Devoir surveillé n° 2

Ce DS comporte deux niveaux de difficultés : pour le sujet niveau 1 (plus facile), ne pas traiter la partie **III.** de l'exercice 1, et la partie **II.** de l'exercice 3.

Exercice 1 : L'appareil photo ($\sim$ 30%)

Problème adapté de CCINP MP.

Un appareil photo est constitué d'un ensemble de lentilles dont le but est de former l'image réelle d'un objet sur un détecteur sensible aux radiations lumineuses, c'est-à-dire film argentique ou barrettes CCD. Cet ensemble est associé à un boîtier qui joue le rôle de chambre noire et qui contient un obturateur, un système optique de visée et de mise au point ainsi qu'une cellule photoélectrique qui permet de mesurer le flux lumineux incident. La figure 1, ci-dessous, représente les principaux éléments d'un appareil photo de type réflex, avec un miroir pivotant (a), un verre de visée (b), une lentille collectrice (c), un pentaprisme en toit (d) ainsi qu'un oculaire (e).

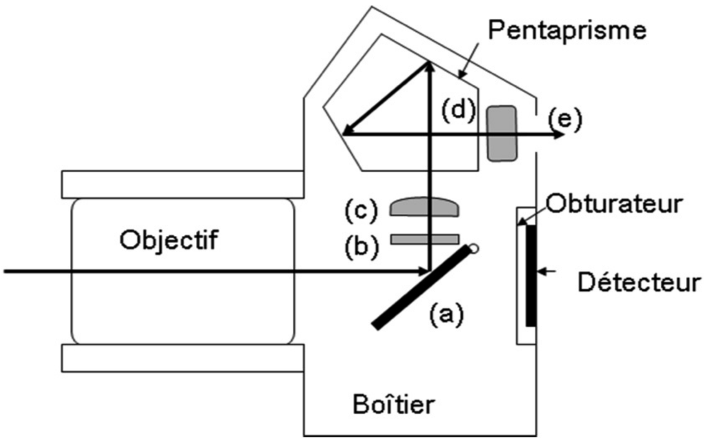

Figure 1 – Appareil photo

Préambule

Le système optique qui constitue l'objectif doit restituer la forme et les couleurs de l'objet, ceci dans des conditions où les rayons lumineux incidents ne vérifient pas nécessairement les conditions dites de Gauss. Il doit donc pouvoir corriger les aberrations chromatiques et géométriques. La valeur absolue de la distance focale de l'objectif est communément appelée « focale ». Elle représente la distance entre la pellicule (ou la matrice CCD) et la lentille équivalente à l'objectif pour un sujet à l'infini, c'est-à-dire à grande distance. Les usages veulent que l'on qualifie de longue (respectivement courte) focale, un objectif dont la focale est plus grande (respectivement plus petite) que la longueur de la diagonale du détecteur utilisé, c'est-à-dire pellicule ou matrice CCD. Ceci implique que le choix de la focale est indissociable de celui du format du détecteur.

Partie I. Modélisation de l'objectif monolentille

Dans cette partie, l'objectif est assimilé à une simple lentille mince (L_1), de focale image $f'_1 = 50\,\mathrm{mm}$. On considère le protocole représenté sur la figure 2. L'appareil est initialement réglé sur un objet placé à l'infini. On constate alors que pour former une image nette sur une pellicule fixe d'un objet situé à une distance x devant l'objectif (x est comptée positivement : $x > 0$), il faut déplacer l'objectif d'une certaine distance, appelée tirage, et notée t. Cette opération constitue la mise au point.

