

## Devoir surveillé n° 4

### Données pour l'ensemble du DS

Masse d'un électron :  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Charge d'un électron :  $e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Pour  $\alpha \ll 1 \text{ rad}$  on a  $\cos \alpha \approx 1$  et  $\sin \alpha \approx \alpha$

Pour  $x \ll 1$  on a  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$

### Exercice 1 : Molécule d'ammoniac $\text{NH}_3$ ( $\sim 25\%$ )

Dans un modèle simplifié de la molécule d'ammoniac  $\text{NH}_3$ , les trois atomes d'hydrogène H forment la base d'une pyramide dont l'azote N de masse  $m$  occupe le sommet. Les trois atomes d'hydrogène sont fixes dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen  $\mathcal{R}$ , associé au repère cartésien  $\mathcal{R}(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

Les trois atomes d'hydrogène définissent le plan  $(Oxy)$ . L'atome d'azote est en mouvement suivant l'axe  $(O; \vec{u}_z)$  perpendiculaire au plan des atomes d'hydrogène. Il peut passer de part et d'autre de ce plan et sa cote est notée  $z$ .

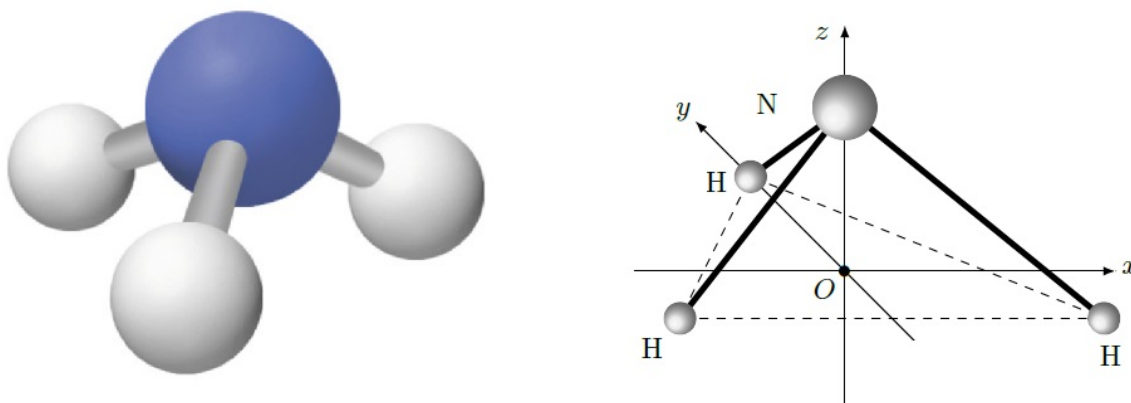


FIGURE 1 : Géométrie de la molécule d'ammoniac

Le champ de pesanteur est négligeable pour décrire cette structure atomique et la résultante des forces électromagnétiques qui s'exercent sur l'atome d'azote N supposé ponctuel est :  $\vec{F} = -\beta z(z^2 - \alpha^2)\vec{u}_z$ . Les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont positives.

- Q1. Justifier que la force définie précédemment est une force conservative. Établir l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  dont la force  $\vec{F}$  dérive. On prendra l'origine de l'énergie potentielle en  $z = 0$ , c'est-à-dire que la constante apparaissant lors de la détermination de l'énergie potentielle est déterminée de sorte que  $\mathcal{E}_p(z = 0) = 0$ .
- Q2. Représenter graphiquement  $\mathcal{E}_p$  lorsque  $z$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .
- Q3. Définir la condition générale de stabilité d'un équilibre et déterminer les positions d'équilibres stables et instables de l'atome d'azote.
- Q4. On considère un atome d'azote initialement au repos dans une position d'équilibre stable. Il reçoit du milieu extérieur une énergie  $\Delta\mathcal{E}$  telle que  $0 < \Delta\mathcal{E} < \frac{1}{4}\beta\alpha^4$ .  
Montrer graphiquement que l'atome d'azote va alors osciller entre deux valeurs limites  $z_1$  et  $z_2$ .
- Q5. Donner l'approximation au deuxième ordre de l'énergie potentielle autour d'une position d'équilibre stable. On utilisera la formule de Taylor-Young :  $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$ .
- Q6. Si la réponse à la question Q5. n'a pas été trouvée, on pourra admettre qu'au voisinage de  $z = \alpha$  :  
$$\mathcal{E}_p(z) \approx -\frac{\beta\alpha^4}{4} + \beta\alpha^2(z - \alpha)^2$$
  
