Devoir surveillé n° 3

Exercice 1 : Principe d'un accéléromètre ($\sim$ 35%)

Adapté du concours Centrale Supélec TSI 2020

On considère une voiture en mouvement selon l'axe horizontal Ox, de vecteur directeur $\overrightarrow{u_x}$.

Avant de commencer à freiner, la voiture est animée d'un mouvement rectiligne uniforme. Lors d'une phase de freinage, le référentiel lié à la voiture (noté $\mathcal{R}_V$ est animé de l'accélération $\overrightarrow{a}(\mathcal{R}_V/\mathcal{R}_T) = -a\,\overrightarrow{u_x}$ (avec $a > 0$) par rapport au référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Selon le schéma ci-dessous, m est susceptible de se déplacer par rapport à la voiture, horizontalement, sans frottement solide avec son support (support lié à la voiture). Le ressort a une constante de raideur k et une longueur à vide L_0.

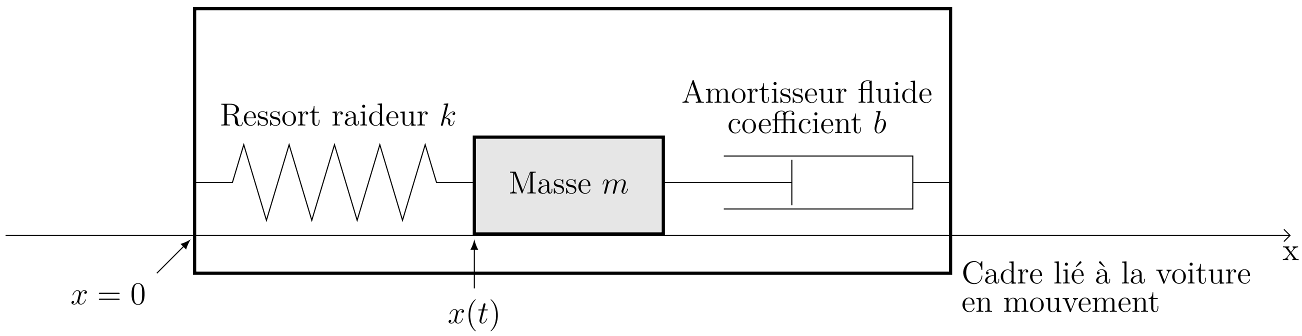


Figure 1

L'amortisseur exerce sur m une force de frottement fluide, d'expression : $\overrightarrow{f} = -b\,\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ représente la vitesse de la masse dans le référentiel lié à la voiture, et b est une constante ($b > 0$).

Q1. Le référentiel $\mathcal{R}_V$ lié à la voiture est-il galiléen ? Justifier.

Pour tenir compte de ce fait, on admet que, dans l'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}_V$, il est nécessaire d'introduire une force supplémentaire, nommée force d'inertie d'entraînement, d'expression :

$$\overrightarrow{f}_{\,\mathrm{ie}} = -\,m\,\overrightarrow{a}(\mathcal{R}_V/\mathcal{R}_T) = +\,m\,a\,\overrightarrow{u_x}$$

Q2. Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur la masse m, dans le référentiel $\mathcal{R}_V$ lié à la voiture.

Q3. Montrer que dans ce référentiel $\mathcal{R}_V$, l'équation différentielle du mouvement peut être mise sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 X = a$$

où on donnera l'expression de $X(t)$ en fonction de $x(t)$ et L_0, ainsi que les noms des paramètres ω_0 et Q et leurs expressions en fonction de m, k et b.

On suppose que la phase de freinage commence à $t = 0$. On note t_0 l'instant correspondant à l'arrêt complet de la voiture. On suppose qu'avant la phase de freinage, le ressort a une longueur égale à L_0.

Q4. Quelle est l'expression de $X(t)$ pour $t \leq 0$?

Q5. Que peut-on dire de la réponse du système en au bout d'un temps suffisamment long ? Donner l'expression correspondante de $X(t)$, en fonction de a et ω_0.

On fait l'hypothèse simplificatrice que lors d'un freinage, l'accélération de la voiture reste constante jusqu'à son arrêt complet, qui survient en $t = t_0$.

Q6. La voiture roule à vitesse constante $V = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. On suppose que la voiture s'arrête totalement après 2,5 s. Donner l'expression littérale de la norme de l'accélération moyenne durant la phase d'arrêt de la voiture, puis calculer sa valeur numérique en unité SI.