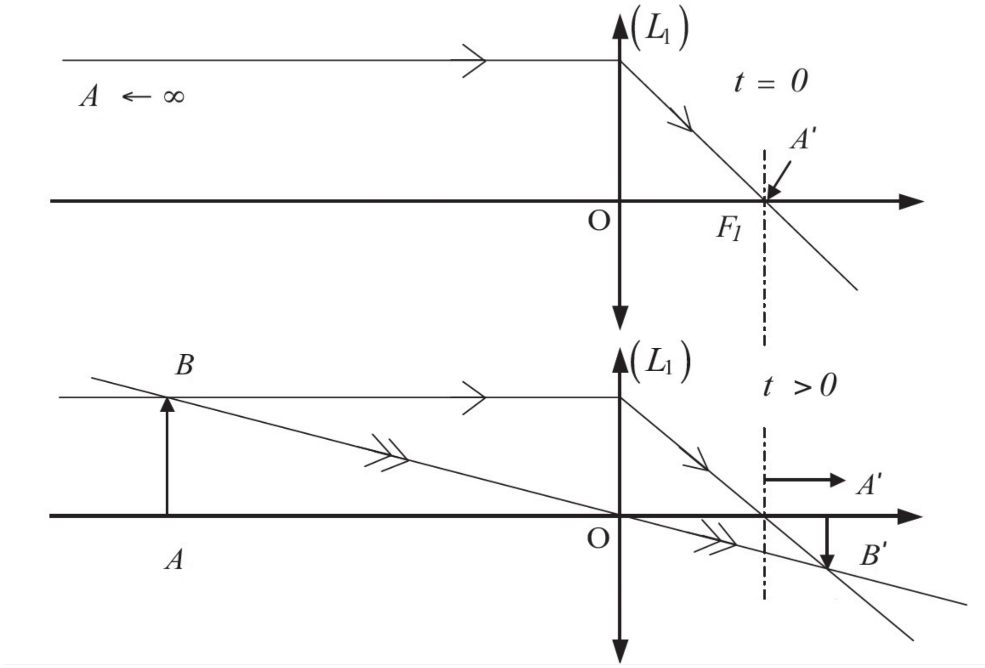

FIGURE 2 – Protocole avec lentille simple

Q1. À l'aide de la relation de conjugaison, exprimer le tirage t en fonction des seuls x et f'_1.

Q2. Exprimer littéralement puis calculer la variation de ce tirage pour un objet placé en l'infini puis en $x = 200\,f'_1$. Sachant qu'une mise au point n'a de sens que pour un déplacement mécanique d'au moins un demi-millimètre, cette dernière est-elle nécessaire dans le cas présent ?

Q3. Reprendre la question précédente pour un objet placé en $x = 100\,f'_1$ puis $x = 10\,f'_1$.

Partie II. Objectif dédié spécifiquement à la macrophotographie

La macrophotographie concerne l'ensemble des techniques photographiques permettant de photographier des sujets de petite taille.

On considère un objet réel situé à 30 cm de l'objectif mono-lentille (L_1) utilisé en **I.** , avec un tirage fixé à $t = 6\,\mathrm{mm}$.

Q4. Déterminer la position de l'image $\overline{O_1A'_1}$ par rapport à la lentille (L_1). Peut-on photographier de manière nette cet objet ?

Q5. Déterminer la position de l'objet le plus proche « photographiable » avec ce tirage de 6 mm, ainsi que le grandissement transversal G_{t1}.

Q6. On place devant l'objectif, à une distance e, une lentille additionnelle convergente (L_5), de focale f'_5 supérieure à f'_1. On pose x (comptée positivement), la distance entre l'objet et le centre O_5 de la lentille (L_5). Donner l'expression de x en fonction des distances focales images f'_1 et f'_5, de e et t, afin que l'image soit nette sur la pellicule.

Q7. La distance e valant 5 cm, déterminer la valeur minimale de x pour que l'objet puisse être photographié de façon nette pour la valeur de distance focale $f'_5 = 20\,\text{cm}$, pour un tirage maximal de 6 mm.

Q8. Déterminer l'expression du grandissement transversal G_{t15} de l'ensemble formé des deux lentilles L_5 et L_1, défini comme le rapport de la taille de l'image finale sur celle de l'objet. Faire l'application numérique avec $f'_5 = 20\,\text{cm}$ et pour un objet placé à la distance $x = 0{,}135\,\text{m}$.

Q9. Conclure quant à l'intérêt d'utiliser cette lentille additionnelle (L_5).

Partie III. Objectif bifocal (Sujet niveau 2)

Considérons trois lentilles minces (L_2), (L_3) et (L_4), de centres O_2, O_3 et O_4, placées suivant un même axe optique. (L_2) et (L_4) sont identiques et divergentes, de distance focale image $|f'_2| = 60\,\text{mm}$, tandis que (L_3) est convergente avec $|f'_3| = 35\,\text{mm}$.

Q10. **Première configuration (a) : les lentilles (L_2) et (L_3) sont accolées.**

(a) Montrer que la distance focale image $|f'_{2,3}|$ de la lentille équivalente au système $(L_2) + (L_3)$ peut se mettre sous la forme $f'_{2,3} = \dfrac{f'_2\, f'_3}{f'_2 + f'_3}$. La calculer et en déduire la nature de cette lentille équivalente.

(b) Déterminer la distance $\overline{O_2O_4}$ en fonction de f'_2 et f'_3 pour que le système constitué des trois lentilles soit afocal. La calculer.

