Devoir maison n° 4

Exercice 1 : Le traîneau du père Noël

Le traîneau du père Noël, de masse totale $m = 5{,}0 \times 10^2$ kg (le père Noël est compris dans cette masse) et de centre de masse M, glisse sur la surface de la glace avec un coefficient de frottement solide $f = 5{,}0 \times 10^{-2}$ Lorsque le traîneau est en mouvement, $R_T = f \times R_N$, tandis qu'à l'arrêt, $R_T < f \times R_N$ (où R_T désigne la norme de la composante tangentielle de la réaction du support et R_N la norme de sa composante normale).
Les rennes sont reliés au traîneau par des éléments de corde tendus, de masse négligeable et inextensibles. On note $\overrightarrow{F}$ la force de traction exercée par les rennes, supposée de norme F constante, et de direction colinéaire à l'ensemble des cordes. Une force de frottement fluide $-\beta\overrightarrow{v}$ ($\beta > 0$) modélise l'action de l'air sur l'ensemble de l'attelage. On note $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ l'accélération de la pesanteur.

Partie I. Trajectoire rectiligne

Q1. Dans un premier temps, le trajet est rectiligne horizontal. Déterminer l'expression $F_{\min}$ de la valeur minimale de F permettant le démarrage du traîneau. Faire l'application numérique.

Q2. Le trajet est maintenant rectiligne en pente ascendante caractérisée par l'angle α avec l'horizontale. Montrer alors que tout se passe comme dans le mouvement horizontal précédent, sous réserve de remplacer le coefficient f par un coefficient f', que l'on exprimera.

Dans toutes les questions suivantes, on revient au cas horizontal.

Q3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la norme de la vitesse v. On introduira un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression.

Q4. Résoudre cette équation et exprimer la loi $v(t)$, en considérant que le traîneau commence à avancer à la date $t = 0$ à partir d'une vitesse initialement nulle. Montrer que la vitesse tend vers une vitesse limite v_ℓ dont on donnera l'expression en fonction des constantes du problème.

Q5. Cette vitesse limite est évaluée à $v_\ell = 3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Elle est atteinte à 5% près par le traîneau en une durée $t_1 = 5{,}0\,\mathrm{s}$. En déduire la valeur de β, puis celle de la force F.

Partie II. Mouvement circulaire uniforme

Le traîneau aborde une courbe à plat qu'on assimilera à un cercle horizontal de centre O et de rayon R (figure 6). Les rennes (modélisés ici en un seul point B) doivent donc tirer vers l'intérieur du cercle, la corde faisant un angle φ avec la vitesse du centre de masse du traîneau.
On suppose le mouvement circulaire uniforme, la norme de la vitesse vaut v_0 et on admettra que la composante tangentielle de la réaction du support est opposée à la vitesse.

Q6. Exprimer en fonction de v_0 et R l'accélération dans la base cylindrique dans cette situation.

Q7. Représenter sur un schéma les forces extérieures subies par le traîneau, puis en déduire trois relations scalaires par projection de la seconde loi de Newton dans la base cylindrique (on fera apparaître les vecteurs unitaires de cette base sur le schéma).

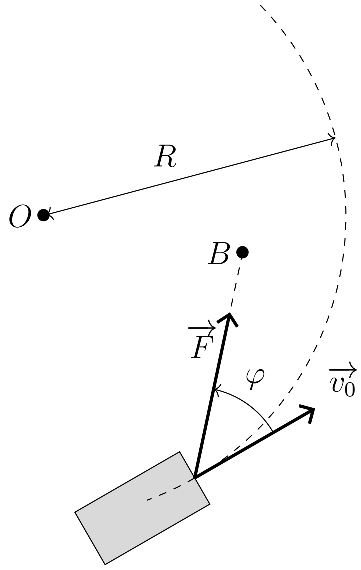

FIGURE 6 – Trajectoire circulaire du traîneau

Q8. En déduire l'expression de $\tan\varphi$ et montrer que la norme F de la traction, en fonction de la vitesse v_0 et des paramètres physiques du problème $(f, g, \beta, m$ et $R)$ se met sous la forme :

$$F = \sqrt{m^2 \frac{v_0^4}{R^2} + (fmg + \beta v_0)^2}$$

Q9. Le graphe ci-dessous représente les variations de F en fonction de v_0 calculées à la question Q8., pour différentes valeurs du rayon de courbure.

