

## Devoir surveillé n° 2

### Exercice 1 : Projecteur de diapositives ( $\sim$ %)

Les questions de ce problème constituent une suite logique et sont donc à traiter dans l'ordre indiqué. Certaines questions sont à traiter sur des annexes, à rendre avec la copie. Pour les tracés d'optique géométrique demandant une grande précision, le soin et la clarté des figures seront prises en compte. Pour que le schéma rentre dans une feuille A4 les échelles n'ont pas été respectées sur les schémas. Les valeurs numériques ne seront donc pas obtenues par des mesures à la règle, mais par des applications numériques.

#### Partie I. Préambule

Dans l'ensemble de ce problème, on supposera qu'on se trouve dans les conditions de Gauss.

- Q1. Rappeler en quoi consistent les conditions de Gauss et les propriétés vérifiées dans de telles conditions.
- Q2. On considère un pinceau lumineux convergent arrivant sur la lentille divergente de la figure 1. Tracer sur l'annexe 1 à **rendre avec la copie** le pinceau lumineux au-delà de cette lentille.

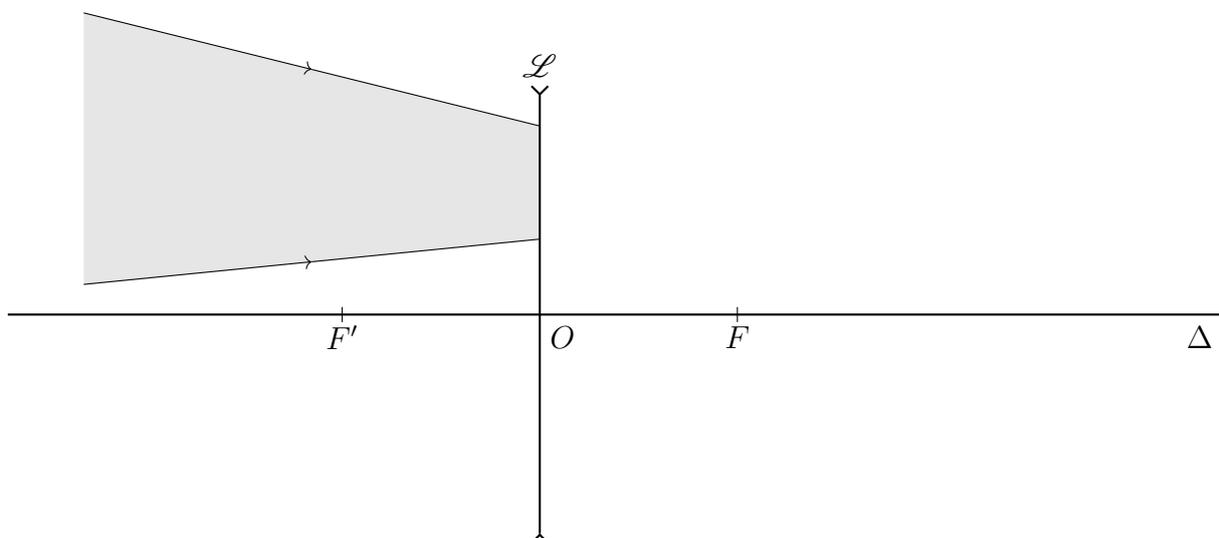


FIGURE 1 – Faisceau convergent arrivant sur une lentille divergente

- Q3. On considère un système optique constitué (de gauche à droite) de deux lentilles minces convergentes ( $\mathcal{C}_1$ ) et ( $\mathcal{C}_2$ ) coaxiales de distances focales respectives  $f'_1$  et  $f'_2 = \frac{f'_1}{3}$ .
- Quelles sont les conditions pour qu'un faisceau incident parallèle entrant dans la lentille ( $\mathcal{C}_1$ ) induise un faisceau parallèle sortant de la lentille ( $\mathcal{C}_2$ ) ? Que peut-on dire de la distance  $d$  entre les deux lentilles ? Argumenter votre réponse.
  - Faire le tracé correspondant sur l'annexe 2 **à rendre avec la copie**. On prendra un faisceau incident de rayons parallèles faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe optique.
  - Établir l'expression du rapport  $G$  (défini positif) des largeurs des faisceaux d'un tel système optique (largeurs mesurées dans un plan transversal). Pour l'application numérique, on prendra  $f'_1 = 6$  cm, et  $\alpha$  sera considéré suffisamment faible pour faire l'approximation .
  - Le faisceau incident faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe optique, exprimer l'angle  $\alpha'$  du faisceau sortant en fonction de  $G$  et de  $\alpha$ . Commenter le signe.
- Q4. On considère maintenant un système optique constitué (de gauche à droite) de deux lentilles minces ( $\mathcal{C}_1$ ) et ( $\mathcal{D}_2$ ) coaxiales. La lentille ( $\mathcal{C}_1$ ) est convergente et ( $\mathcal{D}_2$ ) est divergente, leurs distances focales respectives vérifient  $f'_1$  et  $f'_2 = -\frac{f'_1}{3}$ .
- Quelles sont les conditions pour qu'un faisceau incident parallèle entrant dans la lentille ( $\mathcal{C}_1$ ) induise un faisceau parallèle sortant de la lentille ( $\mathcal{D}_2$ ) ? Que peut-on dire de la distance  $d$  entre les deux lentilles ? Argumenter votre réponse.
