

## Devoir surveillé n° 4

Formulaire :  $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$   
 $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos(2a)$   
 $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

### Exercice 1 : Trompette (~ 30%)

#### Partie I. Protection des trompettistes par contrôle actif

Les musiciens d'orchestre sont très exposés aux bruits de niveaux sonores élevés, qui génèrent des pertes auditives précoces et irréversibles. Parmi eux les cuivres, dont la trompette, sont exposés à des niveaux au delà des limites réglementaires parfois pendant plus de 8h par jour. Un des moyens de protection est l'utilisation de casques ou de bouchons. Cette partie présente un procédé utilisé dans certains dispositifs de protections auditives : le contrôle actif du bruit.



FIGURE 1 – Exposition au bruit des musiciens d'orchestre de musique classique, source INRS (Institut National de Recherche et de Sécurité)

La méthode du contrôle actif du bruit consiste à émettre une onde sonore qui, superposée à l'onde sonore du bruit, l'annule par interférence destructive.

- Q1. Question préliminaire :** On considère deux ondes progressives sinusoïdales de même pulsation :  $s_1 = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $s_2 = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$  où  $S_1$  et  $S_2$  sont les amplitudes et  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les phases à l'origine des temps de  $s_1$  et  $s_2$ . On s'intéresse au signal  $s$  obtenu en faisant la somme de  $s_1$  et  $s_2$  :  $s = S \cos(\omega t + \varphi_S)$ .

- (a) Établir en utilisant la représentation de Fresnel (ou la notation complexe, telle que  $s_1 = \text{Re}(s_1)$  avec  $s_1 = S_1 e^{j\omega t + \varphi_1}$ , etc.) que l'expression de l'amplitude  $S$  du signal  $s$  en fonction des amplitudes  $S_1$  et  $S_2$  et du déphasage  $\Delta\varphi$  du signal  $s_2$  par rapport au signal  $s_1$  est :

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \cos \Delta\varphi}$$

- (b) Justifier alors que  $S$  est minimale à condition que les signaux  $s_1$  et  $s_2$  soient en opposition de phase.

On considère la conduite d'un casque antibruit actif dans laquelle est capté un bruit extérieur. Afin d'éliminer cette nuisance sonore, le système est constitué d'un microphone qui capte le bruit et qui envoie un signal électrique vers un dispositif électronique appelé contrôleur. Le contrôleur traite en temps réel l'information provenant du micro afin de piloter un haut-parleur qui émet une onde qui interfère destructivement au point  $M$  avec le bruit incident. L'onde sonore en aval du point  $M$  est alors de très petite amplitude : le bruit a été réduit. La célérité des ondes sonores dans la conduite est :  $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

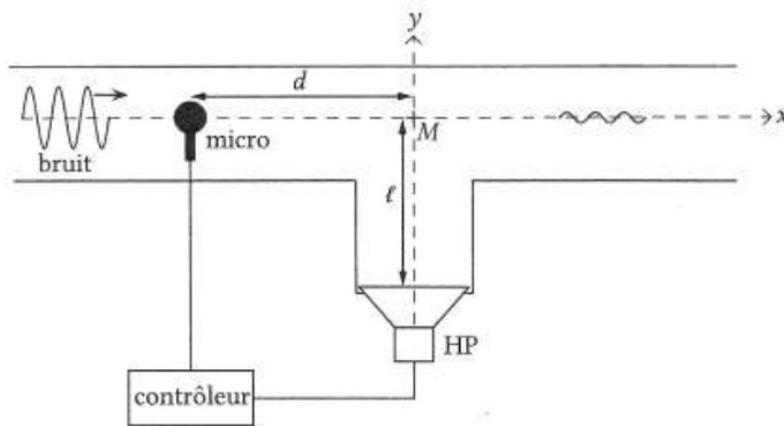


FIGURE 2 – Constitution d'un dispositif antibruit actif

- Q2. En négligeant les temps de propagation dans les câbles, déterminer numériquement l'intervalle de temps  $\Delta t$  dont dispose le contrôleur pour traiter l'information venant du micro. On prendra  $d = 5,0 \text{ cm}$  et  $\ell = 1,0 \text{ cm}$  (voir figure 2).

On suppose que le bruit est une onde progressive sinusoïdale suivant l'axe  $(Mx)$ , de fréquence  $f$ . Le haut-parleur émet, quand à lui, une onde progressive sinusoïdale suivant l'axe  $(My)$ .

