Correction du DM n°1

Q1. On a la relation $\rho(z) = \frac{P_0 M}{R} \times \frac{1}{T(z)}$

avec $[\rho] = M.L^{-3}$

$[P_0] = M.L.T^{-2}.L^{-2} = M.L^{-1}.T^{-2}$

$[M] = M.N^{-1}$

$[T] = \Theta$

On a donc $M.L^{-3} = M.L^{-1}.T^{-2}.M.N^{-1}.\Theta^{-1}[R]^{-1}$

Soit $[R] = \frac{M^2.L^{-1}.T^{-2}.N^{-1}\Theta^{-1}}{M.L^{-3}}$

$$\boxed{[R] = M.L^2.T^{-2}N^{-1}\Theta^{-1}}$$

Q2. Un matériau transparent est dit dispersif lorsque l'indice de propagation de la lumière dans se matériau dépend de la longueur d'onde.
Ici on considère donc que l'indice de l'air est indépendant

de la longueur d'onde.

Q3. Quand l'altitude diminue, la température diminue (l'air au niveau du sol est le plus chaud).

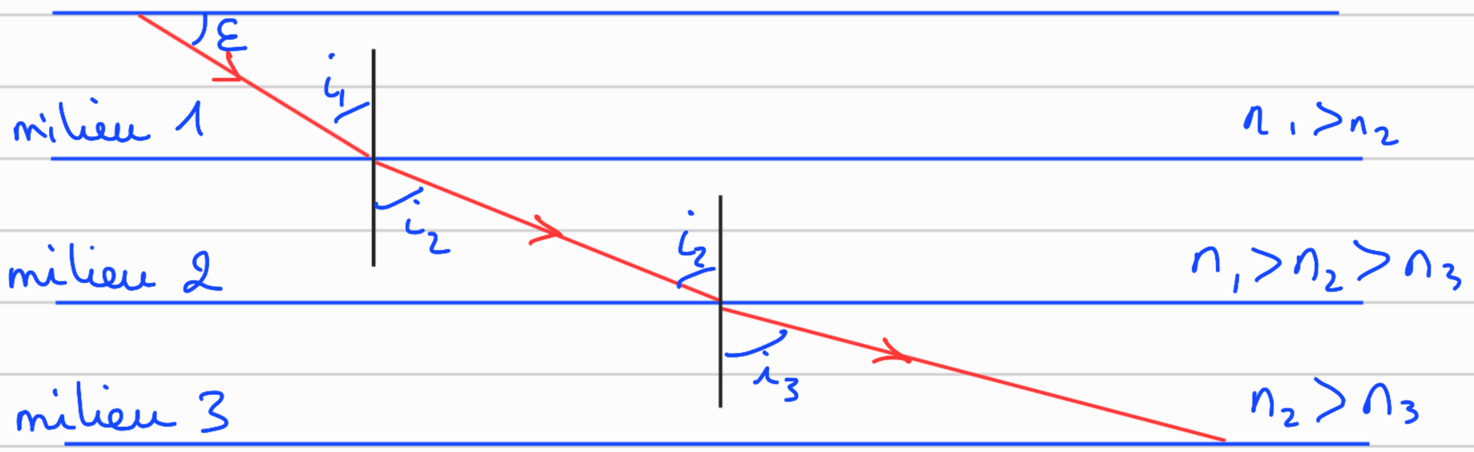
Or $\rho(z) = \frac{P_0 M}{R} \times \frac{1}{T(z)}$

La masse volumique de l'air augmente donc quand z augmente.

Or $n(z) - 1 = k\,\rho(z)$

L'indice $n(z)$ augmente donc avec l'altitude.

Q4.