  - Faire le tracé correspondant sur l'annexe 3 **à rendre avec la copie**. On prendra un faisceau incident de rayons parallèles faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe optique.
  - Établir l'expression du rapport  $G'$  (défini positif) des largeurs des faisceaux d'un tel système optique (largeurs mesurées dans un plan transversal).
  - Le faisceau incident faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe optique, exprimer l'angle  $\alpha'$  du faisceau sortant en fonction de  $G'$  et de  $\alpha$ . Commenter le signe.

## Partie II. Conception d'un projecteur de diapositives

On cherche à concevoir un projecteur de diapositives ( $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$ ) permettant d'obtenir une image de  $1,20 \text{ m}$  de large sur un écran situé en  $E$  à  $\ell = 3$  mètres du centre optique de la lentille mince ( $\mathcal{C}_1$ ) pour une diapositive horizontale, de centre  $I$ . Dans cette partie du problème, on notera  $e$  la distance  $\overline{IF}$  et  $m$  la distance  $\overline{F'E}$ . Comme on peut le voir sur la figure 2, on remplacera la source lumineuse réelle (à gauche) par une source ponctuelle située en  $S$ .

- Q5. Quel est le grandissement  $\gamma$  nécessaire ? Commenter le signe.

Dans un premier temps, on utilise le montage de la figure 2 qui comprend une source lumineuse (que l'on supposera ponctuelle) située en un point  $S$  (située sur l'axe optique) située en amont d'un diaphragme et un diffuseur épais. La diapositive sera insérée, centrée en  $I$  sur l'axe optique juste devant le diffuseur. L'objectif est constitué d'une lentille convergente de focale  $f' = \overline{OF'} = -\overline{OF}$  centrée sur l'axe optique en  $O$ . Le diffuseur épais sert à faire en sorte que tous les points de la diapositive diffusent la lumière, c'est à dire émettent des rayons dans toutes les directions.

- Q6. Tracer sur l'annexe 4 **à rendre avec la copie**  $G'$  et  $D'$  les images des points  $G$  et  $D$  représentant respectivement les bords gauches et droits de la diapositive. Dans quel sens faut-il monter la diapositive ? Justifier votre réponse.
- Q7. Déterminer les expressions de  $e$ ,  $m$  et  $f'$  en fonction du grandissement  $\gamma$  et de  $\ell$ . Réaliser les applications numériques pour le grandissement souhaité.
- Q8. On souhaite en plus pouvoir obtenir une image nette par déplacement de l'objectif pour des distances  $\ell$  comprises entre 2 et 5 m. Quelles sont les grandissements et largeurs d'images horizontales correspondant à ces deux limites (image nette d'une diapositive horizontale) ? Si la réponse à la question Q7. n'a pas été obtenue, on prendra  $f' = 8,74$  cm.