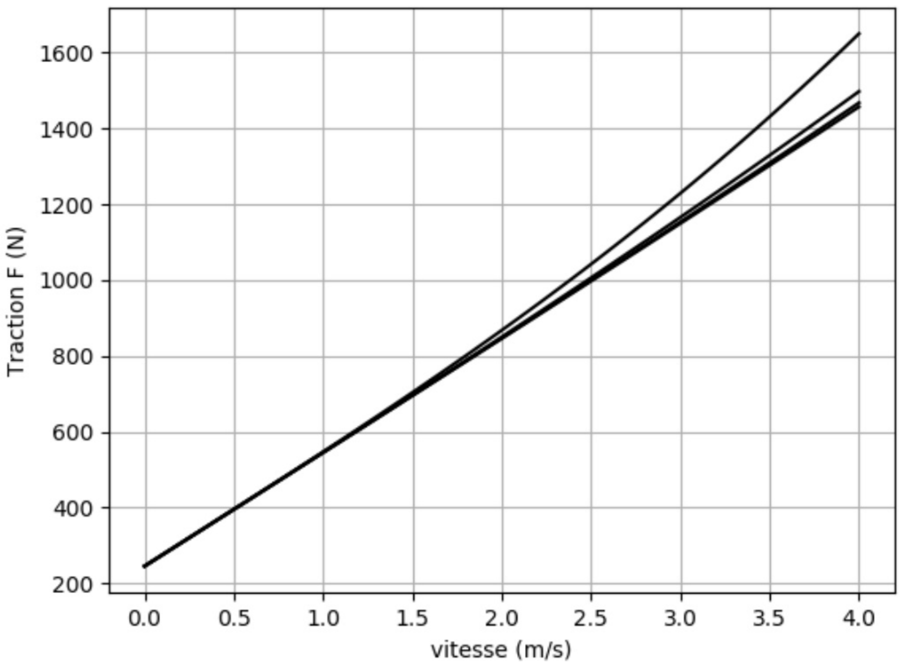

FIGURE 7 – Force de traction en fonction de la vitesse v_0, pour différentes valeur de rayons de courbure : $R = 10\,\mathrm{m}$, $20\,\mathrm{m}$, $30\,\mathrm{m}$ et $40\,\mathrm{m}$.

(a) Expliquer comment s'ordonnent les 4 courbes.

(b) L'effet de la courbure de la trajectoire est-il perceptible pour un rayon de courbure de $30\,\mathrm{m}$? Justifier.

(c) On se place sur la courbe $R = 10\,\mathrm{m}$. À quelle vitesse v_0 les rennes peuvent-ils entraîner le traîneau s'ils engendrent une traction d'environ $1100\,\mathrm{N}$? Commenter.

(d) Que vaut alors l'angle φ en degrés ?

Exercice 2 : L'évolution du concept d'atome au cours du XXe siècle

Ce problème aborde certaines étapes de l'histoire des sciences qui ont permis, au cours du XX^{e}e siècle, de préciser la structure et les propriétés de l'atome. Dans la partie 1, on s'intéressera à l'expérience de E. Rutherford, qui conduisit à abandonner le modèle de J. J. Thomson au profit de celui de J. Perrin. Les limites de ce modèle feront l'objet de la partie II, limites qui seront partiellement levées dans la partie III avec les postulats de N. Bohr.
C'est finalement la mécanique quantique qui apporte à ce jour la description la plus complète de l'atome, selon laquelle le mouvement de l'électron d'un atome d'hydrogène est obtenue à partir de l'équation de E. Schrödinger.