D'après la loi de Snell-Descartes appliquée à l'interface ①-② on a :

$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ soit $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2}$

Avec $n_1 > n_2$ $\sin i_2 > \sin i_1$

Soit $i_2 > i_1$

De même à l'interface ②-③, on a $i_3 > i_2$

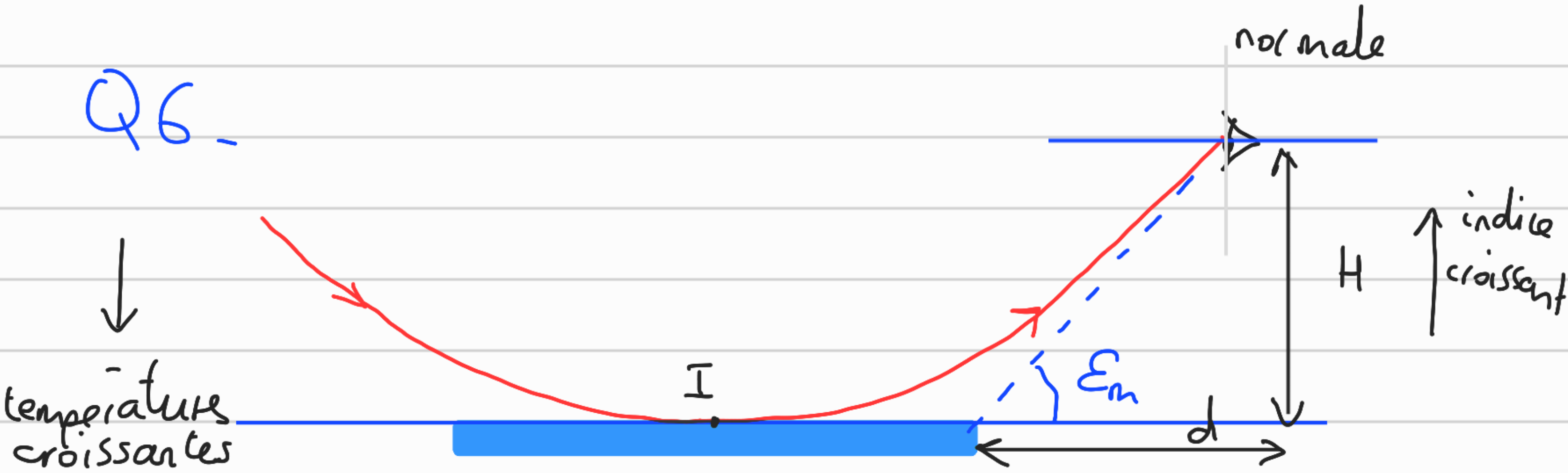
Le rayon lumineux a donc une trajectoire rectiligne par morceaux, ce qui tend à former une courbe dont la concavité est tourné vers le haut.

Q5. A chaque interface, la relation de Snell-Descartes permet d'écrire :
$n_k \sin i_k = n_{k+1} \sin i_{k+1}$

Puis $n_{k+1} \sin i_{k+1} = n_{k+2} \sin i_{k+2}$

Ce qui donne donc $n_k . \sin i_k = \text{constante}$ que l'on peut calculer connaissant l'indice et l'angle pour une couche k.

Q6.



Le rayon d'inclinaison maximale ε_m qui arrive dans l'oeil de l'observateur correspond à un rayon qui a frôlé le sol au point I.
En I l'expression $n_k \sin i_k$ vaut $n_0 \cdot \sin \frac{\pi}{2}$

et en A, elle vaut $n_H \sin \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_m\right)}_{\text{angle d'incidence en A}}$

D'après le résultat de la question Q5, on a donc $n_0 \sin \frac{\pi}{2} = n_H \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_m\right)$

Soit $\boxed{n_0 = n_H \cos \varepsilon_m}$

Q7. Pour $H \ll d$ on a $\tan \varepsilon_m \ll 1$

donc $n_0 \simeq n_H \left(1 - \frac{\varepsilon_m^2}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_m \simeq \sqrt{2\left(1 - \frac{n_0}{n_H}\right)}}$

