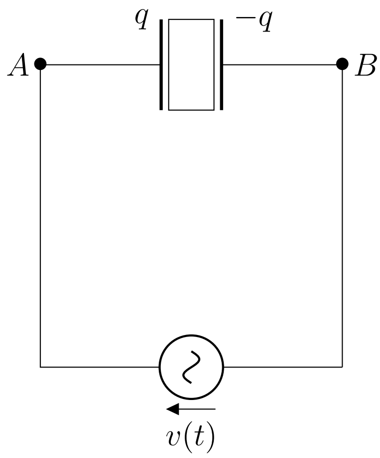
Devoir maison n° 5

Modélisation électro-mécanique d'un résonateur à quartz

Le quartz est une forme particulière de cristal de silice. Il présente des propriétés physiques très intéressantes : la piézo-électricité. Quand on comprime un morceau de quartz dans une direction particulière, une tension apparaît aux bornes du cristal (c'est l'effet piézo-électrique). Réciproquement, quand on applique une tension aux bornes d'un quartz, ce dernier se déforme proportionnellement à la tension appliquée (c'est l'effet piézo-électrique inverse). Ainsi, le quartz est très intéressant pour l'électronique car on parvient à réaliser des circuits oscillants, à base de résonateur à quartz, très stables dans le temps. Actuellement, le quartz est remplacé par certaines céramiques piézo-électriques.

Un cristal de quartz est taillé sous forme de pastille cylindrique mince. La base circulaire présente un diamètre $d = 1\,\mathrm{cm}$ et l'épaisseur de la pastille est $e = 0{,}2\,\mathrm{mm}$. Des électrodes métalliques (en or généralement) sont déposées sur chacune des faces circulaires du quartz (on suppose que ces faces sont totalement métallisées, voir figure ci-contre). On parle d'électrodes de connexion. On a ainsi réalisé un condensateur plan. Aucune connaissance en mécanique n'est nécessaire pour ce problème et les équations mécaniques sont fournies.



D'un point de vue électrique, la charge totale q apparaissant sur les électrodes planes a deux origines :

— les deux faces planes du disque forment un condensateur de capacité C_P , d'où une charge $q_1(t)$;

— lors d'une élongation $x(t)$ du cristal (ou une contraction, x étant algébrique), l'effet piézo-électrique provoque l'apparition d'une charge q_2 proportionnelle à x : $q_2(t) = \gamma x(t)$.

Q1. On rappelle que la capacité d'un condensateur plan vaut $C_P = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e}$ où S est l'aire d'une électrode, e l'épaisseur du condensateur, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$ la permittivité du vide, et $\varepsilon_r = 2{,}3$ la permittivité relative du quartz.
Estimer alors la capacité C_P appelée capacité de connexion.
Quelle est la relation entre la charge q_1, la capacité C_P et la tension $v(t)$?

D'un point de vue mécanique, lorsque l'on soumet le disque piézo-électrique à une tension sinusoïdale $v(t) = V\cos(\omega t)$, il va être, dans le cadre d'une approximation linéaire, le siège d'une vibration mécanique sinusoïdale sous l'effet d'une force extérieure proportionnelle à cette tension. On modélise ce comportement par un système de masse effective m évoluant selon un axe Ox, s'écartant de sa position d'équilibre d'une distance x algébrique (l'allongement du cristal) et subissant plusieurs forces :

— la force due à l'effet piézo-électrique $\beta v(t)$;

— une force de rappel type élastique $-kx(t)$ $\quad (k > 0)$ qui a pour origine la rigidité du matériau ;

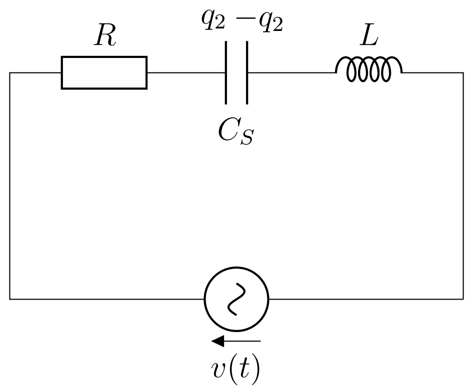
— des frottements supposés proportionnels à la vitesse et de la forme $-h\dot{x}(t)$ $\quad (h > 0)$.