- Q3. Quelles sont les conditions pour qu'il y ait interférence en  $M$  ?
- Q4. Donner l'expression en  $M$  de la pression acoustique  $p_1(d, t)$  associée au bruit en prenant l'origine de l'axe  $x$  au niveau du micro. On notera  $P_1$  son amplitude. La phase à l'origine des temps au niveau du micro est  $\varphi_{10}$ .
- Q5. Donner l'expression en  $M$  de la pression acoustique  $p_2(\ell, t)$  associée à l'onde sonore émise par le haut-parleur. On prendra l'origine de l'axe  $y$  au niveau du haut-parleur. On notera  $P_2$  son amplitude. La phase à l'origine des temps au niveau du haut-parleur est  $\varphi_{20}$ .
- Q6. En faisant apparaître un entier  $m$ , exprimer le déphasage  $\Delta\varphi$  de  $p_2(\ell, t)$  par rapport à  $p_1(d, t)$  pour que l'interférence soit destructive en  $M$ .  
Exprimer ensuite  $(\varphi_{20} - \varphi_{10})$  en fonction de  $d$ ,  $\ell$ ,  $f$ ,  $c$  et  $m$ .
- Q7. Dans le cas où  $m = 0$ , exprimer  $(\varphi_{20} - \varphi_{10})$  en fonction de  $d$ ,  $\ell$ ,  $f$  et  $c$ . Calculer pour  $m = 0$  la valeur numérique de  $(\varphi_{20} - \varphi_{10})$  que doit appliquer le contrôleur pour avoir une interférence destructive en  $M$ . On prendra :  $f = 100 \text{ Hz}$ . On donnera la valeur en radians et la valeur en degrés.

## Partie II. Son produit par une trompette

Une trompette est un instrument à vent de la famille des cuivres. Le son y est produit par la vibration des lèvres du trompettiste au niveau de l'embouchure, qui génère une onde acoustique au sein de l'instrument. La trompette peut être modélisée comme un tuyau sonore rectiligne de longueur totale  $L = 1,40$  m, fermé au niveau de l'embouchure et ouvert au niveau du pavillon.

On introduit un axe  $x$  tel que l'embouchure se trouve en  $x = 0$  et le pavillon en  $x = L$ .

- Q8. On modélise l'onde de pression  $P_i(x, t)$  générée par le trompettiste par une onde progressive harmonique d'amplitude  $P_0$ , de pulsation  $\omega$ , et de phase initiale  $\varphi_i$  en  $x = 0$ . Écrire son expression mathématique.
- Q9. Lorsqu'elle atteint le pavillon, cette onde se réfléchit en conservant la même amplitude. Écrire l'expression mathématique de cette onde réfléchie,  $P_r(x, t)$ , en notant  $\varphi_r$  sa phase initiale en  $x = 0$ .
- Q10. Écrire l'expression de l'onde totale dans la trompette sous la forme :

$$P_{\text{tot}}(x, t) = A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$$

en exprimant  $A$ ,  $k$ ,  $\psi$  et  $\varphi$  en fonction des paramètres déjà introduits. On qualifie de « stationnaire » une telle onde.

Les conditions aux limites (tuyau fermé-ouvert) imposent un ventre de pression (= amplitude de la pression maximale) au niveau de l'embouchure ( $x = 0$ ) et un nœud (= amplitude de la pression minimale) au niveau du pavillon ( $x = L$ ). Les notes jouables à la trompette correspondent aux modes propres du tuyau sonore.

- Q11. En s'appuyant sur une représentation graphique de l'onde, montrer que les longueurs d'onde  $\lambda_n$  des modes propres sont telles que :

$$L = \frac{\lambda_n}{4} + n \frac{\lambda_n}{2} \quad (\text{relation } \textcircled{1})$$

En déduire la fréquence fondamentale (correspondant à  $n = 0$ ) de la trompette.

- Q12. On se propose de retrouver le résultat précédent (relation  $\textcircled{1}$ ) par le calcul.
- En utilisant la condition aux limites à l'embouchure, montrer que  $\psi = 0$  convient.
  - Déduire de la seconde condition aux limites que  $k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi$  avec  $n$  un entier.
  - Retrouver enfin la condition sur la longueur d'onde.
- Q13. Lorsque le trompettiste appuie sur un piston, l'air est dévié dans la coulisse correspondante, ce qui a pour effet de modifier la longueur du tuyau. Le son est « abaissé de trois demi-tons », ce qui signifie que la fréquence fondamentale est divisée par  $2^{3/12}$ . En déduire la longueur de la coulisse du troisième piston.

