

# Devoir surveillé n° 1

## Exercice 1 : Chauffage d'un lingot (~ 16%)

À partir du moment où l'on rentre un lingot froid cubique dans un four chaud, la vitesse à laquelle augmentera la température au centre va dépendre des facteurs géométriques (on notera  $\ell$  la longueur du lingot), de la conductivité thermique ( $\lambda$ ), et de l'inertie thermique dans laquelle interviennent la capacité thermique massique à pression constante  $c_P$  et la masse du lingot, ce qui nécessite l'introduction de la masse volumique  $\rho$ .

On note  $t$ , la durée nécessaire pour que le centre du lingot atteigne la température du four. Cette durée dépend des paramètres du système mentionnés ci-dessus. On peut donc poser :

$$t = K c_P^a \rho^b \lambda^c \ell^d$$

où  $K$  est une constante sans dimension.

- On note  $\theta$  la dimension de la température ( $[T] = \theta$ ), et  $T$  la dimension du temps ( $[t] = T$ ).
- La notation  $d\dots$  représente la différentielle d'une grandeur, elle a la même unité que celle-ci. Exemple :  $[dT] = [T]$ .
- Définition de la capacité thermique massique à pression constante :  $c_P = \frac{1}{m} \frac{dH}{dT}$  en maintenant la pression constante, où  $H$  représente l'enthalpie (grandeur thermodynamique homogène à une énergie) du système de masse  $m$ .
- La conductivité thermique  $\lambda$  relie la norme du vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}$  (homogène à une puissance  $P$  par unité de surface) à la variation de température dans le milieu :  $\|\vec{j}\| = \frac{P}{S} = -\lambda \frac{dT}{dx}$ , où  $x$  représente une coordonnée de position.

- Q1. Rappeler le lien entre énergie et puissance. En déduire la dimension d'une puissance.
- Q2. Montrer que la dimension de la conductivité thermique  $\lambda$  est  $[\lambda] = M L \theta^{-1} T^{-3}$ .
- Q3. Montrer que la dimension de la capacité thermique massique à pression constante  $c_P$  est  $[c_P] = L^2 T^{-2} \theta^{-1}$ .
- Q4. Déterminer les exposants de l'expression  $t = K c_P^a \rho^b \lambda^c \ell^d$ , et écrire la relation ainsi obtenue pour  $t$ .
- Q5. Si on double la masse du lingot (en gardant une géométrie cubique), par quel facteur est multipliée la durée  $t$ ? (on pourra répondre en fonction de  $a, b, c, d$  si la question 4 n'a pas été traitée)

## Exercice 2 : Détermination d'une image par construction graphique (~ 10%)

Déterminer graphiquement l'image  $A'B'$  de l'objet  $AB$  (sur l'annexe 1).

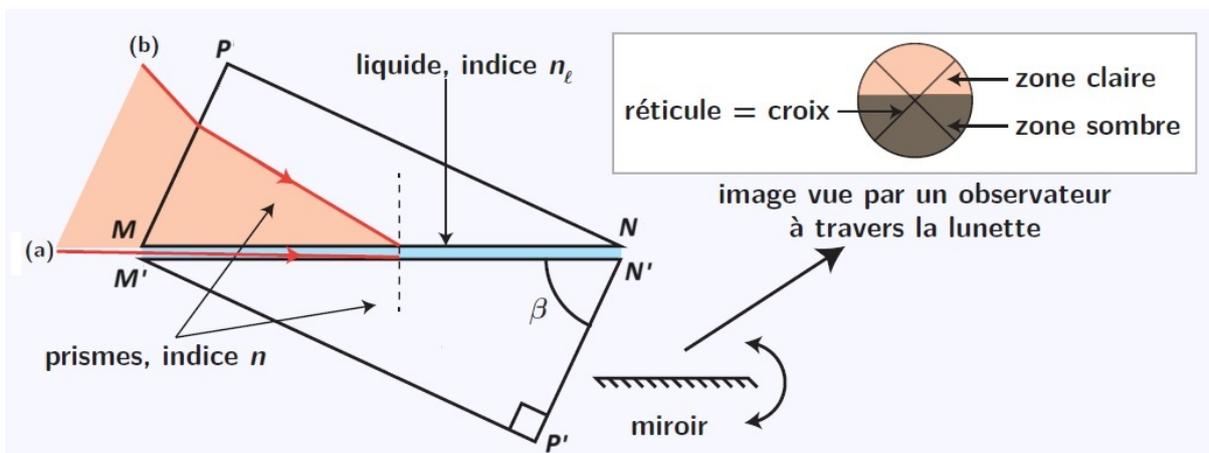
## Exercice 3 : Mesure du taux de sucre dans le jus de raisin ( $\sim 22\%$ )

D'après le Concours Général de physique.

