321 \text{ K}$$

$$\underline{T_f = 47,9^\circ\text{C}}$$

Q2.



état initial

état final

D'après la loi des GP $PV = nRT$

Or ici c'est la température qui est constante (et n aussi pour le système {gaz} considéré) :

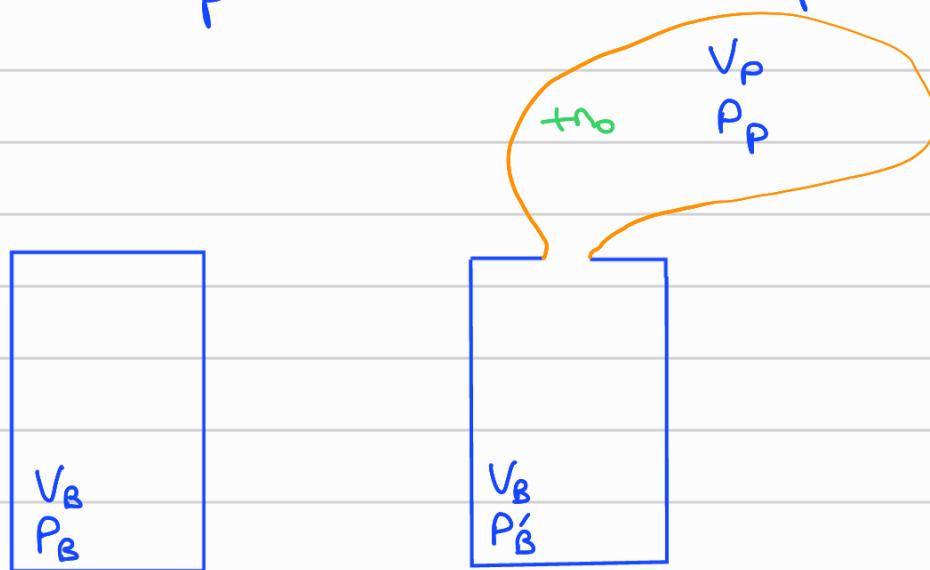
$$P_B V_B = (V_A + V_B) P_{atm}$$

$$V_A = \frac{P_B V_B}{P_{atm}} - V_B = V_B \left(\frac{P_B}{P_{atm}} - 1 \right)$$

AN : $V_A = 60 \times \left(\frac{15}{1,0} - 1 \right) = \underline{\underline{840 \text{ L}}}$

Q3. La température est à nouveau constante mais cette fois le volume est connu on cherche la pression.

Et le pneu contenait déjà du gaz (n_0)



Etat initial

Etat final

On a donc $nRT = \text{cte}$ pour cette transformation .

Or dans l'état final $n = n_1 + n_2$

dans la bouteille dans le pneu

$$\text{Et on a } P'_B V_B = n_1 RT \quad (\text{dans la bouteille})$$

$$P_p V_p = (n_0 + n_2) RT \quad (\text{dans le pneu})$$

$$\text{d'où } n = n_1 + n_2 = \frac{P'_B V_B}{RT} + \left(\frac{P_p V_p}{RT} - n_0 \right)$$

$$\text{avec } n_0 RT = P_{\text{atm}} V_p \quad (\text{pneu initialement à } P_{\text{atm}})$$

$$\Rightarrow n = \frac{P'_B V_B}{RT} + \left(\frac{P_p V_p}{RT} - \frac{P_{\text{atm}} V_p}{RT} \right)$$

$$\Rightarrow n RT = P'_B V_B + P_p V_p - P_{\text{atm}} V_p$$

$$\Rightarrow P_B V_B = P'_B V_B + P_p V_p - P_{\text{atm}} V_p$$

$$P'_B V_B = P_B V_B - P_p V_p + P_{\text{atm}} V_p$$

$$P'_B V_B = P_B V_B + V_p (P_{\text{atm}} - P_p)$$

$$P'_B = P_B + \frac{V_p}{V_B} (P_{\text{atm}} - P_p)$$

$$\text{AN: } P'_B = 15 + \frac{50}{60} (1 - 2,4) = \underline{\underline{13,8 \text{ bar}}}$$

$$\Delta P = P'_B - P_B = \frac{V_p}{V_B} (P_{atm} - P_p) = 1,2 \text{ bar}$$

On peut donc gonfler $\frac{15-25}{1,2} = 10,5$

sont 10 pneus.