## Exercice 2 : La guitare ( $\sim 35\%$ )

Exercice adapté d'un sujet ENS (2<sup>e</sup> concours)

### Partie I. Justesse des sons produits

On modélise une corde de guitare comme une corde homogène de masse linéique (masse par unité de longueur de corde)  $\mu$ , initialement au repos et confondu avec un axe ( $Ox$ ). On suppose que cette corde est inextensible, tendue par une tension  $T$  uniforme et constante. La corde est fixée à ses deux extrémités d'abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ . Les mouvements transversaux de la corde dans le plan  $xOy$  sont décrits par l'élongation transverse  $u(x, t)$  autour de la position d'équilibre (= hauteur de la corde par rapport à l'horizontale en  $x$  à l'instant  $t$ ), solution de l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{A} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Q1. Analyse dimensionnelle :

- Déterminer la dimension de  $A$ .
- Montrer que  $A$  est homogène à une grandeur que l'on pourra mettre sous la forme  $A = kT^a \mu^b$ .
- Déterminer les constantes  $a$  et  $b$ . On supposera par la suite que  $k = 1$ .
- $A$  quoi est homogène  $\sqrt{A}$  ?

On appelle modes propres les solutions de l'équation de d'Alembert qui vérifient les conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = L$ . Le mode propre numéro  $n$  :

$$u_n(x, t) = u_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

où  $u_0$  est une constante et  $c$  la vitesse de propagation, est établi le long de la corde comprise entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ .

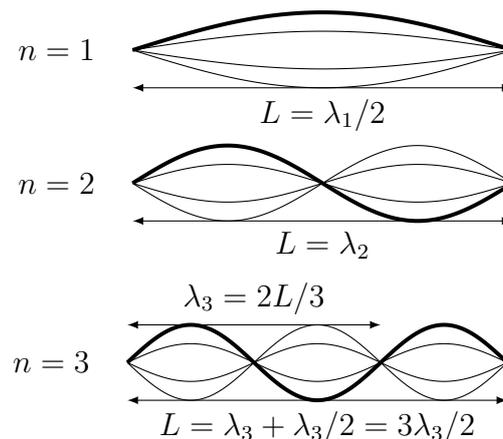


FIGURE 3 – Premiers modes propres sur une corde fixée à ses extrémités

Q2. Vérifier que  $c = \sqrt{A}$ .

La corde la plus aigüe d'une guitare classique a pour une guitare d'adulte une longueur  $L = 0,642$  m. La masse linéique de cette corde est de  $6,1 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ . Le son de cette corde à vide (= fréquence du 1<sup>er</sup> mode propre) a une fréquence  $f = 329,5$  Hz (note mi).

- Q3. Quelle est la tension qu'il faut appliquer à la corde pour qu'elle soit accordée ?
- Q4. Ou doit-on placer sa main pour émettre un son décalé d'un octave (= de fréquence double) ?
- Q5. Une oreille est sensible à une différence de fréquence de 20 Hz, quel est l'écart maximal à cette tension nominale que l'on peut s'autoriser pour ne pas entendre que la guitare est désaccordée ?

## Partie II. Étude énergétique d'une corde

On se place toujours dans le cas des ondes stationnaires définies dans la partie I et on considère le mode d'indice  $n$ . La pesanteur sera négligée dans cette étude, l'énergie potentielle de pesanteur sera donc prise constante et nulle.

- Q6. Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un élément de corde compris entre les points d'abscisses  $x$  et  $x + dx$ .
- Q7. Montrer que l'énergie cinétique totale de la corde peut se mettre sous la forme :

$$Ec = C_n \cos^2(\omega_n t)$$

et donner l'expression de  $C_n$  fonction de  $n$ ,  $T$ ,  $L$  et  $u_0$ .

La corde possède aussi une énergie potentielle  $E_p$  liée à sa déformation. On admet que l'énergie  $E_p$  entre  $x$  et  $x + dx$  est de la forme :

$$dE_p = \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx$$

où  $\alpha$  est une constante homogène à une force.

- Q8. Déterminer l'énergie potentielle totale de la corde.
- Q9. En utilisant la conservation de l'énergie, déduire l'expression de  $\alpha$  en fonction de la vitesse de propagation de l'onde  $c$  et de la masse linéique  $\mu$ .
- Q10. Donner l'expression de  $E_m$  l'énergie mécanique totale de la corde. Comment dépend-elle du mode considéré ?
- Q11. Calculer  $dE_m$  l'énergie mécanique de la portion de corde située entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Expliquer pourquoi elle dépend du temps, contrairement à l'énergie mécanique totale de la corde  $E_m$ .