En déduire l'expression de l'énergie mécanique autour d'une position d'équilibre stable.
- Q7. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par  $z$  au voisinage d'une position d'équilibre stable.  
Quelle est la nature de cette équation différentielle ? Exprimer la période des petites oscillations en fonction de  $m$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .
- Q8. Que se passe-t-il si l'énergie reçue par l'atome d'azote initialement au repos est supérieure à  $\frac{1}{4}\beta\alpha^4$  ?

## Exercice 2 : Focalisation d'un faisceau d'électrons ( $\sim 50\%$ )

Les parties I et II sont indépendantes.

### Partie I. Dans un oscilloscope cathodique (adapté du concours Banque PT 2000)

Cette partie présente le dispositif constitué de grilles utilisé pour focaliser le faisceau d'électrons dans un oscilloscope cathodique.

Une cathode chauffée, notée  $C$ , émet des électrons dont on peut négliger la vitesse initiale. Ces électrons se déplacent dans le vide jusqu'à rencontrer une anode, notée  $A$ , plaque métallique percée d'un trou permettant à une partie du faisceau d'électrons de s'échapper dans la direction horizontale  $Oz$ . On néglige le poids des électrons dans tout le problème.

On établit entre  $A$  et  $C$ , une différence de potentiel  $U_{AC} = 200 \text{ V}$ .

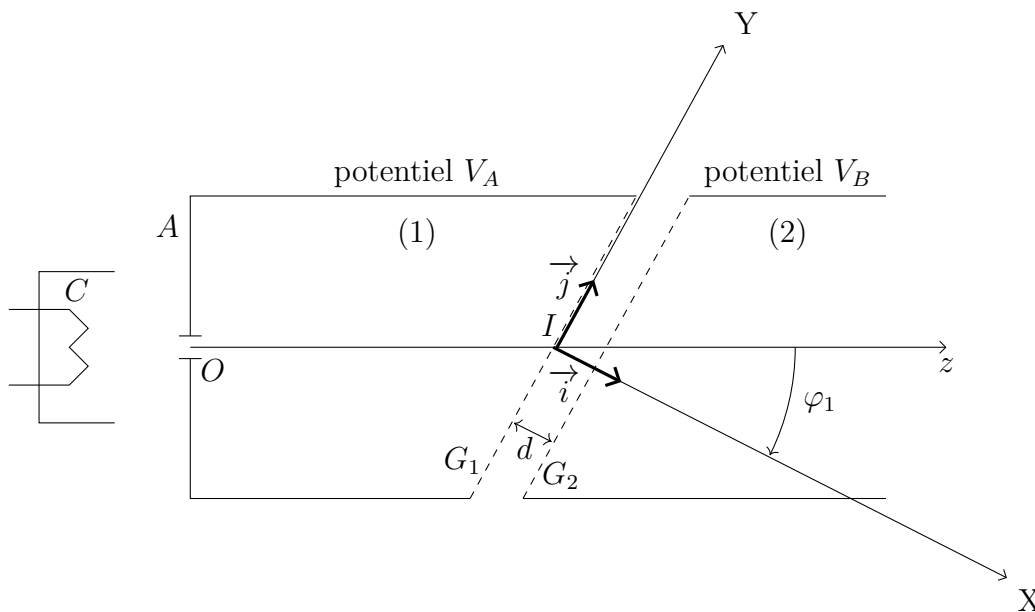


FIGURE 1 : Dispositif permettant la focalisation du faisceau d'électrons, situé en amont des plaques de déviation (non représentées ici) dans un oscilloscope cathodique

Q1. Déterminer l'expression de la valeur de la vitesse avec laquelle les électrons traversent l'anode en  $O$ , que l'on notera  $v_0$ , en fonction de  $U_{AC}$  et des constantes. Faire l'application numérique.