(c) Représenter sur un schéma la traversée d'un faisceau incident de rayon R à travers les 3 lentilles, on notera R' le rayon du faisceau émergent. En déduire l'expression du grandissement transversal $G_{ta} = \dfrac{R'}{R}$ en fonction de f'_2, f'_3 et f'_4. Donner finalement l'application numérique de ce grandissement transversal.

Q11. **Deuxième configuration (b) : les lentilles (L_3) et (L_4) sont accolées en ayant pris soin de maintenir la distance $\overline{O_2O_4}$ identique à celle de la question précédente.**

Montrer que le nouveau grandissement transversal G_{tb} est relié à G_{ta} par une relation très simple que l'on précisera, et en faire l'application numérique.

Q12. En se replaçant en configuration (a) et en supposant les conditions de Gauss respectées, exprimer le grandissement angulaire $G_{aa} = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ en fonction de $f'_{2,3}$ et f'_4, avec α et α' les angles orientés des rayons incident et émergent définis par rapport à l'axe optique. Pour s'aider dans le calcul, faire un schéma où seront tracés deux rayons incidents, parallèles entre eux, l'un passant par le centre O_2 de la lentille équivalente, l'autre passant par le foyer objet équivalent $F_{2,3}$. Calculer G_{aa} puis le comparer à G_{ta}.

Reprendre le raisonnement pour la configuration (b), et déterminer G_{ab} le grandissement angulaire correspondant.

Q13. On place enfin derrière la lentille (L_4), la lentille (L_1) utilisée en **I.** .

(a) À quelle distance de (L_4) doit-on placer la pellicule photographique (ou la matrice CCD) pour obtenir une image nette d'un objet placé à l'infini ? La distance $\overline{O_4O_1}$ importe-t-elle ?

(b) Où doit-on placer la lentille (L_1) pour que l'encombrement du système lentilles pellicule / CCD soit le plus faible possible ?

(c) À l'aide de G_{aa} et G_{ab} (grandissement angulaire dans les configurations (a) et (b)), exprimer les dimensions $\overline{A_{i1}B_{i1}}$ de l'image formée sur la pellicule / CCD d'un objet placé à l'infini pour les configurations (a) et (b), et dont le rayon limite arrive sur la lentille (L_2) selon un angle de $\alpha = 5\,^\circ$ par rapport à l'axe optique de cette lentille. Calculer ces dimensions.

(d) Montrer que pour la configuration (a), on peut écrire $f'_a = f'_1 G_{aa}$, avec f'_a = distance focale image d'une lentille équivalente à l'ensemble formé des quatre lentilles. En déduire l'expression de f'_a, puis faire l'application numérique.

Même question pour la configuration (b).

(e) On appelle champ angulaire la portion conique de l'espace objet dont l'objectif photographique donne une image nette. Ce champ est exprimé par l'angle 2α du cône qui a pour sommet le centre O d'une lentille mince équivalente (voir figure 3 et raisonnement ci-dessus). Ce champ est limité par la plus grande dimension du détecteur d, c'est-à-dire la diagonale d'un format rectangulaire. Après avoir exprimé la relation entre α, d et la focale f' de l'objectif (celle de la lentille équivalente des questions précédentes, c'est-à-dire $f' = f'_a$ et $f' = f'_b$), calculer le champ angulaire pour les deux configurations de lentilles (a) et (b) susmentionnées pour un film de format $24\times$ 36 mm. Commenter la compatibilité des valeurs obtenues pour les champs angulaires avec les conditions dites de Gauss.

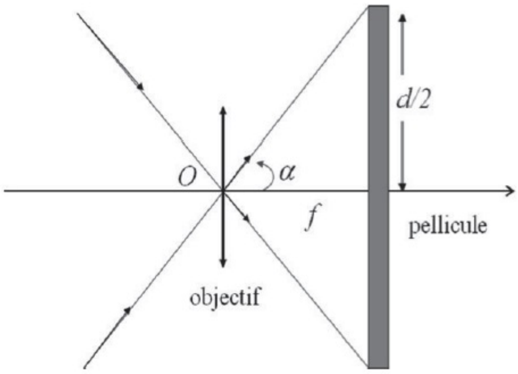

Figure 3 – Champ angulaire

Exercice 2 : Guirlandes de Noël ($\sim$ 40%)

On cherche à optimiser l'alimentation électrique d'un système comportant deux guirlandes électriques numérotées 1 et 2 et modélisées par des conducteurs ohmiques de résistances identiques $R_1 = R_2 = R$. La première guirlande est dédiée à un fonctionnement continu. La seconde est associée avec un interrupteur K en série qui bascule de manière périodique afin de produire un clignotement. On supposera que la puissance lumineuse fournie par ces guirlandes est proportionnelle à la puissance électrique qu'elles reçoivent.