## Exercice 3 : Application de l'effet Hall sur les orgues modernes ( $\sim 35\%$ )

Exercice adapté d'un Centrale Supélec (TSI) et CCINP (TPC)

Descendant de la flûte de Pan, l'orgue a été inventé en « mécanisant » celle-ci il y a environ vingt-trois siècles. C'est au Moyen Âge que l'évolution technologique est importante, grâce à de nouvelles inventions comme :

- l'abrégié : un système mécanique permettant de jouer avec les doigts des mains ou avec les pieds, alors que la largeur de l'instrument est bien supérieure.
- la multiplication des claviers : manuels et pédalier.
- la registration pour programmer des familles de tuyaux que l'on veut faire entendre.
- le « buffet » pour protéger l'orgue de la poussière ou le cacher, dont la disparition pour des raisons économiques et esthétiques au début du XX<sup>e</sup> siècle, mit en évidence les propriétés acoustiques.

Au XIX<sup>e</sup> siècle, la facture d'orgue est marquée par le romantisme et la volonté de créer un instrument voisin des principes de l'orchestre. Cette mutation est rendue possible grâce à l'amélioration de l'alimentation en vent des tuyaux, et l'assistance pneumatique ou électrique de la transmission, système mécanique plus ou moins sophistiqué qui permet de commander la mise en marche sonore du tuyau via le clavier.

Ainsi l'orgue est à la croisée de l'art musical et de la physique, et la facture d'orgues d'aujourd'hui n'est pas étrangère aux technologies les plus avancées.

L'organiste est toujours préoccupé par le « toucher », il cherche à se faire plaisir en essayant de maîtriser la création du son. Pour cela, des capteurs ont été mis au point pour permettre de mieux apprécier l'enfoncement et la vitesse de la touche. Ils reposent sur un phénomène physique appelé l'effet Hall, qui est l'objet de cet exercice.

### Partie I. Étude préliminaire : mécanisme de la conduction électrique

Avant d'aborder l'effet Hall, cette partie traite la physique du mécanisme de conduction électrique.

On considère une plaque conductrice parallélépipédique de largeur  $a$ , d'épaisseur  $b$  et de longueur  $L$  traversée par un courant d'intensité  $I > 0$  uniformément réparti sur sa surface  $S = a \times b$ .

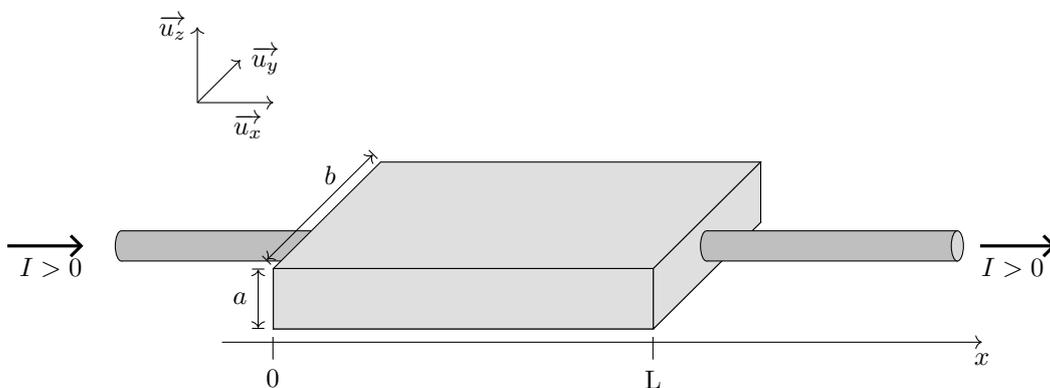


FIGURE 1 – Plaque conductrice.

Dans cette partie I, on considère qu'il n'y a qu'un seul type de porteurs de charge : des électrons de masse  $m$  et de charge  $-e$  (= on exclut l'influence de tout autre type de porteurs de charge participant

à la conduction), on note  $n_e$  leur densité volumique (= le nombre d'électrons par unité de volume).

On suppose que ces électrons ne sont pas relativistes et se déplacent à la même vitesse  $\vec{v}_e$  dirigé dans la direction de  $\vec{u}_x$ . Ils sont soumis à l'action d'un champ électrique  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$  responsable de leur mise en mouvement. On modélise les interactions des électrons mobiles avec le milieu lors de leur déplacement par une force de frottement fluide  $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$ , avec  $\alpha$  un coefficient caractéristique du milieu. On néglige le poids des particules devant les autres forces.

Q1. Que signifie l'expression « non relativiste » pour les électrons ?

Q2. Montrer que l'intensité du courant s'écrit :  $I = n_e e v_e a b$ .

Q3. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $\vec{v}$  d'un électron s'écrit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

où on donnera l'expression de  $\tau$ , qui représente le temps caractéristique entre deux chocs d'électrons sur le milieu.