Exercice 2 :

$$\begin{aligned} Q1. \quad \Delta U &= m c_{v,l} \Delta T \\ &= \rho_l V c_{v,l} \Delta T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AN: \quad \Delta U &= 10^3 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 6,18 \cdot 10^3 (100-15) \\ &= \underline{8,9 \cdot 10^4 \text{ J}} \end{aligned}$$

$$Q2. \quad \Delta U = m c_{v,vap} \Delta T = n \times n c_{v,vap} \Delta T$$

$$AN: \quad \Delta U = 18 \cdot 10^{-3} \cdot 1,85 \cdot 10^3 (200-115) = \underline{6,2 \cdot 10^3 \text{ J}}$$

$$Q3. \quad \Delta U = n C_{v,m} \Delta T$$

Or pour un GP monoatomique $C_{v,m} = \frac{3}{2} R$

$$\rightarrow \Delta U = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,314 \cdot (35-10) = \underline{31 \cdot 10^2 \text{ J}}$$

Exercice 3 :

On étudie le système {piston} à l'équilibre mécanique dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On pose l'axe Oz vertical orienté vers le haut.

Bilan des forces sur le piston :

* poids $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_3$

* force de pression exercée par l'air extérieur : $\vec{F}_{ext} = -P_0 S \vec{e}_3$

* force de pression exercée par l'air intérieur : $\vec{F}_{int} = P_{int} \cdot S \vec{e}_3$

* la force exercée par la masse M supplémentaire $\vec{F}_M = -Mg \vec{e}_3$

(se détermine avec le principe des actions réciproques après avoir fait un bilan des forces sur la masse M).

* La réaction des parois du cylindre, si on suppose qu'il glisse sans frottements et que le cylindre est d'axe vertical $\vec{R} = \vec{0}$ d'après le PFD projeté sur le plan horizontal).

Situation 1 :

$$-mg + (P_1 - P_0)s = 0 \Rightarrow P_1 = \frac{mg}{s} + P_0$$

D'après la loi des GP $P_1 \cdot \underbrace{Sh_1}_{=V_1} = nRT_0$

$$\text{d'où } \left(\frac{mg}{s} + P_0 \right) Sh_1 = nRT_0$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{nRT_0}{mg + P_0 \cdot s}$$

Situation 2 :

$$-mg + (P_2 - P_0)s = 0 \Rightarrow P_2 = \frac{mg}{s} + P_0$$

$$\text{et } P_2 \cdot Sh_2 = nRT$$

$$\Rightarrow \left(\frac{mg}{s} + P_0 \right) Sh_2 = nRT$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{nRT}{mg + P_0 s}$$

Situation 3 :

Il faut inclure la force \vec{F}_n dans la 1ère loi de Newton :

$$-(m+n)g + (P_3 - P_0)s = 0$$

$$P_3 = \frac{(m+n)g}{s} + P_0$$

Et on a $P_3 Sh_3 = nRT$

$$\Rightarrow \left(\frac{(m+n)g}{s} + P_0 \right) Sh_3 = nRT$$

$$\Rightarrow h_3 = \frac{nRT}{(m+n)g + P_0 s}$$

Situation 4 :

on a la même équation pour l'équilibre mécanique : $P_4 = \frac{(m+n)g}{s} + P_0$