Le faisceau d'électrons issus de  $O$ , accéléré entre  $C$  et  $A$ , traverse au point  $I$  une grille  $G_1$  connectée à l'anode  $A$  et dont le potentiel est  $V_A$ . L'espace entre l'anode  $A$  et la grille  $G_1$  est noté (1) ; il est vide. La normale à la grille  $G_1$  forme avec l'axe  $Oz$  un angle  $\varphi_1$ . Une seconde grille  $G_2$  parallèle à la première, à la distance  $d$  de celle-ci, est portée au potentiel  $V_B$ . On rapporte le mouvement des électrons aux axes  $IX$  et  $IY$  de vecteurs unitaires respectifs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . La géométrie du système est représentée en figure 1. L'origine des temps est tel que l'électron étudié est en  $I$  à l'instant  $t = 0$ .

- Q2. La région (1) étant une cavité dans un conducteur en équilibre (c'est intérieur d'un cylindre métallique connecté avec  $G_1$ ), le champ électrique est nul dans l'espace (1). En déduire la vitesse  $\vec{v}_1$ , des électrons au point  $I$ , on l'exprimera dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .
- Q3. Déterminer l'expression du champ électrique entre les grilles  $G_1$  et  $G_2$  en fonction de la différence de potentiels  $U_{AB} = V_A - V_B$ , de la distance  $d$  et des vecteurs  $\vec{i}$  et/ou  $\vec{j}$  de la base.
- Q4. En déduire l'expression de la force électrostatique subie par un électron entre les grilles.
- Q5. Par application du principe fondamental de la dynamique, déterminer l'expression de la vitesse d'un électron entre les grilles. On l'exprimera en fonction du temps, de  $U_{AB}$ , de la distance  $d$ , des constantes et du vecteur  $\vec{v}_1$ .
- Q6. En déduire l'expression du vecteur position d'un électron entre les grilles, noté  $\vec{IM}$ . Écrire ses coordonnées, notées  $(X, Y)$ , dans le repère  $(I, \vec{i}, \vec{j})$  en fonction des constantes, de  $U_{AB}$ , de  $d$ , du temps, de  $v_0$  et de  $\varphi_1$ .
- Q7. Établir l'expression de l'équation cartésienne de la trajectoire définie par  $X = f(Y)$ .
- Q8. Soit un point  $M'$  de coordonnées  $(X', Y)$  appartenant à l'axe  $Iz$ , son ordonnée  $Y$  étant la même que celle du point  $M$ . Donner la relation entre  $X'$  et  $Y$  en fonction de  $\varphi_1$ .
- Q9. Définir la position de l'électron par rapport au point  $M'$  en fonction du signe de  $U_{AB}$ . On exprimera la différence  $X - X'$  en fonction des constantes, de  $d$ , de  $U_{AB}$ , de  $v_0$ , de  $\varphi_1$  et de  $Y$ .
- Q10. Représenter sur un schéma la trajectoire de l'électron et les points  $M$  et  $M'$  pour les deux cas  $U_{AB} < 0$  et  $U_{AB} > 0$  (légèrer clairement les deux cas).
- Q11. Établir le module de la vitesse  $v_2$  de l'électron au niveau de la grille  $G_2$ , en fonction des constantes, de  $U_{AB}$  et de  $v_0$ . Dépend-il de la distance  $d$ ?
- Q12. Soit  $\varphi_2$  l'angle que fait le vecteur vitesse de l'électron avec l'axe  $(IX)$  à la sortie de la grille  $G_2$ . Démontrer qu'entre les deux grilles le produit scalaire  $\vec{v} \cdot \vec{j}$  est constant.
- Q13. En déduire une relation entre  $\varphi_1, \varphi_2, v_1$  (norme de la vitesse de l'électron au niveau de la grille  $G_1$ ) et  $v_2$  (norme de la vitesse de l'électron au niveau de la grille  $G_2$ ).
- Q14. La région (2) située au delà de la grille  $G_2$  est aussi une cavité dans un conducteur en équilibre (un cylindre métallique connecté avec  $G_2$ ) donc le champ électrique est nul dans la région (2). Quelle est la trajectoire de l'électron dans cette région (2)? Justifier la réponse.
- Q15. Les deux grilles  $G_1$  et  $G_2$  sont très proches et on néglige la distance  $d$ . On donne  $\varphi_1 = 45^\circ$ . Représenter sur un schéma la trajectoire du faisceau d'électrons pour les deux cas suivants :  $U_{AB} = 80 \text{ V}$  et  $U_{AB} = -120 \text{ V}$ .
- Q16. Montrer que la déviation de l'électron à la traversée du système de grilles présente une analogie avec l'optique géométrique. Donner, dans les deux cas  $U_{AB} = 80 \text{ V}$  et  $U_{AB} = -120 \text{ V}$ , le rapport des « indices de réfraction » des 2 régions, que l'on notera  $n = \frac{n_2}{n_1}$ .
- Q17. Dire en quoi le système de grilles peut être utile pour la focalisation du faisceau d'électrons.