Les effets liés à la gravité seront négligés dans l'ensemble du problème.

Données numériques

— Constante de Planck $h = 6{,}6 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$
— Charge électrique élémentaire $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
— Masse de l'électron $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
— Électronvolt $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$
— Permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}\,\mathrm{A^2 \cdot s^4 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}}$
— Célérité de la lumière dans le vide $c = 3{,}0 \times 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Partie I. Limite du modèle de J. J. Thomson à travers l'expérience de E. Rutherford

En 1898, J. J. Thomson fait l'hypothèse que les atomes sont constitués d'électrons emprisonnés dans une sorte de gelée de charges positives. Ce modèle est appelé modèle du "plum pudding", car J. J. Thomson compare les électrons aux raisins du célèbre dessert anglais. Le physicien Jean Perrin imagine, quant à lui, l'atome à l'image du système solaire. Il suppose que les électrons gravitent, à des distances immenses, autour d'un « soleil » d'électricité positive, sur des orbites pour lesquelles force coulombienne et force d'inertie s'équilibrent.

En 1909, Ernest Rutherford, procède à une série d'expériences dans lesquelles un faisceau de particules alpha (noyaux d'hélium 4 : ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$), ayant toutes la même énergie cinétique, est lancé contre une mince feuille d'or. Il observe que la majorité des particules alpha traversent la feuille d'or, mais qu'une faible proportion d'entre elles « rebondit » sur celle-ci. Le but de cette partie est de déterminer quel modèle est en accord avec cette observation expérimentale.

Nous nous plaçons d'abord dans le cadre du modèle de J. J. Thomson, supposant une répartition uniforme de la charge positive dans la feuille d'or.

Q1. Expliquer qualitativement pourquoi le modèle proposé par J. J. Thomson est incompatible avec les observations de E. Rutherford.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre du modèle de J. Perrin, supposant l'existence d'un noyau massif de charge positive, et on étudie le mouvement de la particule alpha lors de son passage à proximité de ce noyau.

Le noyau d'or, de charge positive ponctuelle $Z\,e$, supposé ponctuel et immobile dans le référentiel galiléen du laboratoire, se situe au point O, origine d'un repère cartésien orthonormé $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

Nous considérons qu'à l'instant initial $t = 0\,\mathrm{s}$, la particule alpha, de masse m_α et de charge électrique $q_\alpha = +2\,e$, vient de « l'infini » avec un mouvement rectiligne uniforme caractérisé par un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{v}(t=0) = v_0 \cdot \overrightarrow{e_x}$.

On désigne par b la distance du point O à la trajectoire de la particule à l'infini (figure 1). À chaque instant t, on note $d(t)$ la distance entre la particule alpha et le point O. La particule alpha est donc repérée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t) = d(t)\,\overrightarrow{e_r}$, avec $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ une base cylindrique locale directe.

Au plus proche du point O, la particule alpha est au point S, la distance minimale en ce point est notée d_m. Au sommet S de la trajectoire, le vecteur vitesse $\vec{v_s}$, de norme v_s, de la particule alpha est perpendiculaire au rayon vecteur $\overrightarrow{OS}$, de norme d_m. La particule alpha est non relativiste. L'expérience a été réalisée sous très faible pression.

On admet qu'au cours du mouvement mouvement, on a $d^2\,\dot{\theta} = \text{constante} = -v_0\,b$.

