DM n°3.

Q1. On étudie le système {masse m} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen à l'échelle de l'expérience.

Bilan des actions mécaniques :

* poids $\vec{P} = m\vec{g}$

* réaction du support $\vec{R_N}$ ($\perp$ au support car absence de frottements).

* force de rappel élastique exercée par le ressort 1 : $\vec{F_{1el}} = -k_1(\ell_1 - \ell_{01})\vec{u_x}$
  or $\ell_1(t) = x(t)$

$$\Rightarrow \vec{F_{1el}} = -k_1(x - \ell_{01})\vec{u_x}$$

* force de rappel élastique exercée par le ressort 2 : $\vec{F_{2el}} = -k_2(\ell_2 - \ell_{02})(-\vec{u_x})$

  or $\ell_2(t) = L - x(t)$

$$\Rightarrow \vec{F_{2el}} = k_2(L - \ell_{02} - x)\vec{u_x}$$

Q2. A l'équilibre $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$.

$$m\vec{g} + \vec{R_N} - k_1(x_{eq} - \ell_{01})\vec{u_x} + k_2(L - \ell_{02} - x_{eq})\vec{u_x} = \vec{0}$$

En projection sur Ox :

$$-k_1(x_{eq}-\ell_{01})+k_2(L-\ell_{02}-x_{eq})=0$$

$$x_{eq}(k_1+k_2)=k_1\ell_{01}+k_2(L-\ell_{02})$$

$$\boxed{x_{eq}=\frac{k_1\ell_{01}+k_2(L-\ell_{02})}{k_1+k_2}}$$

Q3. On applique le PFD au système {masse} dans R_t galiléen :

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{R_N}-k_1(x-\ell_{01})\vec{u_x}+k_2(L-\ell_{02}-x)\vec{u_x}$$

En projection sur Ox :

$$m\ddot{x}=-k_1(x-\ell_{01})+k_2(L-\ell_{02}-x)$$

$$m\ddot{x}+(k_1+k_2)x=k_1\ell_{01}+k_2(L-\ell_{02})$$

$$\ddot{x}+\frac{k_1+k_2}{m}x=\frac{k_1\ell_{01}+k_2(L-\ell_{02})}{m}$$

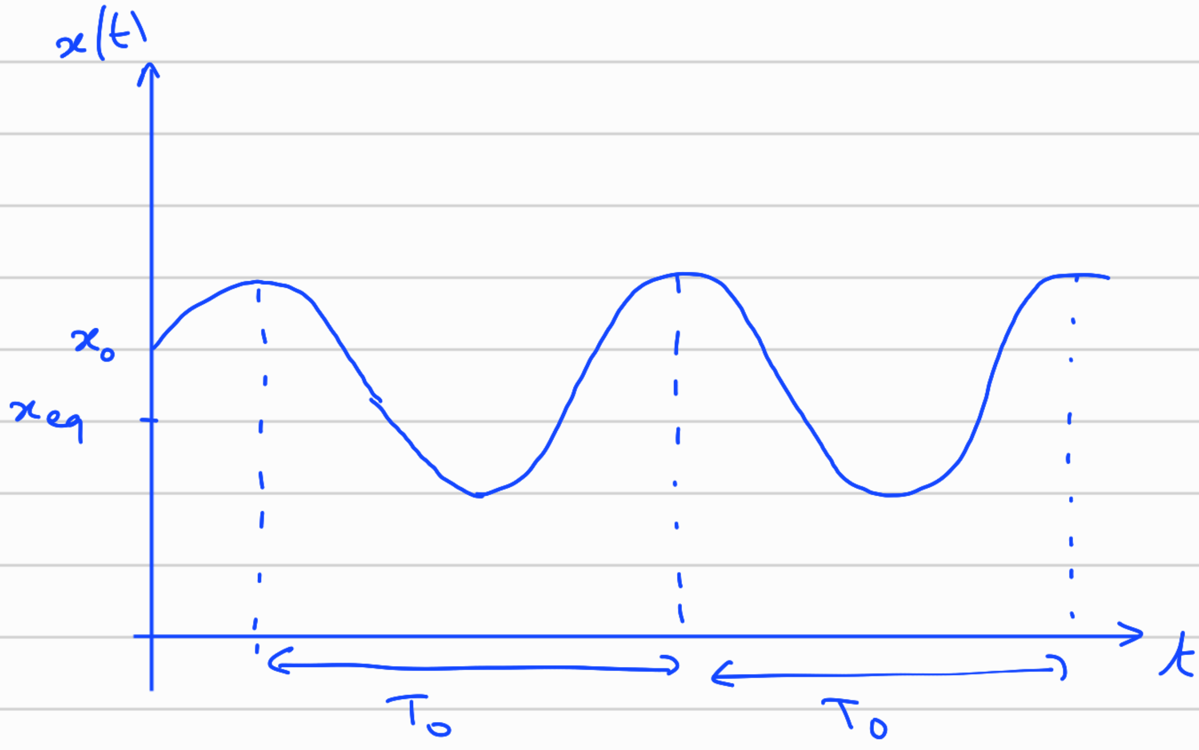
$$\ddot{x}+\underbrace{\frac{k_1+k_2}{m}}_{\omega_0^2}x=\underbrace{\frac{k_1\ell_{01}+k_2(L-\ell_{02})}{k_1+k_2}}_{x_{eq}}\cdot\underbrace{\frac{k_1+k_2}{m}}_{\omega_0^2}$$

On a donc $\ddot{x}+\omega_0^2x=\omega_0^2x_{eq}$

avec $\omega_0=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$

Q4. La masse va osciller à la période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ autour de sa position d'équilibre.

Si $x(0) = x_0$ et $v(0) > 0$ alors on aura :



Q5. La solution est de la forme :

$$x(t) = x_{eq} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

On utilise les conditions initiales pour déterminer les constantes A et B :

$$x(0) = x_0 \Rightarrow x_0 = x_{eq} + A \Rightarrow A = x_0 - x_{eq}$$

$$v(t) = x'(t) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

avec $v(0) = v_0 \Rightarrow v_0 = B\omega_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$

$$\boxed{x(t) = x_{eq} + (x_0 - x_{eq})\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

Q6. Lorsque la chaise est vide $m = m_0$

et $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_1+k_2}}$

$$\Rightarrow \frac{T_0^2}{4\pi^2} = \frac{m_0}{k_1+k_2} \Rightarrow \boxed{m_0 = \frac{T_0^2(k_1+k_2)}{4\pi^2}}$$

AN : $m_0 = \dfrac{1{,}28^2(300+300)}{4\pi^2} = \underline{24{,}9\ \text{kg}}$.

Q7. Lorsque l'astronaute est sur la chaise $m = m_0 + m_1$

$$T_0' = \frac{2\pi}{\omega_0'} = 2\pi\sqrt{\frac{m_0+m_1}{k_1+k_2}}$$

$$\frac{T_0'^2}{4\pi^2} = \frac{m_0+m_1}{k_1+k_2} \Rightarrow m_1 = \frac{T_0'^2(k_1+k_2)}{4\pi^2} - m_0$$

$$\boxed{m_1 = \frac{(T_0'^2 - T_0^2)(k_1+k_2)}{4\pi^2}}$$

AN : $m_1 = \underline{57{,}6\ \text{kg}}$