On considère le circuit ci-dessous, alimenté par un générateur réel de f.e.m. E (avec $E > 0$) et de résistance interne r.

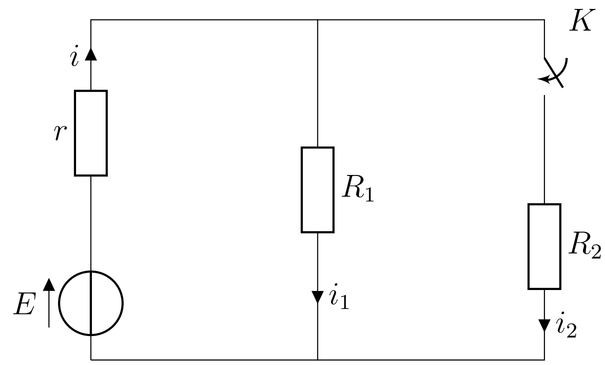

FIGURE 1 – Circuit électrique modélisant 2 guirlandes de Noël

Q1. Lorsque l'interrupteur K est ouvert, établir l'expression du courant i_{ouvert} en fonction de E , r et R. Puis, déterminer l'expression de la puissance électrique $P_{1\,\text{ouvert}}$ reçue par la guirlande R_1.
Quelle est dans cette configuration la puissance reçue $P_{2\,\text{ouvert}}$, reçue par la seconde guirlande R_2 ?

Q2. On considère maintenant le cas ou l'interrupteur K est fermé. Quelle est alors la nouvelle expression pour le courant $i_{\text{fermé}}$? En déduire les courants i_1 et i_2 circulant dans les deux guirlandes.

Q3. Quelles sont alors les puissances $P_{1\,\text{fermé}}$ et $P_{2\,\text{fermé}}$ reçues par les deux guirlandes ?

Q4. La puissance reçue par la première guirlande (celle qui ne doit pas clignoter) est-elle identique lors des deux régimes étudiés ? Interpréter ce résultat.

Q5. Comment doit-on choisir r par rapport à R pour limiter cet effet ? Cette condition est-elle vérifiée pour $r = 1\,\Omega$ et $R = 2\,\Omega$?

On cherche à optimiser le circuit représenté sur la figure 1 en ajoutant une bobine d'inductance L dans la branche de la guirlande 1. On rappelle que la guirlande 1 (modélisée par R_1) est dédiée à un fonctionnement continu alors que la guirlande 2 (modélisée par R_2), associée à un interrupteur K en série qui bascule de manière périodique, produit un clignotement.
L'interrupteur K est ouvert de manière périodique pour $t \in [0, \frac{T}{2}[$ et fermé pour $t \in [\frac{T}{2}, T[$.

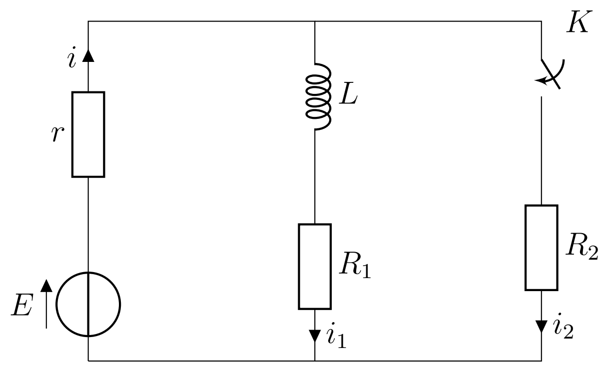

FIGURE 2 – Circuit électrique optimisé

Q6. Établir l'équation différentielle dont i_1 est solution sur l'intervalle $[0, \frac{T}{2}[$. On fera apparaitre un temps caractéristique τ_0.

Q7. Vérifier ensuite que l'ajout de la bobine ne va pas modifier la valeur du courant i en régime permanent (continu). Pour pouvoir comparer, on prendra comme valeur de référence (sans bobine) $i_{\text{ouvert}} = i_{1,\text{ouvert}} = \dfrac{E}{R+r}$.