Pour les questions Q7 à Q11, on se place dans le cas où le facteur de qualité est égal à $\frac{1}{2}$.

Q7. Quel est le nom du régime de variation de $X(t)$ pour $Q = \frac{1}{2}$? Quelle est l'expression générale de la solution ? (on la fournira sans aucune démonstration)

Q8. Déterminer l'expression littérale complète de la solution $X(t)$ pour $t < t_0$. On prendra comme condition initiale sur la vitesse $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t = 0) = 0$ (vitesse initiale nulle dans $\mathcal{R}_V$).

Q9. Quel est l'ordre de grandeur du temps que met le système à parvenir à l'équilibre ?

Q10. Dès que la voiture est arrêtée ($t > t_0$), la force d'inertie d'entraînement n'est plus présente. En déduire l'expression de $X(t)$ pour $t > t_0$.

Q11. Tracer l'allure de $X(t)$ sur un graphe pour $0 < t < 2t_0$, en supposant que le régime permanent a le temps de s'établir entre $t = 0$ et t_0.

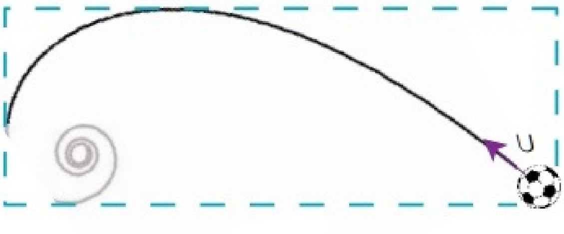
Pour les questions Q12 et Q13, on suppose que le système oscillant répond en régime pseudo-périodique.

Q12. **Démontrer** la condition sur Q pour obtenir une solution de type sinusoïdales amorties pour $X(t)$. Donner l'expression de la solution de l'équation différentielle homogène dans ce cas, en faisant apparaître le paramètre Ω, appelée pseudo-pulsation, dont on donnera l'expression en fonction de ω_0 et Q.

Q13. Quelle sera l'expression du temps caractéristique d'amortissement des oscillations ?
On suppose que $\omega_0 = 20\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Si le facteur de qualité vaut 10, que vaudra alors ce temps d'amortissement ? Cette configuration semble-t-elle pertinente pour la détection d'un choc brutal ?

Exercice 2 : Spirale logarithmique ($\sim$ 20%)

En mettant de l'effet au ballon, les footballeurs lui confèrent une trajectoire en forme de spirale. Cet exercice s'intéresse à ce type de trajectoire.



On repère la position d'un point M se déplaçant dans un plan par ses coordonnées polaires r et θ de pôle O. L'allure de la trajectoire pour θ variant de 0 à $2\,\pi$ est :

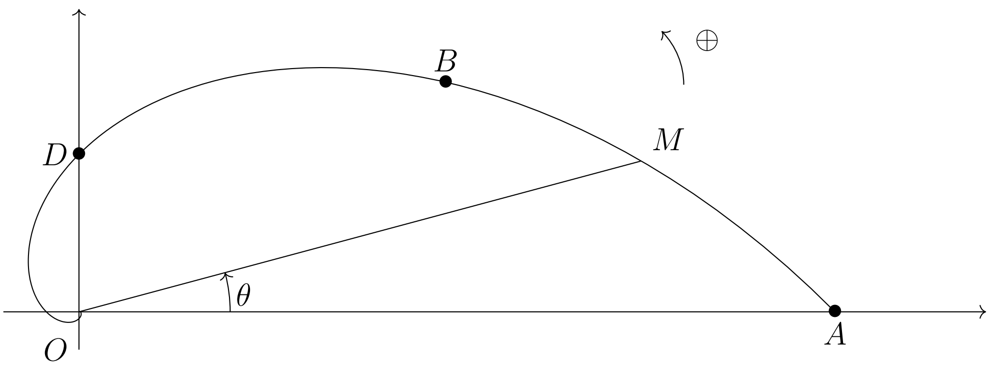


FIGURE 1

Il décrit une spirale logarithmique d'équation $r = a\,e^{-\theta}$ dans le sens des θ croissants, avec a constante positive.

Dans un premier temps, la loi horaire est $\theta = \omega\,t$ où la vitesse angulaire ω est une constante positive.

Q1. Dessiner, **sur l'annexe à rendre avec la copie**, les vecteurs de la base locale $(\overrightarrow{u_r}\,\overrightarrow{u_\theta})$ aux points A, B, D.