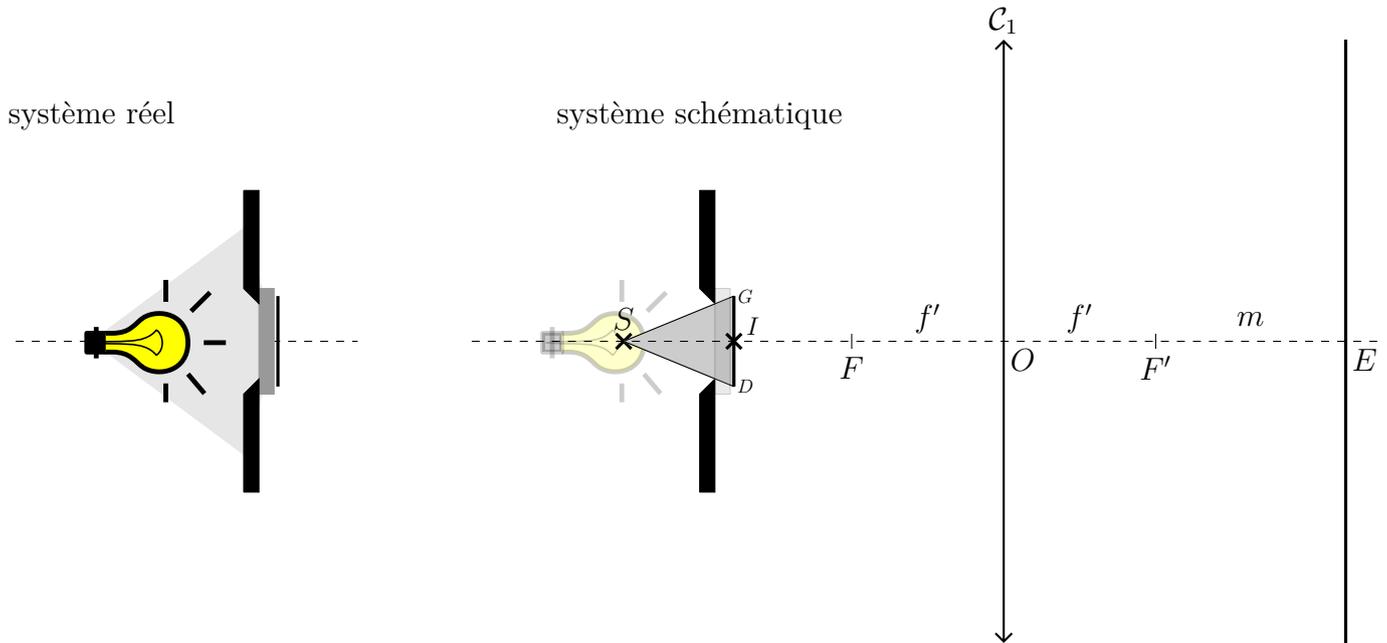


FIGURE 2 – Vue de dessus du projecteur de diapositives

- Q9. Quelles sont les limites de déplacement de la lentille ( $\mathcal{C}_1$ ) entre  $O_{\min}$  et  $O_{\max}$  (donner  $\overline{IO_{\min}}$  et  $\overline{IO_{\max}}$ ) ? En déduire la course  $\Delta(\overline{IO}) = \overline{O_{\min}O_{\max}}$  nécessaire pour l'objectif.
- Q10. Quel intérêt et quel inconvénient voyez-vous à utiliser toute la surface de la lentille ?