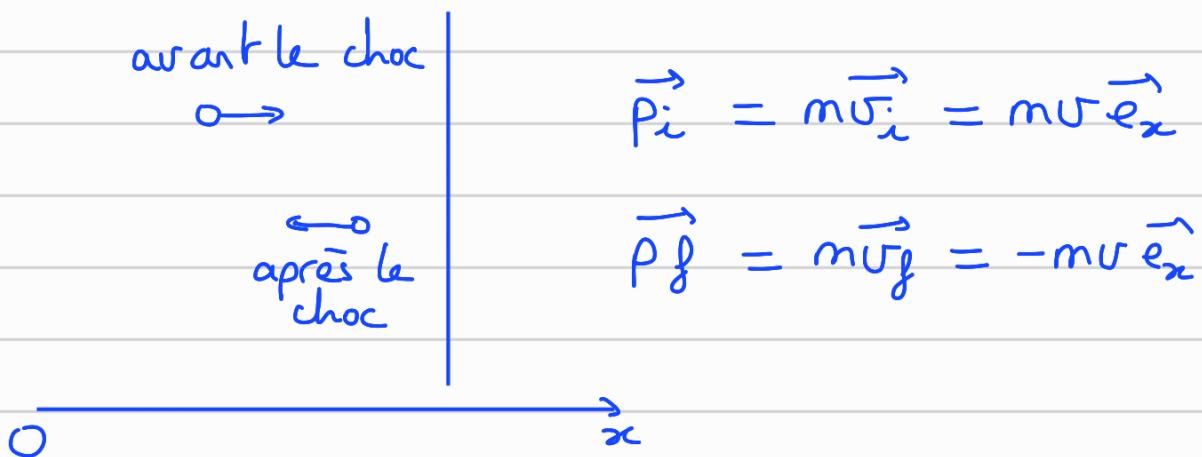
Et $P_4 Sh_4 = nRT_0$

$$\left(\frac{(m+n)g}{s} + P_0 \right) Sh_4 = nRT_0$$

$$h_4 = \frac{nRT_0}{(m+n)g + P_0 s}$$

Exercice 4 :

Q1.

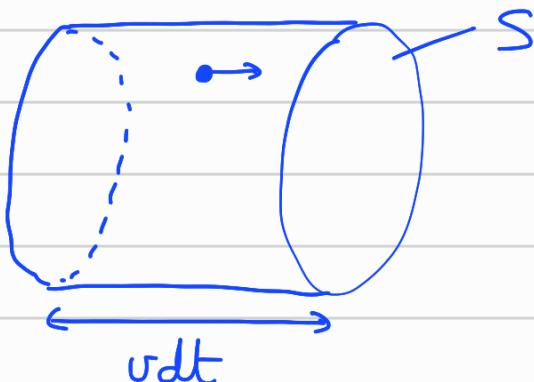


$$\delta p = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -m\nu \vec{e}_x - m\nu \vec{e}_x$$

$$\boxed{\delta p = -2m\nu \vec{e}_x}$$

Q2. le nombre de molécules qui vont "frapper" la paroi pendant la durée dt sont celles qui étaient comprises dans le volume $S \times v dt$ et avaient une vitesse selon $+\vec{e}_x$, soit $1/6^{\text{ème}}$ de ces molécules.

densité partielle
= nb de molécules
par unité de volume:
 $n^* = \frac{N}{L^3}$ (énoncé)



$$dn = \frac{1}{6} \times n^* \times v dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{N}{L^3} \cdot S v dt$$

Si on considère une surface, carrée de côté L alors $S = L^2$ d'où

$$dn = \frac{1}{6} \frac{N}{L} v dt$$

La variation de quantité de mouvement totale est donc $\delta \vec{p}_{\text{tot}} = dn \times \vec{p}$

$$\Rightarrow \delta \vec{p}_{\text{tot}} = \frac{1}{6} \frac{N}{L} v dt \cdot (-2mv \hat{e}_x) \text{ pour}$$

une durée dt . Si on fait tendre dt vers 0 on obtient la dérivée de \vec{p}_{tot}

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{N}{L} mv^2 \hat{e}_x$$

Q3. En appliquant la 2^{ème} loi de Newton au système composé des molécules du gaz projeté dans la direction x :

$$\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{F}_{\text{paroi/gaz}}$$

Or d'après le principe des actions réciproques :

$$\vec{F}_{\text{paroi/gaz}} = -\vec{F}_{\text{gaz/paroi}}$$

Et d'après la définition de la pression :

$$P \cdot S \vec{e}_x = \vec{F}_{\text{gaz/pare}}_{\text{gaz/pare}}$$

$$\text{D'où } \frac{d\rho \vec{e}_x}{dt} = - P \cdot S \vec{e}_x = - PL^2 \vec{e}_x$$

$$\text{Soit } -\frac{1}{3} \frac{N}{L} v^2 \vec{e}_x = -PL^2 \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{3} \frac{N}{L^3} m v^2 \quad \text{et} \quad V = L^3$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m v^2$$

QH. Pour un GP monoatomique $U = \frac{3}{2} n RT$

QS. En identifiant les 2 expressions de U :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \frac{3}{2} n RT \\ U = N \cdot \frac{1}{2} m v^2 \end{array} \right. \Rightarrow 3nRT = N \cdot m v^2$$

$$\text{Soit } \frac{1}{3} N m v^2 = n RT \quad \text{d'où} \quad \boxed{PV = nRT}$$

ce qui est la loi des GP.