Q8. On s'intéresse maintenant à l'intervalle $[\frac{T}{2}, T[$, lorsque l'interrupteur est fermé. Montrer que i_1 est alors solution de l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau_f} = \frac{E}{L\left(1+\dfrac{r}{R}\right)}$$

On donnera l'expression de τ_f en fonction de L, R et r.

Q9. Vérifier ensuite que l'ajout de la bobine ne va pas modifier la valeur du courant i_1 en régime permanent (continu). Pour pouvoir comparer, on prendra comme valeur de référence (sans bobine) $i_{1,\text{fermé}} = \dfrac{E}{R+2r}$.

Q10. On étudie ensuite expérimentalement les variations du courant i_1 en mesurant la tension aux bornes de la guirlande R_1 à l'aide d'un oscilloscope et on obtient le résultat suivant pour deux valeurs différentes de l'inductance L :

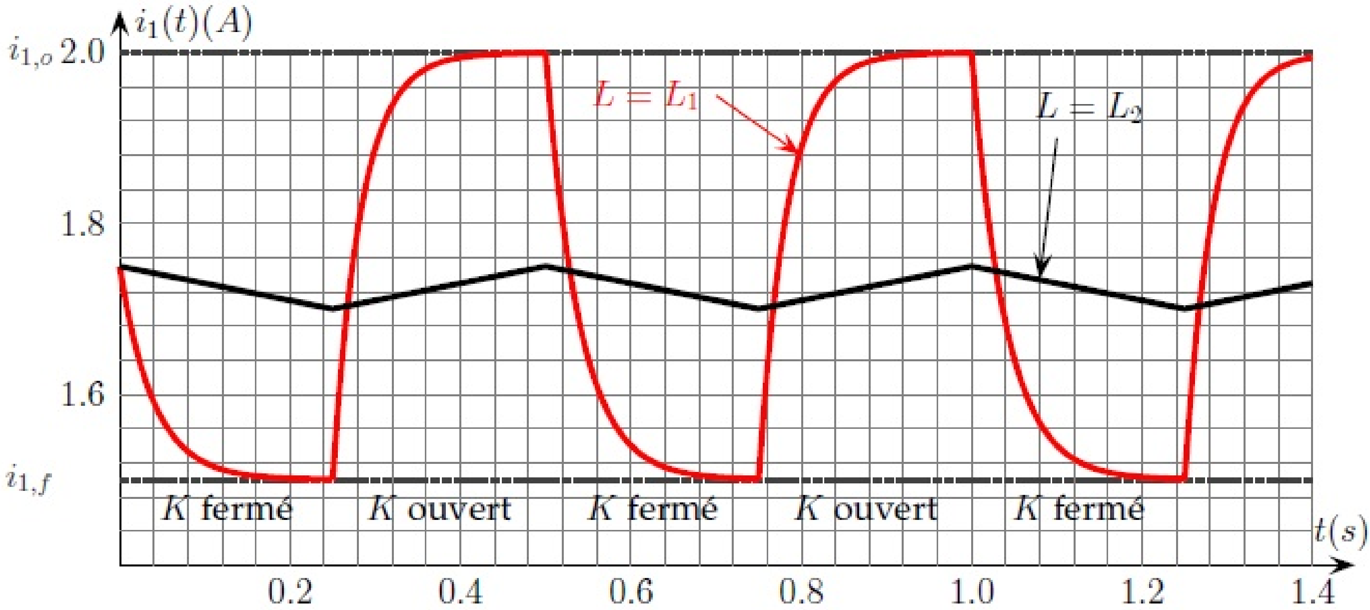

FIGURE 3 – Intensité du courant dans la branche de la guirlande 1 pour 2 valeurs d'inductance

Déterminer la valeur de L_1 à partir de l'étude graphique (on rappelle que $r = 1\,\Omega$ et $R = 2\,\Omega$) en expliquant votre démarche.

Q11. Justifiez ensuite qualitativement que $L_2 \gg L_1$ (sans chercher à déterminer la valeur de L_2), ainsi que l'allure de la courbe pour cette valeur L_2.

Q12. Quelle est la valeur de l'inductance à retenir parmi L_1 ou L_2 pour minimiser les variations du courant passant dans la première guirlande ? Justifier soigneusement votre réponse.