### Partie III. Projecteur de seconde génération

Pour réaliser un projecteur de seconde génération, on interpose une lentille ( $\mathcal{C}_0$ ) convergente entre la lampe et le diaphragme du montage précédent. Cette lentille est en général épaisse, mais pour les besoins de cet exercice, on supposera qu'elle est mince et qu'on se trouve toujours dans les conditions de Gauss (cf. figure 3). On remplace le diffuseur par un verre parfaitement transparent permettant de séparer thermiquement les deux parties du projecteur.

- Q11. On a placé la lentille convergente ( $\mathcal{C}_0$ ) de manière à ce que le pinceau lumineux issu de  $S$  englobe toute la largeur de la diapositive et se focalise en  $O$ , centre optique de la lentille ( $\mathcal{C}_1$ ). Sur l'annexe 5 à rendre avec la copie :
- Tracer l'enveloppe « utile » du pinceau lumineux entre  $S$  et  $E$  (définie par les rayons limites)
  - Construire les images  $G'$  et  $D'$  de  $G$  et  $D$  respectivement. Commenter.
  - Indiquer explicitement la position du plan focal image de ( $\mathcal{C}_0$ ).
- Q12. Donner la relation entre la distance focale image  $f'_0$  de ( $\mathcal{C}_0$ ) et  $\overline{O'O}$  pour un grandissement transversal associé à ( $\mathcal{C}_0$ )  $G_t = -4$ .
- Q13. Pour des raisons d'encombrement, on est contraint de fixer la distance  $\overline{SI}$  à 5 cm. En déduire la valeur de la distance  $\overline{SO'}$  pour une image nette pour une distance  $\ell = 200$  cm. Si la réponse à la question Q9. n'avait pas été obtenue, on prendra  $\overline{IO_{\max}} = 9,13$  cm pour cette question.
- Q14. Quelle est alors la valeur de la distance focale de la lentille ( $\mathcal{C}_0$ ) ?
- Q15. Dans le cadre des conditions aux limites imposées pour le réglage de la netteté dans partie 2, on a prévu de pouvoir déplacer la lentille ( $\mathcal{C}_1$ ) entre  $O_{\min}$  et  $O_{\max}$  déterminés dans Q9. Ceci implique un mouvement conjugué de ( $\mathcal{C}_0$ ) entre les positions  $O'_{\min}$  et  $O'_{\max}$ . Donner les distances  $\overline{SO'_{\min}}$  et  $\overline{SO'_{\max}}$  correspondantes de manière à toujours respecter les conditions explicitées dans Q11. Si la réponse à la question Q9. n'avait pas été obtenue, on prendra  $\overline{IO_{\min}} = 8,90$  cm pour cette question.