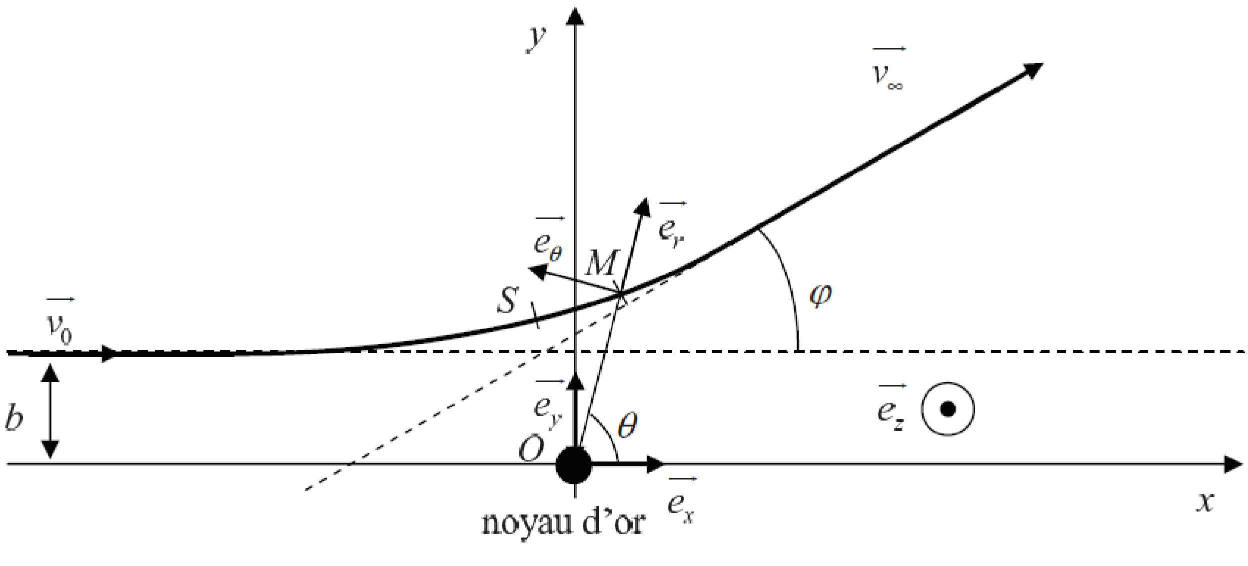

FIGURE 1 – Expérience de Ernest Rutherford

Q2. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur la particule alpha en fonction de e, Z, d, ε_0 et $\overrightarrow{e_r}$. Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p qui y est associée, et telle que $\lim_{d\to+\infty} E_p(d) = 0$, en fonction de e, Z, d et ε_0.Réécrire ces deux expressions en fonction de $K = \dfrac{Z \cdot e^2}{2\pi\varepsilon_0}$ et d. Quel adjectif qualifie le mouvement de la particule alpha ?

Q3. Déterminer, en fonction de m_α et v_0, l'énergie mécanique E_M de la particule alpha.

Q4. Déterminer un polynôme du second degré en d_m et en déduire l'expression de d_m en fonction de K, b, m_α et v_0.

Q5. Malheureusement, b est inaccessible à la mesure. Par contre, l'angle de déviation φ est facilement mesurable. Il faut donc trouver la relation qui lie φ à b. Pour cela :
   (a) Réécrire le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) en fonction de K, d, m_α, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{e_r}$.
   (b) Projeter le P.F.D. sur l'axe des x en introduisant la composante v_x de la vitesse selon l'axe des x, et l'angle θ (figure 1).

(c) Réécrire cette équation en fonction uniquement de v_x, θ, $\dot{\theta}$, K, b, m_α et v_0.

(d) Intégrer cette équation entre $t = 0$ et $t \to \infty$. On remarquera que $\lim_{t\to+\infty} \theta(t) \approx \varphi$.

(e) En déduire que la relation qui lie φ à b est : $\tan\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{K}{b\, m_\alpha\, v_0^2}$.

On rappelle que : $\cos\varphi - 1 = -2\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$ et $\sin\varphi = 2\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

Q6. À partir de quelle valeur de φ les particules alpha rebondissent-elles sur la feuille d'or ? Expliquer pourquoi le modèle de J. Perrin permet d'interpréter les observations de E. Rutherford.

Q7. Nous nous proposons maintenant d'évaluer une borne supérieure à la dimension de ce noyau.

(a) Montrer que la relation qui lie d_m à φ, est : $d_m = \dfrac{K}{m_\alpha v_0^2}\left(1 + \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}\right)$.

