DS 4.

Exercice 1

Q1. Pour montrer qu'une force est conservative, il faut établir :

$$W_{AB}(\vec{F}) = -\Delta E_p = -(E_p(B) - E_p(A))$$

(ou $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$).

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\vec{dOM}$$

$$= \int_A^B -\beta z(z^2-\alpha^2)\vec{u_z}.(dx\vec{u_x} + dy\vec{u_y} + dz\vec{u_z})$$

$$= \int_A^B -\beta z(z^2-\alpha^2)\,dz$$

$$= \int_A^B (-\beta z^3 + \beta\alpha^2 z)\,dz$$

$$= \left[-\beta\frac{z^4}{4} + \beta\alpha^2\frac{z^2}{2}\right]_A^B$$

$$= \left(-\beta\frac{z_B^4}{4} + \beta\alpha^2\frac{z_B^2}{2}\right) - \left(-\beta\frac{z_A^4}{4} + \beta\alpha^2\frac{z_A^2}{2}\right)$$

$$= -\left[\left(\beta\frac{z_B^4}{4} - \beta\alpha^2\frac{z_B^2}{2}\right) - \left(\beta\frac{z_A^4}{4} - \beta\alpha^2\frac{z_A^2}{2}\right)\right]$$

En posant $E_p(z) = \beta\frac{z^4}{4} - \beta\alpha^2\frac{z^2}{2} + \text{cte}$

on a bien $W_{AB}(\vec{F}) = -\Delta_{AB}(E_p)$

Détermination de la constante : d'après l'énoncé $E_p(z=0) = 0$ $\Rightarrow$ la constante est nulle.

D'où $\boxed{E_p(z) = \beta\frac{z^4}{4} - \beta\alpha^2\frac{z^2}{2}}$

Rq : Comme $F(z)\,dz = -dE_p(z)$

$$F(z) = -\frac{dE_p}{dz}$$

Q2. Il faut étudier les limites et les variations de la fonction $E_p(z)$.

* $\lim_{z\to-\infty} E_p(z) = +\infty$

* $\lim_{z\to+\infty} E_p(z) = +\infty$

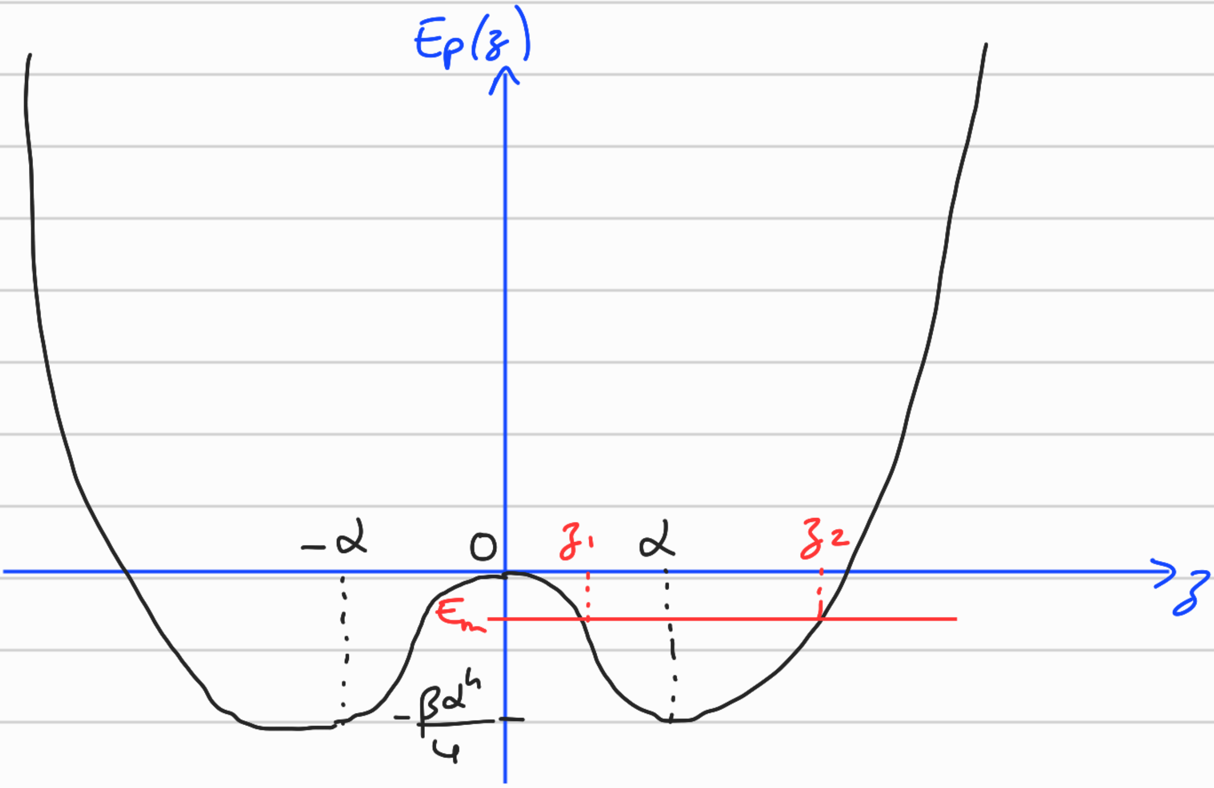
$$\frac{dE_p}{dz} = \beta z^3 - \beta\alpha^2 z = \beta z(z^2-\alpha^2) \quad \left(= -F(z)\right)$$