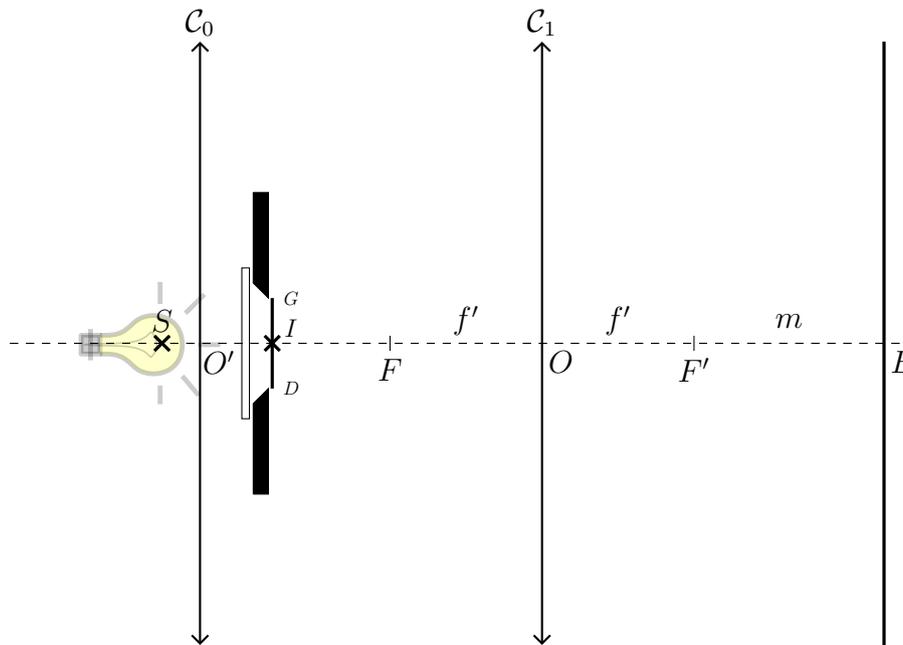


FIGURE 3 – Vue du projecteur de diapositives de seconde génération

- Q16. Quelle est la relation entre la course  $\Delta(\overline{SO'})$  de la lentille  $(C_0)$  et la course  $\Delta(\overline{SO}) = \overline{O_{\min}O_{\max}}$  de la lentille  $(C_1)$ ? Faire l'application numérique.
- Q17. Quels sont les avantages à placer  $(C_1)$  au point conjugué de  $S$  par  $(C_0)$ ?

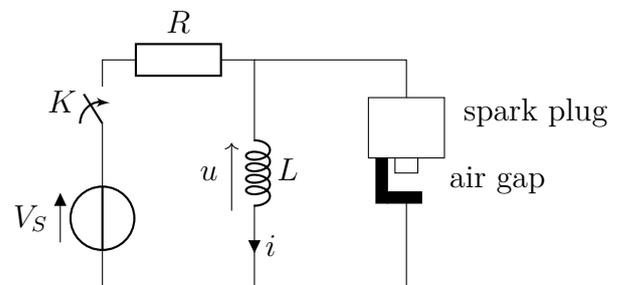
## Exercice 2 : - Circuit $RL$ et allumage commandé ( $\sim \%$ )

À cause de leurs propriétés électriques, les inductances (bobines) sont souvent employées pour la génération d'étincelles, par exemple dans les circuits d'allumage automobile. Les moteurs à essence nécessitent que le mélange air-essence de chaque cylindre soit « allumé » à un instant précis. C'est le rôle des bougies d'allumage (spark plug). Elles sont constituées de deux électrodes séparées par une tranche d'air (air gap). En créant une différence de potentiel de quelques centaines voire milliers de Volts entre les deux électrodes, une étincelle apparaît dans l'air les séparant. Cette étincelle va déclencher la combustion du mélange air-essence (réaction d'oxydo-réduction très rapide). Mais comment une tension si importante peut-elle être générée par une batterie d'automobile, qui ne délivre que 12 V ?

Ce problème comporte deux parties indépendantes.

### Partie I. Circuit Réel

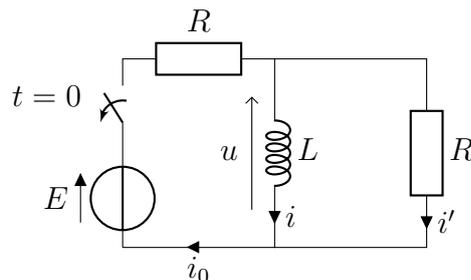
Dans le système d'allumage automobile schématisé ci-contre, la bobine a une inductance  $L = 6 \text{ mH}$  et la résistance vaut  $R = 4 \Omega$ . La batterie qui alimente le circuit peut être assimilée à une source idéale de tension, de force électro-motrice (f.é.m.)  $V_S = 12 \text{ V}$ .



- Q1. L'interrupteur  $K$  est fermé depuis très longtemps. La tranche d'air de la bougie constitue une très grande résistance, considérée comme infinie : la bougie peut être considérée comme un interrupteur ouvert. Déterminer, tant que l'interrupteur  $K$  reste fermé, l'expression et la valeur de l'intensité  $i$  circulant dans la bobine, ainsi que l'expression et la valeur de l'énergie stockée dans cette dernière.
- Q2. L'interrupteur  $K$  s'ouvre. Déterminer la tension aux bornes de la tranche d'air de la bougie, si l'interrupteur met  $1 \mu\text{s}$  à s'ouvrir (expression et valeur numérique). Commenter.