Que ce soit lors de réceptions ou lorsqu'il est repêché dans une cargaison vieille de 170 ans, le champagne sait se faire remarquer. Son élaboration nécessite un travail rigoureux et précis de la part du vigneron, en étroite collaboration avec des œnologues. La physico-chimie du champagne a été étudiée par Pierre-Gilles de Gennes, l'un des prix Nobel français, et plus récemment par Gérard Liger-Belair et son équipe de chercheurs à Reims. Bulles, composition chimique, mouvements de fluide : le champagne est un objet d'études complet et cet exercice en aborde un des aspects.

Afin de contrôler la maturité des raisins dans les vignes, les viticulteurs ont besoin de connaître la teneur en sucre dans le jus des raisins avant la récolte. Une méthode consiste à utiliser un appareil appelé réfractomètre permettant de mesurer l'indice de réfraction du jus. L'indice varie avec la concentration en sucre : des courbes permettent alors d'en déduire la quantité de sucre et le degré d'alcool espéré du futur vin.

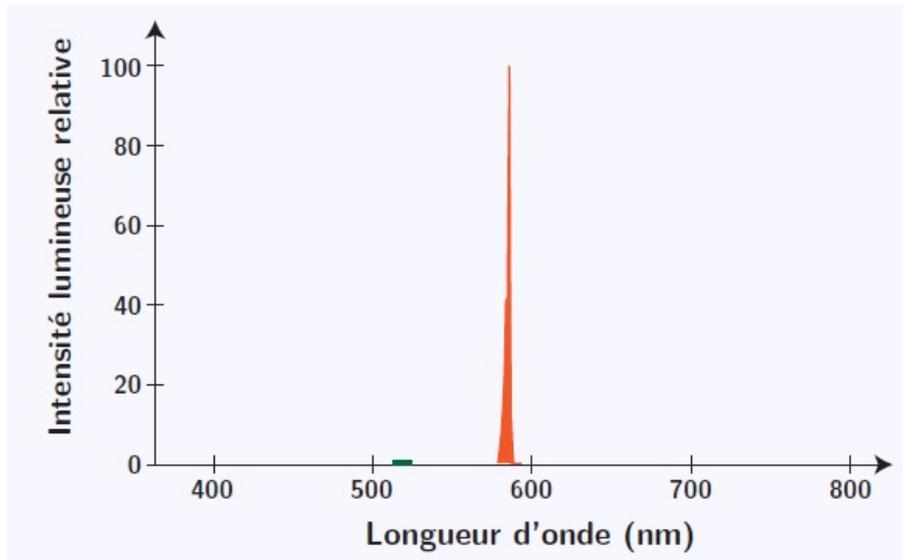
### Document 1: Principe du réfractomètre d'Abbe



Le réfractomètre d'Abbe est constitué de deux prismes  $MNP$  et  $M'N'P'$  en verre d'indice  $n$  entre lesquels est positionné un mince film de liquide issu du raisin dont on veut mesurer l'indice de réfraction  $n_\ell$ .

- Le prisme d'entrée  $MNP$  est éclairé sur la face  $MN$  par le faisceau d'une lampe à vapeur de sodium, qui éclaire également le liquide en incidence rasante (rayon (a)).
- Les rayons traversant le prisme  $M'N'P'$  sont envoyés sur un miroir dont on peut contrôler l'inclinaison.
- Après réflexion, ces rayons sont alors observés par l'utilisateur à l'aide d'une lunette ; l'observateur règle l'inclinaison du miroir de sorte à placer la limite de séparation entre la zone claire et la zone sombre au centre du réticule (croix).