Exercice 5 :

Pour comprendre le comportement de la pompe, il faut s'intéresser au 1^{er} aller-retour du piston :

- * A l'instant initial :
 - la pression dans le réservoir et dans le cylindre est P_0
 - la valve K_1 est fermée
 - la valve K_2 est ouverte
 - le volume du cylindre est minimal : $V_{cyl} = V_{\min}$
- * Dès que le piston remonte, la pression dans le cylindre devient inférieure à P_0 donc la valve K_2 se ferme et la valve K_1 s'ouvre.
- * Au cours de la remontée du piston, la quantité de matière de gaz dans l'ensemble cylindre + réservoir est constante, égale à $P_0(V + V_{\min})$. lorsque le piston est au plus haut, on a donc : $P_1(V + V_{\max}) = P_0(V + V_{\min})$
Comme $V + V_{\max} > V + V_{\min}$, on a $P_1 < P_0$
- * Au cours de la redescente du piston, la pression dans le cylindre devient supérieure à P_1 , donc la valve K_1 se ferme. le réservoir reste à P_1 .

Dans le cylindre : $P_{cyl} \cdot V_{cyl} = P_1 V_{max}$.

Or on avait $P_1 = P_0 \frac{V + V_{min}}{V + V_{max}}$

$$\Rightarrow P_{cyl} \cdot V_{cyl} = P_0 \frac{V + V_{min}}{V + V_{max}} \cdot V_{max}$$

$$\Rightarrow P_{cyl} = P_0 \frac{V + V_{min}}{V + V_{max}} \frac{V_{max}}{V_{cyl}}$$

$\Rightarrow P_{cyl}$ augmente lorsque au cours de la descente du piston.

$$P_{cyl} \text{ atteint } P_0 \text{ pour } V_{cyl} = V_{max} \frac{V + V_{min}}{V + V_{max}}$$

Remarque : ce volume est supérieur à V_{min}
 $(V_{cyl} - V_{min} > 0)$

A cet instant la valve K_2 s'ouvre et lorsque le piston est revenu à V_{min} la pression dans le cylindre saut P_0 .

* le processus se répète à chaque aller-retour du piston avec une pression dans le réservoir qui diminue à chaque étape.

Q1. A l'instant $n\bar{Z}$:

* la pression dans le cylindre est P_0 et son volume est V_{\min}

$$\text{On a donc } P_0 V_{\min} = n R T_0.$$

le piston commence à remonter (valve K_1 étant fermée), la valve K_2 se ferme dès le début de la remontée car à la moindre dépression K_2 se ferme.

On a donc $P_{\text{cyl}} \cdot V_{\text{cyl}} = n R T_0$ (les 2 valves sont fermées)

K_1 s'ouvre lorsque $P_{\text{cyl}} = P[n]$

$$\text{Soit } V_{\text{cyl}} = \frac{n R T_0}{P[n]}$$

Or V_{cyl} ne peut dépasser V_{\max} . Pour que

K_1 s'ouvre, il faut donc : $\frac{n R T_0}{P[n]} < V_{\max}$

$$\text{Or } n R T_0 = P_0 V_{\min} \Rightarrow \frac{P_0}{P[n]} < \frac{V_{\max}}{V_{\min}}$$

Soit

$$P[n] > P_0 \frac{V_{\min}}{V_{\max}}$$

Q2. A la date $t = n\bar{Z}$ la loi du GP donne :

$$P_0 V_{\min} = x_n R T_0 \text{ dans le cylindre}$$

$$P[n] \cdot V = y_n R T_0 \text{ dans l'enceinte}$$

avec x_n = quantité de matière de gaz dans le cylindre (volume V_{\min})

y_n = quantité de matière de gaz dans l'enceinte (volume V)

le piston remonte sans que K_2 ne s'ouvre car la pression dans le cylindre est inférieure à P_0 .

Or il y a conservation de la matière au cours de la remontée du piston (K_2 étant fermée). On a donc :

$$x_n + y_n = \frac{P_0 V_{\min}}{R T_0} + \frac{P[n] V}{R T_0} = \frac{P[n+1](V + V_{\max})}{R T_0}$$

$$\text{Soit : } (x_n + y_n) R T_0 = P_0 V_{\min} + P[n] \cdot V = P[n+1](V + V_{\max})$$

$$\Rightarrow (P[n+1] - P[n])(V + V_{\max}) + P[n] V_{\max} = P_0 V_{\min}$$

$$\Rightarrow P[n+1] - P[n] + P[n] \frac{V_{\max}}{V + V_{\max}} = \frac{P_0 V_{\min}}{V + V_{\max}}$$