### Partie II. Circuit équivalent

Cette forte surtension génère un arc électrique : cela correspond à un déplacement d'électrons libres dans l'air, qui ionisent la tranche d'air. Un courant peut circuler à travers la bougie, qui devient assimilable à une résistance  $R' = 10R$ . On reprend donc la même étude, mais sur le circuit ci-après.



- Q3. Déterminer tous les courants  $i_0$ ,  $i$  et  $i'$  ainsi que la tension  $u$  juste avant l'ouverture de l'interrupteur. Donner également leurs expressions juste après.

- Q4. Déterminer également tous les courants  $i_0$ ,  $i$  et  $i'$ , ainsi que la tension  $u$  au bout d'un temps infini après l'ouverture de l'interrupteur.
- Q5. Établir l'équation différentielle régissant, pour  $t > 0$ , l'évolution, au choix :
- de l'intensité  $i(t)$  dans la bobine,
  - **ou** de la tension  $u(t)$ .

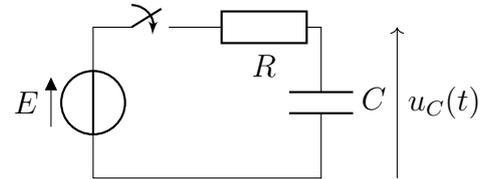
On fera apparaître une constante de temps  $\tau$ , dont on donnera l'expression en fonction de  $L$  et  $R$ .

- Q6. Résoudre cette équation différentielle, de façon à obtenir l'expression de  $i(t)$  (ou de  $u(t)$ ), et en déduire l'expression de  $u(t)$  (ou de  $i(t)$ ), et de  $i_0(t)$ . Ces expressions seront données en fonction du temps  $t$  et des paramètres du circuit ( $V_S$ ,  $R$ , et  $\tau$ ).
- Q7. Tracer les graphes donnant les évolutions des grandeurs électriques  $i(t)$ ,  $i'(t)$ ,  $i_0(t)$  (les 3 sur le même graphique) et  $u(t)$  (sur un autre graphique) au cours du temps (de  $t < 0$  à  $t \rightarrow \infty$ ). On fera apparaître le temps caractéristique  $\tau$ .
- Q8. Exprimer l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance  $R'$  pendant tout le régime transitoire (entre  $t = 0^+$  et  $t \rightarrow \infty$ ). Vérifier que cette énergie est égale à l'énergie qui avait été emmagasinée dans la bobine avant l'ouverture de l'interrupteur.

## Exercice 3 : - Les supercondensateurs ( $\sim$ %)

### Partie I. Mesure de la capacité d'un condensateur

On souhaite dans cette partie mesurer expérimentalement la capacité d'un condensateur. Une méthode consiste à soumettre le dipôle { condensateur de capacité  $C$  + conducteur ohmique de résistance  $R$  } en série avec un échelon de tension et d'analyser la réponse temporelle de ce dipôle à cette excitation.



Le condensateur est initialement déchargé et le conducteur ohmique a pour résistance  $R = 1,00 \text{ k}\Omega$ . À l'instant de date  $t = 0$ , le dipôle  $RC$  est soumis à une tension constante  $E$ . Un système d'acquisition permet de mesurer tous les  $\Delta t = 0,10 \text{ ms}$  la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur.

On obtient le graphe  $u_{C,\text{exp}} = f(t)$  suivant. La courbe obtenue permet raisonnablement de suggérer un comportement du 1<sup>er</sup> ordre.