## Partie II. Dans un condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est constitué de deux armatures métalliques cylindriques, de même axe ( $Oz$ ) et de rayons respectifs  $a$  et  $b$ , avec  $a < b$  (voir figure 2).

Ces armatures sont portées aux potentiels respectifs  $V_a$  et  $V_b$  avec  $V_a > V_b$  et on admet que le champ électrostatique régnant dans l'espace entre les armatures est donné par :

$$\vec{E} = -\frac{A}{r}\vec{u}_r \quad \text{avec} \quad A = \frac{V_b - V_a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $Oz$ .

Des électrons pénètrent dans la fente fine  $F_1$  avec  $OF_1 = r_0$  avec une vitesse initiale  $v_0$  supposée normale à ( $Oz$ ). On applique en outre un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ .

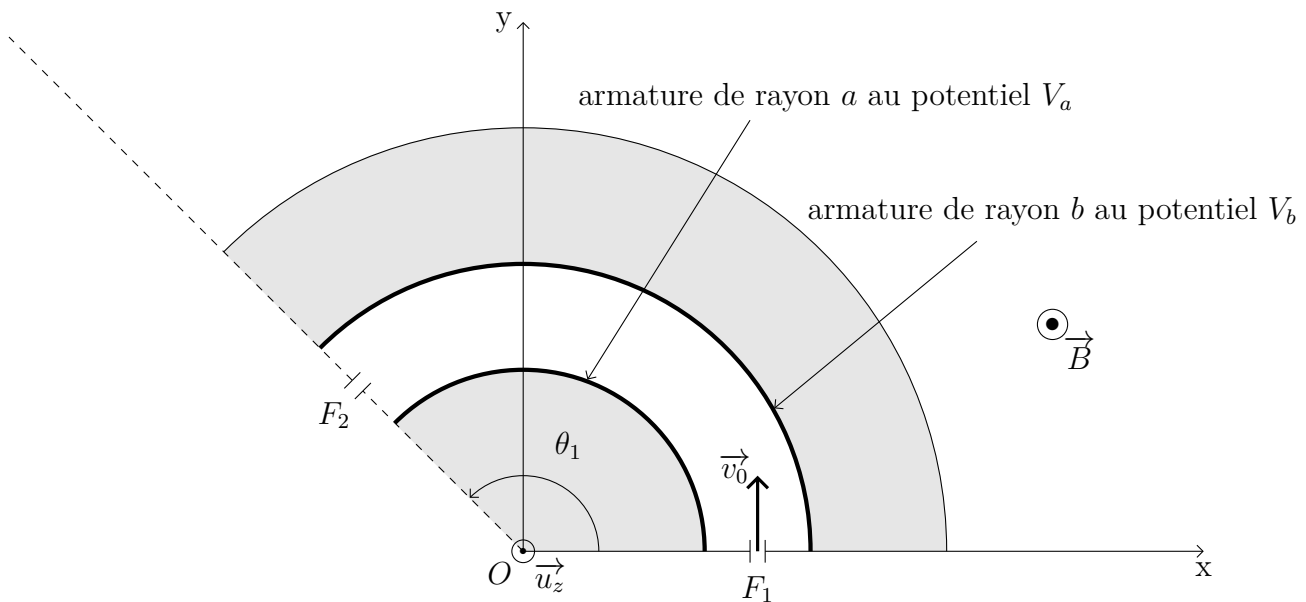


FIGURE 2 : Dispositif de focalisation d'un faisceau d'électrons dans un condensateur cylindrique

Valeurs numériques :  $a = 3,00 \text{ cm}$  ;  $b = 4,00 \text{ cm}$  ;  $\|\vec{B}\| = 3,00 \times 10^{-3} \text{ T}$

- Q1. On suppose d'abord  $\vec{v}_0 \cdot \overrightarrow{OF_1} = 0$  (vitesse orthoradiale). Montrer que la trajectoire des électrons est circulaire dans le condensateur si  $A$ ,  $r_0$ ,  $v_0$  et  $B$  sont liés par :

$$A = B r_0 v_0 - \frac{m}{e} v_0^2$$