En identifiant, on obtient :

$$a = \frac{V_{\max}}{V + V_{\max}} \quad \text{et} \quad b = \frac{V_{\min}}{V + V_{\max}}$$

$$Q2. \frac{P[n+1] - P[n]}{\bar{t}} + \frac{a}{\bar{t}} P[n] = P_0 \frac{b}{\bar{t}}$$

$$\text{Soit pour } \bar{t} \rightarrow 0 \quad \frac{dP(t)}{dt} + \frac{a}{\bar{t}} P(t) = \frac{b}{\bar{t}} P_0$$

$$Q3. \text{ Solution : } P(t) = \frac{b}{a} P_0 + A e^{-\frac{at}{\bar{t}}}$$

On détermine A avec les conditions initiales : à $t=0$ $P(0) = P_0$
 $\Rightarrow P_0 = \frac{b}{a} P_0 + A \Rightarrow A = P_0 \left(1 - \frac{b}{a}\right)$

$$\text{Soit } P(t) = \frac{V_{min}}{V_{max}} P_0 + P_0 \left(1 - \frac{V_{min}}{V_{max}}\right) e^{-\frac{V_{max} t / \bar{t}}{V + V_{max}}}$$

$$Q4.a) \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{b}{a} P_0 = \frac{V_{min}}{V_{max}} P_0$$

$$\text{AN: } P(\infty) = \frac{1}{10} 10^5 = 10^4 \text{ Pa.}$$

b) On avait montré que $P[n] > \frac{P_0 V_{min}}{V_{max}}$

donc la pression limite est

$$P_{min} = P_0 \frac{V_{min}}{V_{max}}$$

- * La pompe fonctionne tant que la pression dans l'enceinte est assez élevée pour permettre l'ouverture de K .

* La pression finale dans l'enceinte est celle obtenue lorsque, quand le piston est en position haute on a $P(\infty)$.

Soit par conservation de la matière :

$$P_0 V_{min} = P(\infty) V_{max}$$

c) On remplace $P[n]$ et $P[n+1]$ par $P(\infty)$

$$P[\infty] - P[\infty] + P[\infty] \cdot \frac{V_{max}}{V+V_{min}} = \frac{P_0}{V+V_{max}}$$

$$\Leftrightarrow P[\infty] = P_0 \frac{V_{min}}{V_{max}}$$

Q5. D'après la relation obtenue entre $P[n+1]$ et $P[n]$ on a :

$$P[n+1] = P[n] \frac{V}{V+V_{max}} + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}}$$

$$\text{et } P[n] = P[n-1] \frac{V}{V+V_{max}} + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}}$$

$$\text{d'où } P[n+1] = P[n-1] \left(\frac{V}{V+V_{max}} \right)^2 + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}} \left(1 + \frac{V}{V+V_{max}} \right)$$

$$P[n+1] = P[n-2] \left(\frac{V}{V+V_{max}} \right)^3 + P_0 \frac{V_{min}}{V+V_{max}} \left(1 + \frac{V}{V+V_{max}} + \left(\frac{V}{V+V_{max}} \right)^2 \right)$$

$$\Rightarrow P[n+1] = P[0] \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{n+1} + P_0 \frac{V_{\min}}{V+V_{\max}} \sum_0^n \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^i$$

somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de 1er terme $a =$

$$a \frac{(1-q)^{n+1}}{1-q} \Rightarrow \sum_0^n \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^i = \frac{1 - \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{n+1}}{1 - \frac{V}{V+V_{\max}}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{n+1}}{V_{\max}} (V + V_{\max})$$

$$\Rightarrow P[n+1] = P_0 \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{n+1} + P_0 \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \left(1 - \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{n+1} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } P[n] &= P_0 \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^n + P_0 \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \left(1 - \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^n \right) \\ &= P_0 \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^n - P_0 \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^n \cdot \frac{V_{\min}}{V_{\max}} + P_0 \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \\ &= P_0 \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^n \left(1 - \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right) + P_0 \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \end{aligned}$$

$$\text{AN: } f[100] = 10^5 \left(\frac{10^{-2}}{10^{-2} + 10^{-5}} \right)^{100} \left(1 - 0,1 \right) + 10 \cdot 0,1$$

$$P[100] = 9 \cdot 10^4 \left(\frac{10^{-2}}{10^{-2} + 10^{-5}} \right)^{100} + 10^4$$

$$= 9,1439 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$= \underline{0,914 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \quad \text{avec 3 c.s.}$$