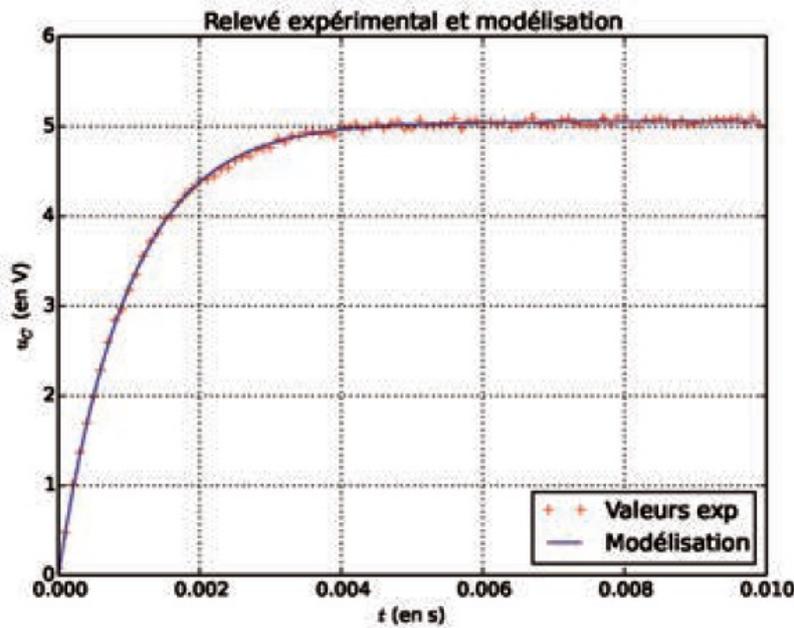


FIGURE 4 – Relevé expérimental et modélisation

Q1. Établir l'équation différentielle satisfaite par  $u_C$  et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau}$$

Q2. Préciser la dénomination de  $\tau$  et son expression en fonction des grandeurs du circuit. Quelle est sa signification physique ?

Q3. Résoudre cette équation avec les conditions initiales données.

Q4. Déterminer à l'aide du relevé expérimental fourni une estimation de  $\tau$  et de  $E$ . Expliciter clairement le raisonnement suivi.

Q5. En déduire alors une estimation de la capacité  $C$  du condensateur.

## Partie II. Présentation des supercondensateurs

L'utilisation d'un stockage d'énergie est souvent nécessaire pour les applications de type traction électrique. Le composant de stockage est utilisé :

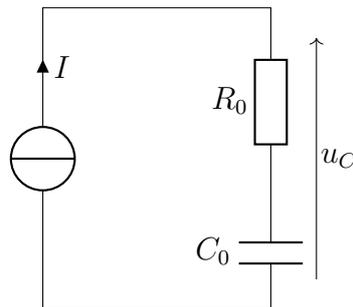
- dans les systèmes isolés où il alimente des dispositifs demandant une énergie réduite ;
- dans les systèmes hybrides où il joue un rôle en terme d'apport de puissance ou d'énergie selon l'application.

Jusqu'à présent, les systèmes les plus utilisés sont les accumulateurs qui ont une puissance spécifique et une autonomie relativement élevées. Les condensateurs classiques ont une autonomie insuffisante, mais possèdent une puissance spécifique incomparable. Les supercondensateurs apparaissent comme des composants intermédiaires en terme de propriétés énergétiques qui les rendent très intéressants car ils n'ont pratiquement pas de concurrents dans ce domaine.

Si on veut accroître la capacité de stockage d'un condensateur, il faut augmenter la permittivité relative  $\varepsilon_r$  du diélectrique et/ou le rapport  $\frac{S}{e}$ ,  $S$  désignant la surface des armatures et  $e$  la distance séparant les deux armatures.) Le principe de base des supercondensateurs est liée à la valeur élevée du rapport  $\frac{S}{e}$ . Ainsi, les charges électriques se trouvent localisées sur des surfaces très importantes (électrodes poreuses) et à des distances très faibles (principe de la double couche électrochimique).

Un modèle électrociétique modélisant le comportement d'un supercondensateur consiste à l'assimiler à l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance  $R_0$  et d'un condensateur de capacité  $C_0$ .

On soumet le supercondensateur initialement chargé sous une tension  $U_a$ , à une impulsion de courant d'intensité  $I = 100$  A pendant la durée  $\Delta t = 10$  s.