- Q2. Montrer qu'il existe une valeur optimale de  $A$  telle que la relation obtenue à la question Q1. soit approximativement satisfaite, même si la norme de la vitesse initiale présente une faible dispersion autour de la valeur  $v_0$ .
- Q3. On suppose maintenant que les vecteurs vitesses initiales des électrons (de norme  $v_0$ ) font un petit angle  $\alpha$  avec la normale à  $OF_1$  en  $F_1$ . Montrer que le choix  $\theta_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  en radians, permet néanmoins de focaliser les électrons dans la fente de sortie en  $F_2$ .
- Q4. En déduire une méthode de détermination de  $\frac{e}{m}$ . Pour quelle valeur de  $V_b - V_a$  obtient-on une intensité maximale dans un détecteur placé derrière la fente  $F_2$ ? Pour faire l'application numérique, on prendra  $r_0 = \frac{a+b}{2}$ .

### Exercice 3 : Miroir de Lloyd ( $\sim 25\%$ )

Le dispositif interférentiel, représenté sur la figure 1 est appelé miroir de Lloyd. Une source ponctuelle  $S$ , située à une distance  $OS = h$  du plan d'un miroir plan de longueur  $AB = \ell$ , émet dans toutes les directions une onde monochromatique de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$ .

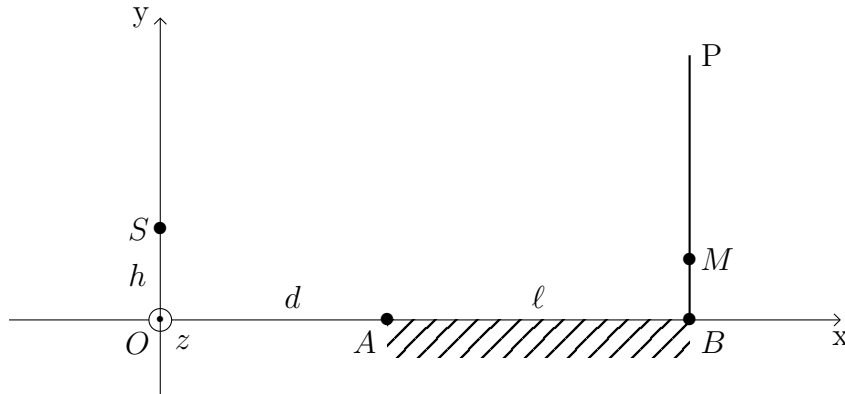


FIGURE 1 : Dispositif du miroir de Lloyd

La distance  $OA = d$  est telle que  $h \ll d$ .