Q2. Exprimer dans cette base locale les vecteurs vitesse et accélération du point matériel, en fonction de a, ω et t.

Q3. Calculer la norme du vecteur vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?

Q4. Donner les composantes du vecteur vitesse aux points $A(\theta = 0)$ et $D(\theta = \pi/2)$ en fonction de a et ω, et celles du vecteur accélération aux mêmes points en fonction de a et ω^2.

Q5. En précisant l'échelle choisie pour $a\,\omega$ et $a\,\omega^2$, dessiner les vecteurs vitesse et accélération aux points A et D. Commenter.

Dans un deuxième temps le mouvement est uniforme de vitesse v_0.

Q6. Trouver la loi horaire vérifiée par θ en prenant $\theta = 0$ pour $t = 0$.

Exercice 3 : Physique au parc d'attraction : toboggan aquatique ($\sim$ 45%)

Adapté du concours Epita MPI 2023

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, cet exercice propose d'en étudier deux : le toboggan rectiligne, et celui avec un petit « tremplin » à la fin de la descente.

Partie I. Étude d'un toboggan rectiligne

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h, et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

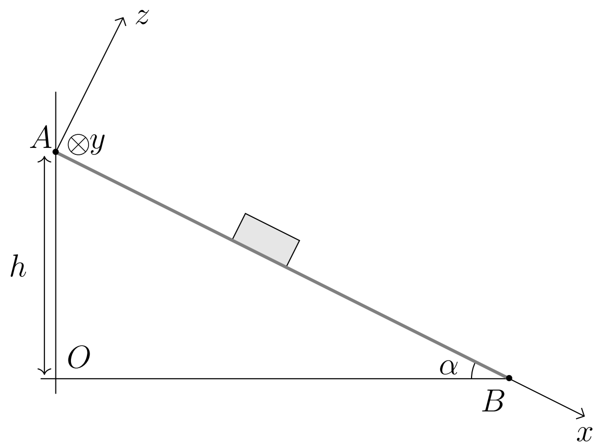


FIGURE 1 : À gauche : photographie du toboggan « le géant » du parc WaveIsland . Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France, $h = 33\,\mathrm{m}$ et $\alpha \approx 45\ ^\circ$. À droite : modélisation retenue pour l'étude.

Dans un premier temps on néglige tout frottement.

Q1. Établir l'expression de la vitesse atteinte v_B atteinte par le passager au point B, en fonction de h, g, puis sa valeur numérique en km·h^{-1}. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 1 (à droite), avec $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon $\overrightarrow{e_x}$ uniquement.

On prend maintenant en compte les frottements. La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit :

$$\overrightarrow{R} = N\overrightarrow{e_z} - T\overrightarrow{e_x}$$

où $T > 0$ représente les frottements. On utilise la loi de Coulomb du frottement solide : tout au long du mouvement, on a la relation : $T = \mu \times N$ avec μ une constante positive appelée coefficient de frottement. On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

Q2. Déterminer l'expression de N en fonction de m, g et α.

Q3. La direction du parc indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est $80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Déterminer la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan pour « le géant » de WaveIsland.

Q4. En déduire l'expression littérale de la valeur α minimale permettant à un passager d'arriver en bas d'un toboggan de forme similaire mais moins incliné, le coefficient de frottement passager-toboggan étant supposé égal à celui du toboggan « le géant ». Faire l'application numérique.

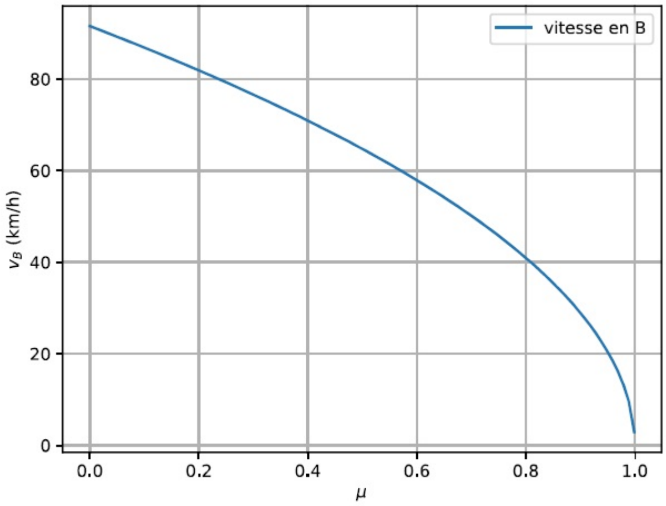


FIGURE 2 : Tracé de l'expression de v_B en fonction du coefficient de frottement μ pour le toboggan « le géant » de WaveIsland ($\alpha = 45\ ^\circ$).