En comparaison avec ces forces le poids est supposé négligeable. L'application du principe fondamental de la dynamique à ce système conduit alors à l'équation différentielle suivante :

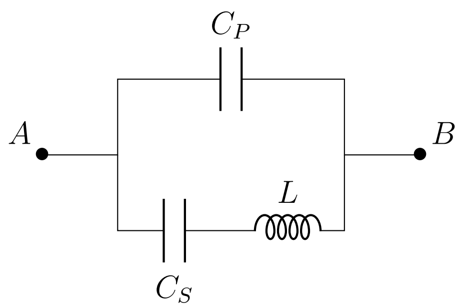
$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = \beta v$$

Q2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la charge q_2.

Q3. Puis montrer par analogie que l'on peut considérer q_2 comme la charge d'un condensateur de capacité C_S inséré dans un circuit type RLC série représenté ci-dessous.
Comment s'exprimeraient alors les grandeurs équivalentes R, L et C_S en fonction des paramètres m, h, k, et γ ?



Q4. Impédance équivalente du quartz :
Dans cette question, on néglige la résistance R du quartz. Le schéma électrique simplifié est alors représenté ci-dessous.



Pour les applications numériques, on prendra $L = 500\,\text{mH}$, $C_S = 0{,}0800\,\text{pF}$ et $C_P = 8{,}00\,\text{pF}$.
On se placera toujours en Régime Sinusoïdal Forcé (RSF) de pulsation ω.

(a) Calculer alors l'impédance complexe du quartz, vue entre les bornes A et B. On l'écrira sous la forme :

$$\underline{Z_{AB}} = \left(\frac{-j}{\alpha\omega}\right)\frac{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_a^2}}$$

où j est le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$, et on donnera les expressions de α, ω_a et ω_r en fonction de L, C_P et C_S.

(b) Donner les valeurs numériques des fréquences f_a et f_r respectivement aux pulsations ω_a et ω_r.

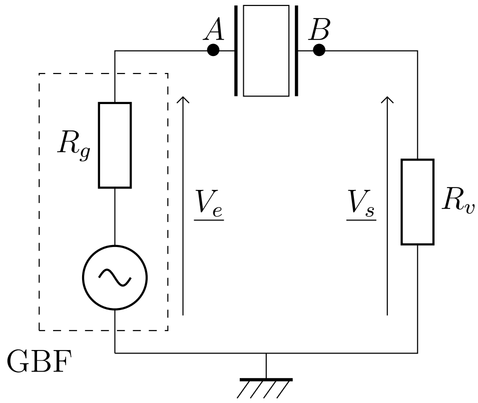
(c) Étudier le comportement inductif ou capacitif du quartz en fonction de la fréquence.

(d) Tracer à la calculatrice l'allure de $|\underline{Z_{AB}}|$, module de l'impédance complexe du quartz, en fonction de la fréquence, et la reproduire qualitativement sur la copie.

Q5. Étude expérimentale de la résonance d'un quartz en RSF :
On veut tracer expérimentalement la courbe donnant l'impédance du quartz en fonction de la fréquence d'excitation. On dispose d'un Générateur Basses Fréquences (GBF) pouvant délivrer une

tension sinusoïdale d'amplitude réglable. Le GBF possède une résistance interne R_g. On dispose d'une résistance R_v variable, d'un quartz et d'un oscilloscope. On réalise alors le montage de la figure ci-après, où les tensions sinusoïdales $v_E(t)$ et $v_S(t)$ sont représentées par leur amplitude complexe $\underline{V_E}$ et $\underline{V_S}$.

Dans cette question, on néglige toujours la résistance du quartz sauf dans la dernière sous-question Q5.d.



(a) Calculer le rapport de la tension de sortie $\underline{V_s}$ à celle d'entrée $\underline{V_e}$, noté $\underline{H} = \dfrac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$ en fonction de R_v et de $\underline{Z}_{AB}$.

(b) On fait alors varier la fréquence, et pour chaque fréquence on ajuste la résistance R_v de telle façon que $|\underline{H}| = \dfrac{1}{2}$.
Que vaut alors le module de l'impédance du quartz en fonction de R_v ?

(c) Autour du pic de résonance d'intensité situé vers 796 kHz, on mesure une largeur de bande passante de 50 Hz (entre les deux fréquences de coupure). On définit le facteur de qualité Q du quartz comme une mesure de l'acuité de cette résonance, comme dans le cas de la résonance en intensité d'un circuit RLC série. Quelle est la valeur numérique de Q ?

(d) En supposant que le facteur de qualité soit donné par la relation $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$ (ω_0 étant la pulsation de résonance), estimer la valeur de la résistance R du quartz.