Exercice 3 : Saut à l'élastique ($\sim$ 30%)

Partie I. Caractéristiques d'un saut

On modélise une corde de saut à l'élastique de longueur au repos ℓ_0 de la manière suivante :

— sa masse est négligeable,

— elle exerce une force nulle tant qu'elle n'est pas tendue,

— c'est un ressort de raideur k quand sa longueur est supérieure à ℓ_0

Les mouvements considérés seront unidimensionnels, repérés par la coordonnée y selon la verticale descendante depuis le point d'attache de la corde (voir la figure 1). L'accélération de la pesanteur est notée g.

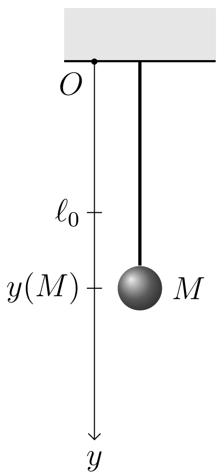

FIGURE 1 – Modélisation du saut à l'élastique

Données :
Longueur au repos : $\ell_0 = 40\,\mathrm{m}$;
Masse du sauteur $m = 80\,\mathrm{kg}$;
Accélération de la pesanteur $g = 9{,}80\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$

Q1. Quand le sauteur est suspendu immobile au bout de la corde, celle-ci est allongée de $\Delta\ell_{\text{éq}} = \ell_{\text{éq}} - \ell_0 = 55\,\mathrm{m}$. Déterminer l'expression puis la valeur de sa constante de raideur, notée k.

Q2. Le sauteur se laisse tomber avec une vitesse nulle du point d'attache de coordonnée $y = 0$. On limite l'étude à sa première descente. Tant que $y \leq \ell_0$, la vitesse du sauteur vérifie : $\dot{y} = \sqrt{2gy}$.

(a) Établir l'équation différentielle d'évolution de y pour $y > \ell_0$.

(b) Faire un choix judicieux pour l'origine des temps et en déduire deux conditions initiales.

(c) Résoudre l'équation différentielle obtenue en a).

(d) En déduire la hauteur minimale H à laquelle doit être accrochée la corde pour que le sauteur ne se blesse pas. On prendra $k = 14\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ pour l'application numérique.

(e) Déterminer également la valeur maximale de la vitesse au cours du mouvement ainsi que la valeur maximale de la force de tension exercée par la corde.

Partie II. Un jeu dangereux (sujet niveau 2)

Deux sauteurs de même masse m décident de se suspendre l'un à l'autre à l'aide de deux cordes identiques à la précédente selon la configuration représentée ci-contre. On suppose dans toute la suite que les sauteurs n'atteignent pas le sol et que les deux cordes sont toujours tendues. Le sauteur M_1 est attaché par une corde au support en $y = 0$, et au sauteur M_2 par une autre corde identique .

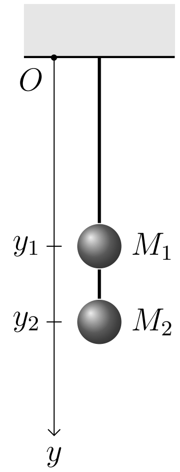

FIGURE 2 – Modélisation à deux sauteurs

Q3. Déterminer les deux positions y_1 et y_2 des deux sauteurs quand ils sont à l'équilibre. On les note $y_{1,\text{éq}}$ et $y_{2,\text{éq}}$.

Q4. On descend le sauteur M_2 d'une hauteur $\Delta\ell_i$ et on le maintient à cette position. Quand M_1 est immobile, on libère M_2.

(a) On définit les écarts aux positions d'équilibre $Y_1 = y_1 - y_{1,\text{éq}}$ et $Y_2 = y_2 - y_{2,\text{éq}}$. Établir les équations différentielles d'évolution temporelle de Y_1 et Y_2.

(b) Déterminer les expressions de Y_1 et Y_2 à l'instant où on lâche M_2 en fonction, entre autres, de$\Delta\ell_i$.

(c) On peut montrer qu'il existe des réels α_a et α_b tels que les fonctions :

$$X_a = Y_1 + \alpha_a Y_2 \qquad \text{et} \qquad X_b = Y_1 + \alpha_b Y_2$$

vérifient l'équation différentielle canonique d'un oscillateur harmonique, avec des pulsations qu'on note ω_a et ω_b :

$$\ddot{X}_a + \omega_a^2 X_a = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{X}_b + \omega_b^2 X_b = 0$$

Déterminer les expressions de X_a et X_b en fonction du temps et en déduire celles de Y_1 et Y_2.

Q5. On donne, avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$:

$$\frac{\omega_a^2}{\omega_0^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\omega_b^2}{\omega_0^2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Déterminer l'expression de $Y_2(t)$, puis celle de $y_2(t)$.