$$\frac{dE_p}{dz} = 0 \iff z = 0 \quad \text{ou} \quad z = \pm\alpha$$

Tableau de variations de E_p :

z	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		$+\infty$
βz		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$z^2-\alpha^2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
dE_p/dz		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$E_p(z)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\beta\alpha^4}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\beta\alpha^4}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$E_p(\pm\alpha) = \beta\frac{\alpha^4}{4} - \beta\alpha^2\frac{\alpha^2}{2} = -\beta\frac{\alpha^4}{4}$$



Q3. Définition d'1 position d'équilibre :
z_e est une position d'équilibre si lorsqu'un système est placé en cette position sans vitesse initiale il y reste.

* Equilibre stable : une position d'équilibre est dite stable si lorsqu'on en écarte légèrement le système celui-ci revient à cette position. (une force l'y ramène).
On le repère par un minimum local de Ep. $\left(\frac{dE_p}{dz} = 0 \text{ et } \frac{d^2E_p}{dz^2} > 0\right)$
$\Rightarrow$ 2 positions d'équilibre stable : $z = \pm\alpha$

* Equilibre instable : une position d'équilibre est dite instable si lorsqu'on en écarte légèrement le système celui-ci s'en éloigne définitivement
On le repère par un maximum local de Ep. $\left(\frac{dE_p}{dz} = 0 \text{ et } \frac{d^2E_p}{dz^2} < 0\right)$
$\Rightarrow$ 1 position d'équilibre instable ($z = 0$)

Q4. L'atome N initialement au repos à sa position d'équilibre stable possède l'énergie mécanique $E_{m,i} = E_p(\pm\alpha) + \underbrace{E_c}_{=0}$

car au repos.

$\Rightarrow E_{m,i} = -\frac{\beta\alpha^4}{4}$

S'il reçoit l'énergie ΔE de l'extérieur son énergie mécanique devient $E_m = -\frac{\beta \alpha^4}{4} + \Delta E$ avec $0 < \Delta E < \beta \frac{\alpha^4}{4}$ donc $-\frac{\beta\alpha^4}{4} < E_m < 0$

Or il n'est soumis qu'à une force conservative, donc son énergie mécanique va ensuite se conserver : $E_m = cte$.

De plus comme $E_m = E_p + E_c$ avec $E_c > 0$, les positions accessibles à l'atome sont celles qui vérifient $E_p < E_m$.