Avec l'expression solution de l'équation différentielle on a :

$$P(t) = \frac{V_{\min}}{V_{\max}} P_0 + P_0 \left(1 - \frac{V_{\min}}{V_{\max}}\right) e^{-\frac{V_{\max}}{V+V_{\max}} t/\tau}$$

$$\text{Soit } P(100\tau) = \frac{V_{\min}}{V_{\max}} P_0 + P_0 \left(1 - \frac{V_{\min}}{V_{\max}}\right) e^{-\frac{100 V_{\max}}{V+V_{\max}}}$$

$$\text{AN: } P(100\tau) = 0,1 \cdot 10^5 + 10^5 (0,9) e^{-\frac{100 \cdot 10^{-5}}{10^{-2} + 10^{-5}}} \\ = 9,1443 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$= \underline{0,914 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \quad \text{avec 3 c.s}$$

$$\text{écart relatif: } \frac{(9,1443 - 9,1439)}{9,1443} \times 100 = 4 \cdot 10^{-3}\%$$

\Rightarrow très bonne corrélation entre le modèle continu et le modèle discret.

b) Il faut résoudre l'équation :

$$P_0 \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{100} \left(1 - \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right) + P_0 \frac{V_{\min}}{V_{\max}}$$
$$= \frac{V_{\min}}{V_{\max}} P_0 + P_0 \left(1 - \frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right) e^{-\frac{V_{\max}}{V+V_{\max}} \frac{t_0}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right)^{100} = e^{-\frac{V_{\max}}{V+V_{\max}} \frac{t_0}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 100 \ln \left(\frac{V}{V+V_{\max}} \right) = -\frac{V_{\max}}{V+V_{\max}} \cdot \frac{t_0}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_0}{2} = 100 \ln \left(\frac{V+V_{\max}}{V} \right) \left(1 + \frac{V}{V_{\max}} \right)$$

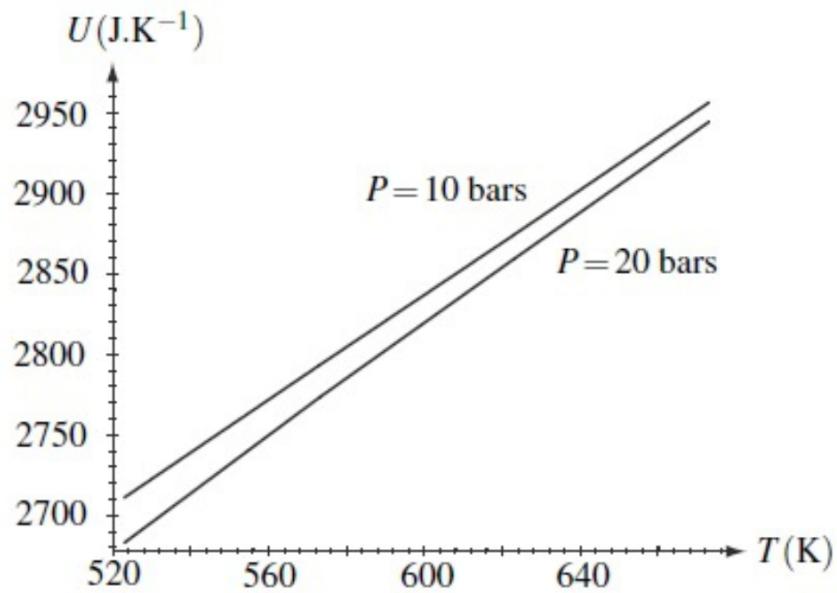
$$\text{AN: } \frac{t_0}{2} = 100 \ln \left(\frac{10^{-2} + 10^{-5}}{10^{-2}} \right) \left(1 + \frac{10^{-2}}{10^{-5}} \right)$$

$$\frac{t_0}{2} = 100,05$$

\Rightarrow cohérent avec ce qui précède.

Exercice 6 :

Q1.



Q2. On obtient 2 droites pour $U = f(T)$ pour ces 2 pressions, cela prouve donc que l'énergie interne de ce gaz dépend de la pression.
 \Rightarrow Ce n'est pas un gaz parfait, il faut tenir compte des interactions.

Q3. Capacité thermique à volume constant

$$C_V = \left. \frac{dU}{dT} \right|_V \Rightarrow \text{pente des droites.}$$

On obtient $C_V = 28 \text{ J.mol}^{-1}$ à $P = 10 \text{ bars}$

$$C_V = 29 \text{ J.mol}^{-1} \text{ à } P = 20 \text{ bars}$$

Pour un GP on a $C_V = \frac{3}{2}R = 12,5 \text{ J.mol}^{-1}$

Ici la pente est donc plus élevée du fait des vibrations et des rotations.