## Document 2: Lampe à vapeur de sodium



Spectre d'une lampe à vapeur de sodium basse pression

- Q1. Pour quelles raisons a-t-il été choisi d'éclairer le dispositif à l'aide d'une lampe à vapeur de sodium ? Justifier.
- Q2. Énoncer les lois de Snell-Descartes pour le passage d'un rayon lumineux au travers d'un dioptre séparant deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$ , avec  $i$  l'angle d'incidence et  $r$  l'angle de réfraction, et faire un schéma pour préciser la position de ces 2 angles (sur ce schéma, on considèrera  $n_2 > n_1$ ).
- Q3. Compléter le schéma de l'annexe 2 en indiquant le chemin parcouru par le rayon (a) qui est en incidence rasante dans le liquide. On suppose que  $n > n_\ell$ , et on note  $r_1$  l'angle de réfraction à l'interface liquide-verre,  $i_2$  et  $r_2$  respectivement l'angle d'incidence et l'angle de réfraction sur la face de sortie du prisme ( $P'N'$ ). L'indice de l'air sera pris égal à 1.
- Q4. Exprimer  $n_\ell$  en fonction de  $r_2$ ,  $\beta$  et  $n$ . Vérifier, avec la formule obtenue, que la valeur numérique de  $n_\ell$  pour  $n = 1,732$ ,  $\beta = 65,0^\circ$ ,  $r_2 = 23,2^\circ$ , vaut 1,362 (l'expérience ayant été réalisée à  $20^\circ\text{C}$ ).
- Q5. En déduire la teneur approximative en sucre à l'aide du tableau suivant :

Indice de réfraction à $20^\circ\text{C}$	1,3577	1,3592	1,3607	1,3621	1,3635	1,3650	1,3665	1,3680	1,3694
Teneur en sucre (en $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$ )	150	160	170	180	190	200	210	220	230

- Q6. Compléter le schéma l'annexe 2 en indiquant le chemin parcouru par le rayon (b) et utiliser ces tracés pour expliquer le fonctionnement du réfractomètre.

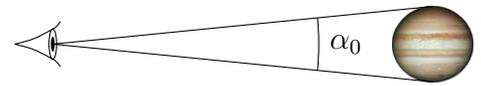
## Exercice 4 : Éléments optiques de la chaîne d'acquisition d'images ( $\sim 52\%$ )

D'après Centrale Supélec TSI.

On s'intéresse à quelques éléments du matériel d'un astronome amateur adepte de l'imagerie numérique et désirent photographier Jupiter lors d'une période favorable à son observation.

Q1. Pour un observateur terrestre, Jupiter est vue sous un angle  $\alpha$  qui varie suivant la distance Terre-Jupiter. Les orbites de la Terre et de Jupiter sont assimilées à des cercles dans un même plan, ayant pour centre le Soleil, de rayons respectifs  $R_T = 150 \times 10^6$  km et  $R_J = 780 \times 10^6$  km et décrits dans le même sens. Jupiter est modélisée par une sphère de diamètre  $d_J = 140\,000$  km.

- Représenter sur un schéma la configuration des 3 astres, pour laquelle le diamètre apparent de Jupiter depuis la Terre est le plus grand.
- Calculer cet angle maximal (que l'on appellera  $\alpha_0$ ).
- Cette situation, la plus favorable à l'observation, porte le nom d'opposition de Jupiter. Proposer une explication pour ce nom.



À cause des imperfections du modèle, la valeur de  $\alpha_0$  n'est pas exactement celle trouvée à la question 1, mais  $\alpha_0 = 50''$  ( $3600'' = 1^\circ$ ). On adoptera cette valeur dans toute la suite du problème.

L'astronome amateur désire photographier la planète Jupiter vue depuis la Terre à l'opposition. Il utilise une lunette astronomique (voir figure 1 à gauche) dont l'objectif est assimilé à une lentille mince convergente  $L_1$  de diamètre  $d_1 = 235$  mm et de distance focale  $f'_1 = 2350$  mm, monté sur un tube  $\mathcal{T}_1$ . Une caméra CCD est fixée sur un tube  $\mathcal{T}_2$  appelé « porte oculaire ». La mise au point est faite en faisant coulisser  $\mathcal{T}_2$ . Dans toute la suite (sauf question 10), on se placera dans le cadre de l'optique géométrique et dans les conditions de Gauss.