Graphiquement les positions d'équilibre sont comprises entre z_1 et z_2

Q5. On se place au voisinage de $z = \pm \alpha$

La formule de Taylor Young donne :

$$E_p(z) = E_p(\alpha) + \left.\frac{dE_p}{dz}\right|_{z=\alpha}(z-\alpha) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2E_p}{dz^2}\right|_{z=\alpha}(z-\alpha)^2$$

avec $E_p(\alpha) = -\beta \frac{\alpha^4}{4}$

$$\frac{dE_p}{dz} = \beta z^3 - \beta \alpha^2 z$$

$$\left.\frac{dE_p}{dz}\right|_{z=\pm\alpha} = \beta\alpha^3 - \beta\alpha^3 = 0 \quad \left(= F(\alpha) \text{ nulle car position d'éq.}\right)$$

$$\frac{d^2 E_p}{dz^2} = 3\beta z^2 - \beta\alpha^2$$

$$\left.\frac{d^2 E_p}{dz^2}\right|_{z=\pm\alpha} = 3\beta\alpha^2 - \beta\alpha^2 = 2\beta\alpha^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p(z) = -\beta\frac{\alpha^4}{4} + \beta\alpha^2(z-\alpha)^2}$$

Q6. $E_m = E_c + E_p$

Au voisinage d'une position d'équilibre

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \beta\frac{\alpha^4}{4} + \beta\alpha^2(z-\alpha)^2}$$

Q7. L'atome d'azote n'est soumis qu'à une force conservative donc son énergie mécanique se conserve : $E_m = cte$

On a donc $\frac{dE_m}{dt} = 0$

Soit $m\ddot{z}\dot{z} + 2\beta\alpha^2(z-\alpha)\dot{z} = 0$

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{2\beta\alpha^2}{m}(z-\alpha) = 0}$$

On reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \alpha\sqrt{\frac{2\beta}{m}}$.

La période des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable vaut $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\boxed{T_0 = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{\beta}}}$$

Q8. Si l'énergie ΔE reçue par l'atome N est supérieure à $\frac{\beta\alpha^4}{4}$ alors E_m devient positive.
L'atome d'azote va osciller autour du plan $z = 0$ entre 2 positions z_1' et z_2' situées de par et d'autre du plan médian.

Exercice 2. Partie 1

Q1 D'après le TEC appliqué à l'électron entre la cathode et O :

$$\Delta E_c = W(\vec{F_{el}}) = \int -e.\vec{E}.\vec{dOM}$$

Or $\vec{E} = -\dfrac{V_A - V_C}{L}\vec{u_z} = -\dfrac{U_{AC}}{L}\vec{u_z}$

avec L = distance entre C et O

et $\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$ car on néglige la vitesse initiale.

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \int \frac{eU_{AC}}{L}\vec{u_z}.(dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y} + dz\,\vec{u_z})$$

$$= \frac{eU_{AC}}{L}\int dz = eU_{AC}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2eU_{AC}}{m}}}$$

AN : $v_0 = \sqrt{\dfrac{2.1{,}6.10^{-19}.200}{9{,}1.10^{-31}}} = \underline{8{,}39.10^{6}\ m.s^{-1}}$

Q2 Entre O et I les électrons ne sont soumis à aucune force, donc d'après le principe d'inertie, ils sont en mouvement rectiligne uniforme :

$\vec{v_1} = \vec{v_0} = v_0\,\vec{u_z}$

Or $\vec{u_3} = \cos\varphi_1 \vec{i} + \sin\varphi_1 \vec{j}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v_1} = v_0 \cos\varphi_1 \vec{i} + v_0 \sin\varphi_1 \vec{j}} \quad (\text{et } v_1 = v_0)$$

Q3. Les grilles G_1 et G_2 constituent un condensateur plan. Le champ électrique est donc orthogonal à ces grilles, donc selon $\vec{i}$.