On obtient le relevé de la tension  $u_{C,\text{exp}}$  suivant :

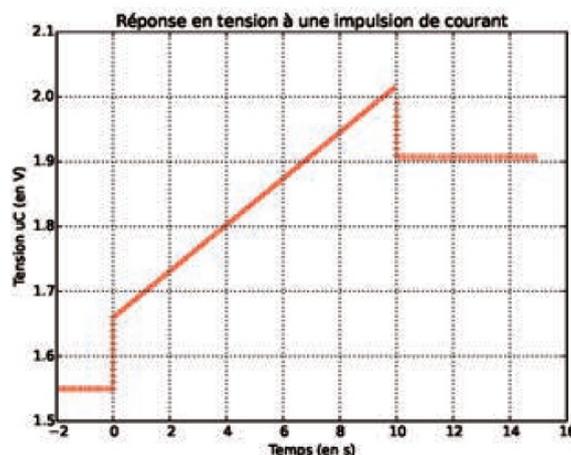


FIGURE 5 – Réponse d'un supercondensateur à une impulsion de courant

- Q6. Établir l'expression de la tension  $u_C(t)$  pendant la phase de charge à courant constant.
- Q7. Donner à partir du relevé expérimental une estimation de la résistance  $R_0$  et de la capacité  $C_0$  du modèle équivalent. On explicitera clairement le raisonnement.

Dans les applications industrielles utilisant des supercondensateurs, ceux-ci peuvent être associés en série ou en dérivation.

- Q8. On associe deux supercondensateurs  $(C_0, R_0)$  identiques en série. Montrer que cette association est équivalente à l'association série d'un condensateur de capacité  $C_s$  et d'un conducteur ohmique de résistance  $R_s$  dont on donnera les expressions en fonction de  $C_0$  et  $R_0$ . Généraliser le résultat au cas de  $n$  supercondensateurs tous identiques associés en série.
- Q9. On associe maintenant deux supercondensateurs  $(C_0, R_0)$  identiques en dérivation. Montrer de même que cette association est équivalente à l'association série d'un condensateur de capacité  $C_p$  et d'un conducteur ohmique de résistance  $R_p$  dont on donnera les expressions en fonction de  $C_0$  et  $R_0$ . Généraliser le résultat au cas de  $n$  supercondensateurs tous identiques associés en dérivation.

Le premier bateau électrique au monde alimenté à 100% par des supercondensateurs a été inauguré le mercredi 18 septembre 2013 à Lorient. Ce transbordeur électrique fait la navette entre Lorient et Locmiquélic. La capacité des supercondensateurs est suffisante pour un alimenter les deux moteurs de 100 chevaux sur un aller-retour. La recharge des supercondensateurs se fait pendant le chargement et le déchargement des passagers à terre en seulement 4 minutes. Elle se fait à l'aide d'un connecteur à deux broches à une tension de 400 V. Le bateau est équipé de 128 supercondensateurs en parallèle de grande capacité pour un poids total de 6 tonnes réparti dans les deux coques du catamaran. Celui-ci va pouvoir effectuer chaque jour 28 aller-retours, à raison d'un par demi-heure, pour un trajet de 7 minutes entre Lorient et Locmiquélic, de l'autre côté de la rade. À raison de 28 recharges complètes par jour, le bateau sera rechargé environ 7000 fois par an. Cette cadence de recharge serait impossible à tenir pour des batteries, car les batteries Lithium-Ion et les batteries Ni-MH ne supportent que 500 à 1000 cycles de recharge en moyenne. Un autre gros avantage de cette technologie par rapport à l'utilisation de batteries est la très grande vitesse de rechargement.

Un cheval vapeur correspond à une puissance de 735 W.

- Q10. Pour que le bateau puisse assurer son service de transport correctement, comment les ingénieurs ont-ils dû dimensionner les super-condensateurs, sachant qu'ils ne doivent pas fonctionner en dessous d'une charge de 50% ?