On place un repère  $(x, y, z)$  centré sur  $O$ . On donne les coordonnées des différents points :

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} d + \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} d + \ell \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On observe sur l'écran  $P$  une figure d'interférences à deux ondes : l'une provenant directement (sans réflexion) de  $S$  et l'autre issue de  $S$  et réfléchi par le miroir.

Données :  $\ell = 24 \text{ cm}$ ,  $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ ,  $d = 1,0 \text{ cm}$ , et l'indice optique de l'air est pris égal à 1.

- Q1. Donner les coordonnées de  $S_0$ , image de  $S$  à travers le miroir. En déduire que ce dispositif est équivalent au montage des trous d'Young.
- Q2. Construire les deux rayons (issus de  $S$  et  $S_0$ ) qui interfèrent au point  $M$  du plan  $P$ .
- Q3. Déterminer l'expression de la différence de marche  $\delta(y, z)$  entre le rayon réfléchi et le rayon direct en tout point de l'écran, en fonction des caractéristiques géométriques et optiques du système. Devrait-on avoir une interférence constructive ou destructive au niveau du point  $B$ ?
- Q4. Rappeler la formule de l'amplitude  $S'_m$  de l'onde résultant de la somme de deux ondes de même amplitude  $S_m$ .
- Q5. Déterminer l'intensité lumineuse (ou éclairement), notée  $I(y, z)$  en tout point de l'écran, sachant qu'elle est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde lumineuse en ce point, on notera  $k$  le coefficient de proportionnalité.
- Q6. Déterminer l'expression de l'interfrange  $i$ .

L'interfrange étant trop faible, on réalise avec un dispositif approprié, une image agrandie 5 fois du champ d'interférence. On obtient la figure suivante (après agrandissement) :

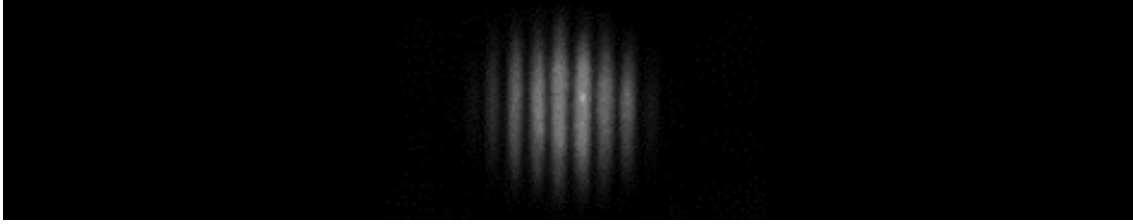


FIGURE 2 : Observation agrandie de la figure d'interférences obtenue sur l'écran  $P$

- Q7. Reproduire qualitativement la figure 2 et indiquer la direction des axes  $(By)$  et  $(Bz)$ .
- Q8. Mesurer l'interfrange  $i$  à l'aide d'une règle graduée et estimer l'incertitude-type  $u(i)$  sur votre mesure. Bien expliquer la démarche.
- Q9. L'interfrange mesuré par un capteur CCD (sur l'image agrandie) vaut  $i_0 = 1,497$  mm et  $u(i_0) = 0,013$  mm. Cette mesure est-elle compatible avec la vôtre ?
- Q10. Exprimer puis calculer la distance  $h$  à l'aide de la valeur de  $i_0$  indiquée à la question précédente.
- Q11. Combien de franges peut-on espérer voir avec ce dispositif ?
- Q12. On n'observe cependant pas autant des franges (voir figure 2). Expliquer pourquoi et en déduire la taille du diaphragme placé devant la source  $S$ .

En réalité, la figure d'interférence observée expérimentalement est la même que celle prédit à la question Q4., mais décalé d'une demi interfrange. Pour expliquer cela, on admet qu'une réflexion sur un miroir s'accompagne toujours d'un déphasage de  $\varphi$ .

- Q13. A-t-on, dans ce cas, une interférence constructive ou destructive au niveau du point  $B$  ? Que vaut  $\varphi$ , le déphasage engendré par un miroir ?