Et sa norme vaut $\|\vec{E'}\| = \left|\frac{U_{AB}}{d}\right|$

$\vec{E'}$ est dirigé du potentiel élevé vers le potentiel bas donc

$$\boxed{\vec{E'} = \frac{U_{AB}}{d} \vec{i}}$$

Q4. $\vec{F_{el}} = -e\vec{E'} \Rightarrow \boxed{\vec{F_{el}} = -\frac{eU_{AB}}{d} \vec{i}}$

Q5. D'après le PFD appliqué à l'électron dans R_T galiléen, on a :

$$m_e \vec{a} = -\frac{eU_{AB}}{d} \vec{i}$$

Par intégration :

$$\boxed{\vec{v}(t) = -\frac{eU_{AB}}{md} t \vec{i} + \vec{v_1}}$$

Q6. Par intégration :

$$\vec{In} = -\frac{1}{2}\frac{eU_{AB}}{md}t^2\,\vec{\imath} + \vec{v_1}\,t$$

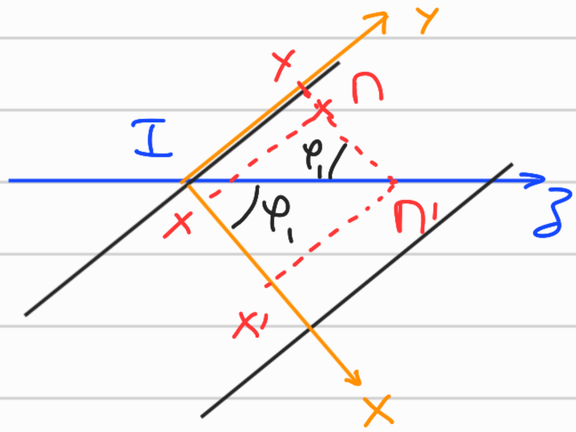
Soit
$$\boxed{\begin{aligned} X &= -\frac{1}{2}\frac{eU_{AB}}{md}t^2 + v_0\cos\varphi_1\,t \\ Y &= v_0\sin\varphi_1\,t \end{aligned}}$$

Q7 En éliminant t, il vient :

$$X = -\frac{1}{2}\frac{eU_{AB}}{md}\left(\frac{Y}{v_0\sin\varphi_1}\right)^2 + v_1\cos\varphi_1\cdot\frac{Y}{v_0\sin\varphi_1}$$

$$\boxed{X = -\frac{1}{2}\frac{eU_{AB}}{md\,v_0^2\sin^2\varphi_1}Y^2 + \frac{1}{\tan\varphi_1}Y}$$

Q8
$$\frac{Y}{In'} = \sin\varphi_1$$



$$\frac{X'}{In'} = \cos\varphi_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Y}{X'} = \tan\varphi_1}$$

Q9. $$X - X' = -\frac{1}{2}\frac{eU_{AB}}{mdv_0^2\sin^2\varphi_1}Y^2 + \frac{Y}{\tan\varphi_1} - \frac{Y}{\tan\varphi_1}$$

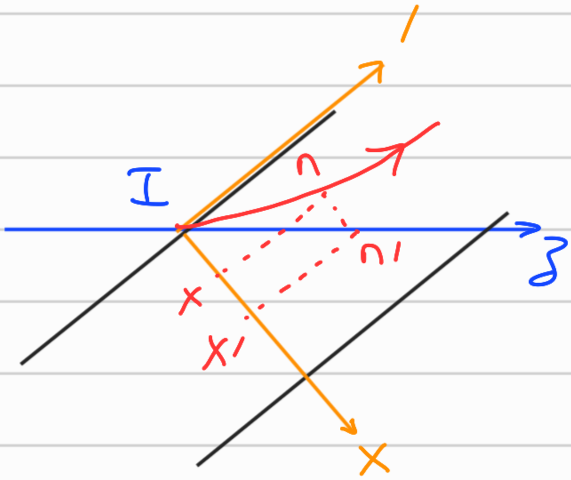
$$X - X' = -\frac{1}{2}\frac{eU_{AB}}{mdv_0^2\sin^2\varphi_1}Y^2$$

donc $X - X'$ est du signe de $-U_{AB}$:

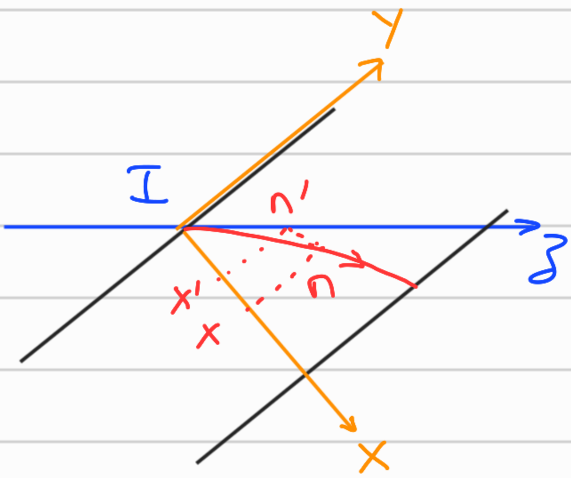
$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Si} & U_{AB} > 0 & X < X' \\ \text{si} & U_{AB} > 0 & X > X' \end{array}}$$

Q10

$U_{AB} > 0$



$U_{AB} < 0$



Q11 Au niveau de la grille G2 $x = d$

d'où $d = -\frac{1}{2}\frac{eU_{AB}}{md}t^2 + v_0 \cos\varphi_1 t$

Et $\|\vec{v_2}\|^2 = v_x^2 + v_y^2$

$$v_2^2 = \left(-\frac{eU_{AB}}{md}t + v_0\cos\varphi_1\right)^2 + \left(v_0 \sin\varphi_1\right)^2$$

$$v_2^2 = \left(\frac{eU_{AB}}{md}\right)^2 t^2 - 2\frac{eU_{AB}}{md} t v_0 \cos\varphi_1 + v_0^2$$

$$v_2^2 - v_0^2 = -\frac{2eU_{AB}}{md}\underbrace{\left(-\frac{eU_{AB}}{2md}t^2 + v_0\cos\varphi_1 t\right)}_{=d}$$

$$v_2^2 - v_0^2 = -\frac{2eU_{AB}}{m}$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{v_0^2 - \frac{2eU_{AB}}{m}}}$$

v_2 est indépendant de d.

Q12 Entre les 2 grilles

$\vec{v}(t).\vec{j} = \left(-\frac{eU_{AB}}{md}t\,\vec{i} + \vec{v_1}\right).\vec{j} = v_0 \sin\varphi_1 = cte$

Q13 Le produit $\vec{v}.\vec{j}$ étant constant, on a :

$$\underbrace{\vec{v}_1 \cdot \vec{j}}_{\text{au niveau de G1}} = \underbrace{\vec{v}_2 \cdot \vec{j}}_{\text{au niveau de G2}}$$

Or $\varphi_1 = \text{angle}(\vec{v}_1, (1X))$

$\varphi_2 = \text{angle}(\vec{v}_2, (1X))$

d'où $\left.\begin{array}{l}\vec{v}_1 \cdot \vec{j} = v_1 \sin\varphi_1 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{j} = v_2 \sin\varphi_2\end{array}\right\}$ $\boxed{v_1 \sin\varphi_1 = v_2 \sin\varphi_2}$

Q14. Dans la zone (2) l'électron n'est soumis à aucune force ($\vec{E}$ nul) donc d'après le principe d'inertie son mouvement est rectiligne uniforme.

Q15 $v_2 = \sqrt{v_0^2 - \frac{2eU_{AB}}{m}}$

or $v_0^2 = \frac{2eU_{AC}}{m} \Rightarrow \frac{2e}{m} = \frac{v_0^2}{U_{AC}}$

$\Rightarrow v_2 = v_0\sqrt{1 - \frac{U_{AB}}{U_{AC}}} = v_1\sqrt{1 - \frac{U_{AB}}{U_{AC}}}$

or $\sin\varphi_2 = \frac{v_1}{v_2}\sin\varphi_1$

$\Rightarrow \boxed{\sin\varphi_2 = \frac{\sin\varphi_1}{\sqrt{1 - U_{AB}/U_{AC}}}}$