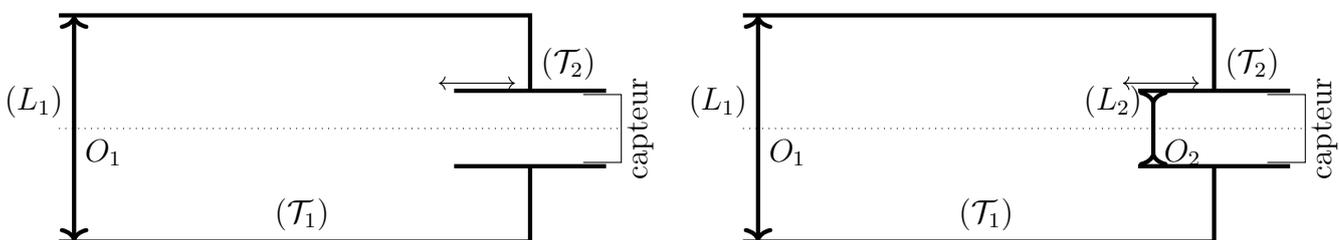


FIGURE 1 – Schéma d'une lunette amateur

Le fabricant de la caméra donne les caractéristiques techniques suivantes pour le capteur : modèle ICX618, type CCD, noir et blanc, rectangulaire de diagonale  $d_c = 4,48$  mm, surface  $S_c = 9,63$  mm<sup>2</sup>, comptant  $N = 307200$  pixels de forme carrée.

- Q2. Calculer la largeur  $\ell_c$  et la hauteur  $h_c$  du capteur, puis montrer que la largeur  $\varepsilon_c$  d'un pixel vaut  $5,60 \mu\text{m}$ .
- Q3. Expliquer pourquoi il est très raisonnable de considérer que Jupiter est située à l'infini, ce qu'on supposera pour toute la suite.
- Q4. À quelle distance de  $L_1$  faut-il placer le capteur pour y obtenir une image nette de Jupiter ? Quelle est alors la largeur, exprimée en nombre de pixels, de l'image de Jupiter sur le capteur ?
- Q5. Pour estimer la précision avec laquelle on doit faire la mise au point, on suppose que l'ensemble ( $\mathcal{T}_2$ -capteur) se trouve à une distance  $\varepsilon_0$  de la position assurant une image parfaitement nette. En raisonnant sur les rayons issus du point de Jupiter situé sur l'axe optique de  $L_1$ , faire un schéma pour expliquer que l'image de ce point sur le capteur n'est plus ponctuelle et forme une tache de largeur  $\varepsilon_t$ . On distinguera les deux sens possibles de décalage du porte oculaire. Exprimer  $\varepsilon_t$  en fonction de  $f'_1$ ,  $\varepsilon_0$  et  $d_1$ .
- Q6. À quelle condition sur  $\varepsilon_t$  et  $\varepsilon_c$  cette non ponctualité ne se remarquera pas sur le capteur utilisé ? En déduire la valeur maximale autorisée pour  $\varepsilon_0$  sans qu'il y ait d'incidence sur la netteté de l'image formée sur le capteur (tolérance sur la mise au point).
- Q7. Pour obtenir une image plus grande de la planète, on intercale une lentille de Barlow, modélisée ici par une lentille mince ( $L_2$ ) divergente, de distance focale  $f'_2$ , placée à la distance  $D_{2c} = 200 \text{ mm}$  du capteur (figure 1 à droite). La mise au point se fait en translatant l'ensemble ( $L_2$ -capteur), fixé sur le tube porte oculaire. On notera  $D_{12}$  la distance entre ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) et on admettra que  $F'_1$  est situé entre ( $L_2$ ) et le capteur.  
Construire sur un même schéma optique, la position de l'image sans la lentille  $L_2$ , et avec celle-ci.
- Q8. Comment faut-il choisir  $f'_2$  et à quelle valeur doit-on régler  $D_{12}$  pour que le dispositif produise sur le capteur de la caméra une image de Jupiter trois fois plus large que précédemment (sans  $L_2$ ) ?
- Q9. Le dispositif de Barlow est alors qualifié de « tripleur de focale ». Proposer une justification à ce terme.
- Q10. Jusqu'à présent, on a négligé les effets de la diffraction, qui produit un étalement des images. En supposant que l'effet dominant est la diffraction à travers l'ouverture délimitant  $L_1$ , estimer la largeur  $\varepsilon_d$  sur le capteur de l'image d'un objet ponctuel situé à grande distance suivant l'axe optique, dans le cas de la lunette munie du tripleur de focale.  
On considérera que la mise au point est parfaite et que l'ensemble de la chaîne optique est assimilable à une lentille de diamètre  $d_1$  et de focale  $3f'_1$ . Les candidats introduiront une longueur d'onde et en proposeront un ordre de grandeur raisonnable. Dans le cas d'un obstacle circulaire de diamètre  $a$ , la largeur angulaire de la tache de diffraction est multipliée d'un facteur 1,22 par rapport à celle de la tache générée par une fente de largeur  $a$ .  
Commenter le résultat obtenu.