Q8. $n(z) = 1 + k \cdot \frac{P_0 M}{R} \cdot \frac{1}{T(z)}$

$$\frac{dn(z)}{dz} = \frac{k P_0 M}{R} \frac{dT(z)}{dz} \times \left(- \frac{1}{T^2(z)}\right)$$

Pour $z=0$ $\left(\frac{dT(z)}{dz}\right)_{z=0} = \frac{\Delta T}{\Delta H} = \frac{T_1 - T_0}{z_1 - z_0}$

avec T_1 et z_1 les valeurs de T et z pour $z = 1m$.

$$\left(\frac{dn}{dz}\right)_{z=0} = \frac{kP_0M}{RT_0} \cdot \frac{T_1 - T_0}{z_1 - z_0} \cdot \left(-\frac{1}{T_0}\right)$$

Or $n_0 = 1 + k\frac{P_0M}{RT_0}$ donc on peut remplacer dans l'expression précédente, pour obtenir :

$$\left(\frac{dn}{dz}\right)_{z=0} = (n_0 - 1)\frac{T_1 - T_0}{z_1 - z_0}\left(-\frac{1}{T_0}\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{dn}{dz}\right)_{z=0} = \frac{1 - n_0}{z_1 - z_0} \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_0}}$$

AN : $\left(\frac{dn}{dz}\right)_{z=0} = \frac{1 - 1{,}00029}{1 - 0} \cdot \frac{290 - 300}{300}$

Soit $\left(\frac{dn}{dz}\right)_{z=0} = 9,7.10^{-6}\ m^{-1}$.

Q9. En faisant un développement limité au voisinage de $z=0$ on obtient :

$$n_1 = n_0 + (z_1 - z_0)\left(\frac{dn}{dz}\right)_{z=0}$$

(avec $n_1 = n(z=1m)$)

AN : $n_1 = 1,00029 + (1-0)\,9,7.10^{-9}$

$$n_1 = 1,0002997$$

Au delà de $z = 1m$, la température est constante donc la masse volumique et l'indice de réfraction sont constants.

On a donc $\boxed{n_H = n_1}$

et $\underline{n_H = 1,0002997}$

Q10. En reprenant le résultat de la question Q7 on détermine ε_m :

$$\varepsilon_m \approx \sqrt{2\left(1 - \frac{n_0}{n_H}\right)}$$

AN : $\varepsilon_m \simeq \sqrt{2\left(1 - \dfrac{1{,}00029}{1{,}0002997}\right)}$

$\underline{\varepsilon_m \simeq 4{,}4039 \cdot 10^{-3} \text{ rad}}$

Q 11. On a la relation $\tan \varepsilon_m = \dfrac{H}{d}$

Or ε_m est faible donc $\tan \varepsilon_m \simeq \varepsilon_m$

et $\dfrac{H}{d} \simeq \varepsilon_m$ soit $\boxed{d \simeq \dfrac{H}{\varepsilon_m}}$

AN : $d \simeq \dfrac{1{,}80}{4{,}4039 \cdot 10^{-3}}$

$\underline{d \simeq 409 \text{ m}}$

L'observateur voit donc une tache bleutée dont le bord le plus proche semble être à la distance $d \simeq 409$ m.

Q12. Le fait que la tache semble "danser" sur le goudron provient du fait que l'indice de réfraction fluctue dans le temps.

Q13. Un rayon lumineux issu du sol sera dévié vers le bas si l'indice optique diminue avec l'altitude. Pour avoir de telles conditions, il faut que la température augmente lorsqu'on s'élève en altitude, en supposant que la pression reste constante.

De telles conditions climatiques se produisent par exemple en été, lorsque l'air au contact de la mer est refroidi à une température plus faible que celle des couches d'air situées au dessus.

Une île située derrière l'horizon peut alors devenir visible, elle apparaît à l'œil d'un navigateur comme une image floue et tremblotante.

Q14.