(b) Pour quelle valeur φ_m de l'angle φ, la distance d'approche est-elle minimale ? Déterminer, dans ce cas, l'expression de d_m en fonction de K, m_α et v_0.

(c) Que vaut b pour $\varphi = \varphi_m$? Représenter l'allure de la trajectoire de la particule alpha pour cet angle et faire figurer d_m sur votre schéma. Justifier que d_m constitue une borne supérieure du rayon du noyau.

(d) Sachant que l'énergie typique d'une particule alpha est de 5 MeV et que le numéro atomique de l'or est $Z = 79$, déterminer numériquement la valeur de d_m.

Q8. Justifier que, pour effectuer des expériences de physique nucléaire, il faut disposer de particules de haute énergie.

Partie II. Limite du modèle planétaire

Le modèle de J. J. Thomson est écarté et l'on considère que les électrons évoluent, avec un mouvement circulaire uniforme, autour d'un noyau massif de charge électrique positive. Néanmoins, ce modèle est en contradiction avec une loi classique de l'électromagnétisme : toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique.

Pour mettre en évidence les conséquences de cette loi classique de l'électromagnétisme, nous allons étudier le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène, de masse m_e et de charge électrique $q_e = -e$, qui tourne autour de son noyau, un proton de masse m_p et de charge électrique $q_p = +e$, sur une orbite circulaire de rayon r (figure 2). Le noyau est considéré, dans le référentiel galiléen du laboratoire, fixe, ponctuel et placé en son centre C. Le centre de la trajectoire circulaire de l'électron est donc C.

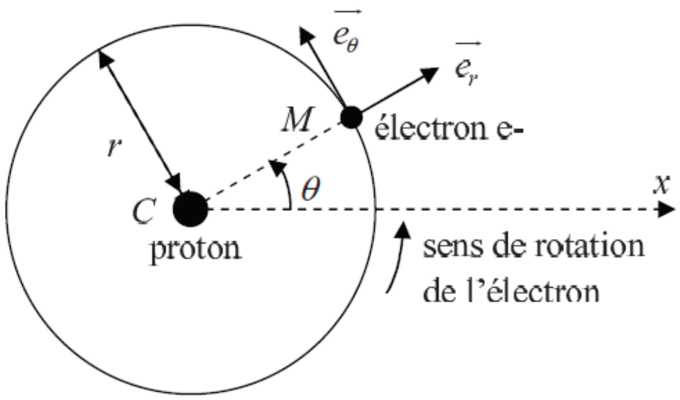

FIGURE 2 – Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène

Pour étudier le mouvement circulaire de l'électron, nous allons utiliser le repère polaire pour lequel, en un point M de la trajectoire décrite par l'électron, on associe deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ (figure 2). $\overrightarrow{e_\theta}$ est le vecteur tangent à la trajectoire au point M et dirigé dans le sens du mouvement. La position de l'électron est repérée par le vecteur position : $\overrightarrow{CM} = r \cdot \overrightarrow{e_r}$ et l'angle $\theta = (\overrightarrow{Cx}, \overrightarrow{CM})$.

Q9. Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ de l'électron en fonction de e, m_e, ε_0, r et d'un vecteur unitaire.

Q10. Exprimer l'énergie mécanique $E_M(r)$ de l'électron sous la forme $E_M(r) = Af(r)$ où A est une constante négative dont on précisera l'expression en fonction de e, ε_0 et $f(r)$ une fonction qui ne dépend que de r que l'on explicitera également.

Une loi classique de l'électromagnétisme indique que toute particule chargée et accélérée émet de l'énergie électromagnétique. Aussi, d'après cette théorie, l'électron devrait émettre un rayonnement électromagnétique de puissance moyenne :

$$P(r) = \frac{\omega^4\, e^2\, r^2}{12\, \pi\, \varepsilon_0\, c^3}$$

où ω est la vitesse angulaire de l'électron et c la vitesse de la lumière dans le vide.