Partie II. Étude d'un toboggan avec « tremplin »

On s'intéresse maintenant à un toboggan dont la sortie est constituée d'un petit « tremplin » (partie BC sur la figure 3).

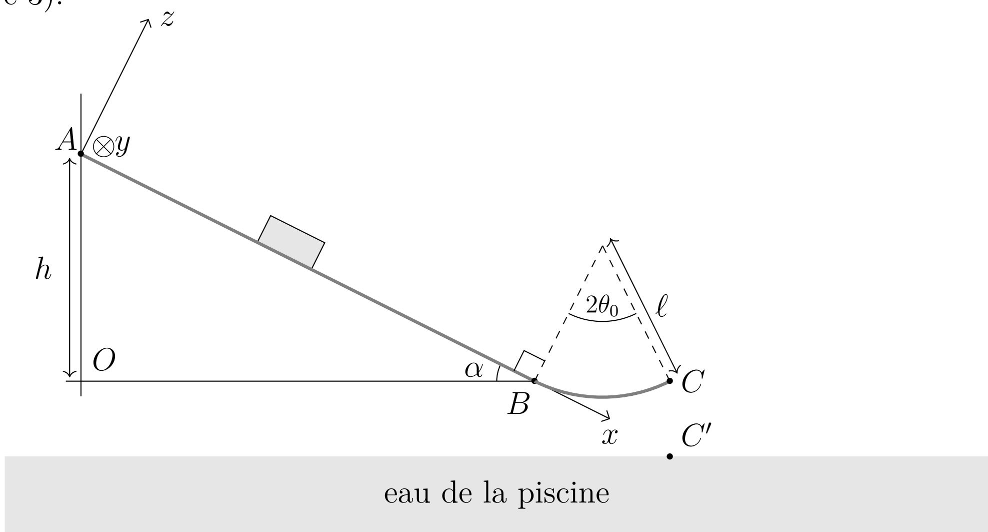


FIGURE 3 : Toboggan rectiligne avec une sortie en « tremplin ».

Q5. Établir la relation entre les angles α et θ_0.

1) Étude préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

Cette sous-partie est indépendante du reste.

On considère une masse m (point matériel M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon ℓ. Le mouvement a lieu dans le plan xOy de la figure 4. On néglige tout frottement. On note $\overrightarrow{g}$ le vecteur champ de pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 3, avec les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$.

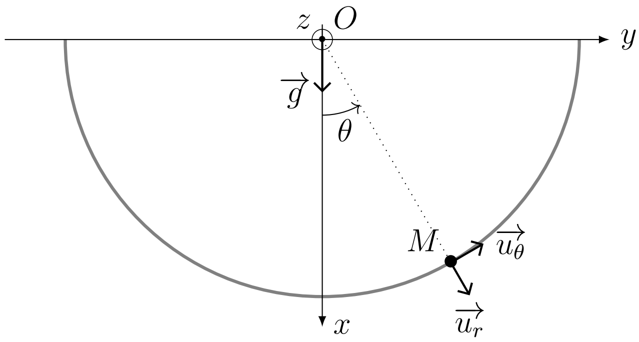


FIGURE 4 : Le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grisé), il n'y a pas de mouvement selon Oz.

Q6. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de $\theta(t)$.

Q7. Résoudre cette équation dans des conditions que l'on précisera. On supposera pour cette question qu'initialement $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

Q8. Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$, en faisant précisant les valeurs minimales et maximales atteintes ainsi que la période des oscillations.

2) Retour au cas du toboggan avec « tremplin »

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_B à l'entrée du « tremplin » de rayon ℓ (voir figure 3). Toute la descente s'effectue en absence de frottements.

Q9. Établir en appliquant le principe fondamental de la dynamique (et sans utiliser un raisonnement énergétique), l'expression de v_C en fonction de v_B.

Q10. La surface de l'eau est située 1,0 m en dessous de B et C. On appelle C' le point de la surface de l'eau de la piscine situé sous le point C. Établir à quelle distance d de C' le passager entrera dans l'eau. On négligera la poussée d'Archimède et les frottements dans l'air. Faire l'application numérique avec $\alpha = 45\,^\circ$. Si la réponse à la question Q1 n'avait pas été trouvée, on prendra $v_B = 25{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.