## Partie II. Approche qualitative de l'effet Hall

Dans cette partie, on étudiera deux types de porteurs de charge : des électrons et des porteurs de charge positive.

Q4. Si les porteurs de charge sont des électrons de charge  $q = -e$ , quel est le sens de  $\vec{v}$  ?

Q5. Même question si les charges des porteurs sont positives  $q = +e$ .

On place le volume dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_y$  (où  $B_0 > 0$ ) supposé uniforme à l'échelle de l'échantillon.

Q6. Rappeler l'expression de  $\vec{F}_m$ , la partie magnétique de la force de Lorentz, s'exerçant sur une particule de charge  $q$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  et plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$ .

Q7. Calculer la puissance de cette force et commenter le résultat obtenu.

Q8. En considérant la direction et le sens de la force exercée par le champ magnétique sur un porteur de charge, expliquer en quelques mots pourquoi on voit apparaître une tension entre les faces d'équations  $z = 0$  et  $z = a$  du parallélépipède.

Q9. Faire deux schémas (en coupe dans un plan orthogonal à  $\vec{u}_y$  tel que  $\vec{u}_y$  « sort » de la feuille) indiquant le signe des charges apparaissant sur chaque face :

- un schéma dans le cas où  $q = -e$
- un schéma dans le cas où  $q = +e$

Q10. Expliquer en pratique comment on peut simplement vérifier le signe des porteurs de charge avec un voltmètre.

### Partie III. Approche quantitative de l'effet Hall, cas des électrons porteurs

On se place dans le cas où les charges mobiles sont des électrons, donc  $q = -e$ . On notera  $n_e$  leur densité volumique et  $\vec{v}_e$  leur vitesse.

On suppose qu'après un régime transitoire au cours duquel des charges ont commencé à s'accumuler sur l'une des faces, on atteint un régime permanent où la quantité de charges accumulées sur les faces ne varie plus, donnant lieu à la création d'un champ électrique de Hall uniforme entre les faces noté  $\vec{E}_H$  selon  $\vec{u}_z$ .

Par ailleurs les porteurs de charges mobiles ont repris leur mouvement d'ensemble à la vitesse  $\vec{v}_e$  uniforme et constante suivant  $(Ox)$ , l'intensité du courant électrique est toujours  $I$ .

- Q11. En utilisant la partie II, expliquer quel est le sens de  $\vec{E}_H$ .
- Q12. Établir, en s'intéressant au mouvement d'un porteur de charge, la relation  $\vec{E}_H = -\vec{v}_e \wedge \vec{B}$ .
- Q13. En projetant suivant  $(Oz)$  la relation précédente, donner l'expression de  $E_H$  en fonction de  $B_0$  et  $v_e$ ; puis en fonction de  $B_0$ ,  $e$ ,  $n_e$ ,  $I$  et des dimensions du conducteur.
- Q14. On admet que  $U_H = V(z = a) - V(z = 0) = - \int_{z=0}^{z=a} \vec{E}_H \cdot \vec{dl}$ . Exprimer  $U_H$ , la tension de Hall.

### Partie IV. Approche quantitative de l'effet Hall, cas des porteurs positifs

Dans le cas de semi-conducteurs « dopés N », les porteurs majoritaires sont des électrons de charge  $-e$ . Mais dans le cas de semi-conducteurs « dopés P », les porteurs majoritaires sont des « trous » de charge  $+e$  et de densité volumique notée  $n_p$ . On notera leur vitesse  $\vec{v}_p$ .

- Q15. Reprendre les calculs précédents pour établir la nouvelle expression de  $U_H$  dans le cas d'un semi-conducteur dopé P en justifiant **soigneusement** les calculs.

### Partie V. Applications numériques

- Q16. Dans le cas d'un conducteur comme le cuivre, les seuls porteurs sont des électrons. On suppose que dans le cristal chaque atome de cuivre libère un électron de conduction. En utilisant les données du tableau 1, calculer la tension de Hall  $U_H$ . Commenter la valeur obtenue.

Masse molaire atomique du cuivre	$M_{\text{Cu}} = 63,5 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
Masse volumique du cuivre	$\mu_{\text{Cu}} = 8,9 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_a = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Champ magnétique	$B_0 = 0,1 \text{ T}$
Dimensions du conducteur	$a = 5,5 \text{ mm}, L = b = 0,2 \text{ mm}$
Intensité du courant	$I = 0,1 \text{ A}$

TABLEAU 1 – Données numériques

- Q17. Reprendre le calcul pour un semi-conducteur, comme le germanium, dopé N de sorte que  $n_e = 7 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$ . Conclure.