Cette puissance peut être mise sous la forme $P(r) = P_0 \dfrac{1}{r^4}$, où P_0 est une constante.

Q11. Déterminer l'expression de P_0 et son unité.

Q12. Justifier que le rayon de la trajectoire de l'électron diminue au cours du temps.

Q13. Montrer qu'il existe une relation différentielle de la forme : $r^2 \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{P_0}{A}$.

Q14. À $t = 0$, on suppose que l'électron se trouve sur une orbite de rayon R. Donner l'expression, en fonction de P_0, R et A, du temps t_f mis par l'électron pour atteindre le noyau.

Q15. On donne $R = 1{,}0 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$, calculer t_f. Commenter le résultat obtenu.

Partie III. Postulats de N. Bohr

Les contradictions théoriques précédentes vont être « levées » par Niels Bohr. En 1913, ce dernier postule, d'une part, l'existence d'orbites circulaires sur lesquelles l'électron ne rayonne pas (postulat mécanique) et, d'autre part, que le mouvement d'un électron d'une orbite à l'autre se traduit par l'émission ou l'absorption d'énergie électromagnétique (postulat optique).

Le postulat mécanique traduit la quantification de la norme d'une constante du mouvement de l'électron par rapport au centre de l'atome appelée moment cinétique L :

$$L = m\, r\, v = n \cdot \hbar = n \frac{h}{2\pi}$$

où n est le nombre quantique principal, $n \in \mathbb{N}^*$ et h la constante de Planck.
On considèrera qu'un électron sur une orbite de rayon r possède une vitesse $v = \dfrac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e r}}$ et une énergie mécanique $E_M = -\dfrac{e^2}{8 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r}$.

Q16. Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron ne peut se trouver que sur certaines orbites de rayon $r_n = r_0 \cdot n^2$. Préciser l'expression de r_0 en fonction de ε_0, h, m_e et e. Calculer la valeur de r_0.

On admettra que l'électron est associé à une onde de matière, de longueur d'onde donnée par la relation de De Brooglie : $\lambda = \frac{h}{p}$ (avec p = quantité de mouvement).

Q17. En traduisant le fait que l'onde de matière associée à l'électron doit interférer constructivement avec elle-même après un tour sur son orbite (soit $n\,\lambda = \mathcal{P}$, périmètre de l'orbite), montrer qu'on retrouve le postulat mécanique de N. Bohr.

Q18. Montrer que le postulat mécanique implique que l'électron qui se trouve sur une orbite de rayon r_n possède une énergie mécanique $E_M = -\dfrac{E_0}{n^2}$.
Préciser 1'expression de E_0 en fonction de ε_0, h, m_e et e. Calculer, en électronvolt, la valeur de E_0. Que représente physiquement E_0 ?

Lorsqu'un électron va d'une orbite externe vers une orbite interne, on parle de réarrangement du cortège électronique ou de désexcitation et cela se traduit par l'émission d'un photon.

Q19. Montrer que la longueur d'onde du photon émis est liée aux nombres quantiques n_i et n_f des orbites de départ et d'arrivée de l'électron par l'expression de Rydberg - Ritz :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left[\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right] \quad \text{avec } n_i > n_f.\ R_H \text{ est la constante de Rydberg.}$$

Préciser l'expression de R_H en fonction de E_0, h et c. Indiquer sa valeur et son unité.

Q20. Les raies de la série de Lyman sont celles pour lesquelles l'électron est revenu à la couche K ($n_f = 1$). Dans ce cas, la mesure des trois premières raies donne les longueurs d'onde suivantes : $\lambda_1 = 121{,}5\,\mathrm{nm}$; $\lambda_2 = 102{,}5\,\mathrm{nm}$; $\lambda_3 = 97{,}2\,\mathrm{nm}$.
À quelle partie du spectre électromagnétique ces longueurs d'onde correspondent-elles ? Calculer, à partir de ces valeurs expérimentales, la constante de Rydberg. Conclure.