AN pour $u_{AB} = 80\ V$

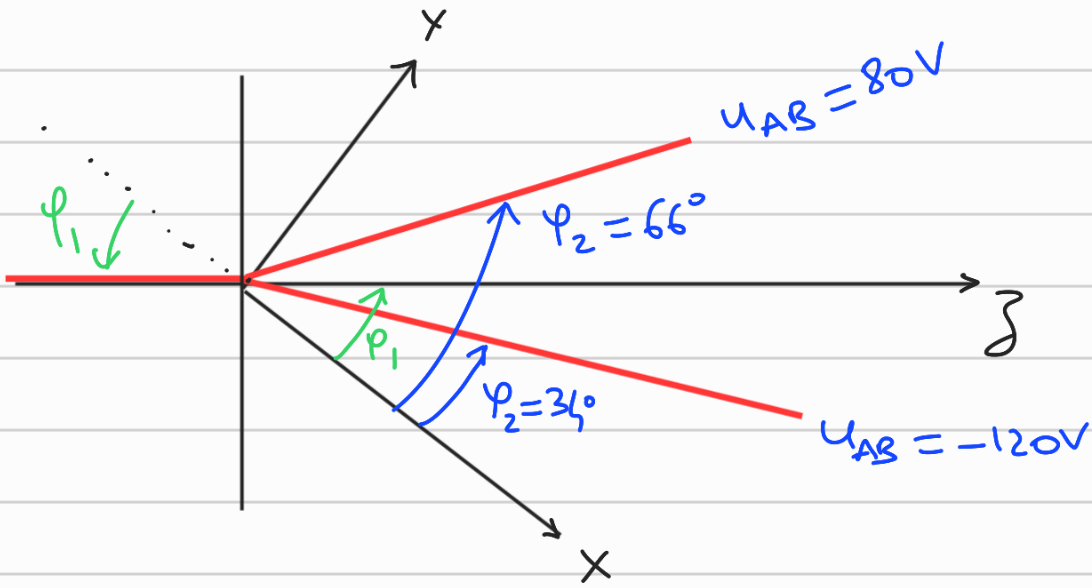
$$\sin \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{2.80}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{240}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\sqrt{5/6}\right) = \underline{66°}.$$

AN pour $u_{AB} = -120V$.

$$\sin \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{2.120}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{640}} = \sqrt{\frac{5}{16}}$$

$$\varphi_2 = \arcsin \sqrt{5/16} = \underline{34°}$$



Q16 D'après la loi de Descartes en optique $n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$ à la traversée d'un dioptre séparant 2 milieux transparents d'indices n_1 et n_2.

On a donc une formule analogue à celle obtenue entre φ_1 et φ_2 lors de la traversée du système de grilles par l'électron, avec les vitesses correspondant aux indices dans la relation de Snell-Descartes.

On a donc $n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}$

AN : pour $U_{AB} = 80V$: $n = \sqrt{\frac{6}{5.2}} = \underline{0{,}775}$

pour $U_{AB} = -120V$ $n = \sqrt{\frac{16}{5.2}} = \underline{1{,}265}$

Q17 En plaçant le système de grilles tel que $\varphi_1 = 0$ alors les électrons incidents selon Oz ne seront pas déviés alors que ceux arrivant avec un angle d'incidence non nulle seront déviés selon $\sin\varphi_2 = \frac{\sin\varphi_1}{n}$

$\Rightarrow$ on peut ainsi focaliser le faisceau.

Partie 2 :

Q1. D'après le PFD appliqué à l'électron dans R_T supposé galiléen :

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

Or l'électron n'est soumis qu'à la force de Lorentz (poids négligé).

$$\vec{F_L} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

avec $\vec{E} = -\frac{A}{r}\vec{u_r}$ et $\vec{B} = B_0 \vec{u_z}$

Et pour un mouvement circulaire on a

$$\vec{OM} = r_0 \vec{u_r}$$
$$\vec{v} = r_0 \dot{\theta} \vec{u_\theta}$$
$$\vec{a} = r_0 \ddot{\theta} \vec{u_\theta} - r_0 \dot{\theta}^2 \vec{u_r}$$

$$\Rightarrow \quad m \begin{pmatrix} -r_0\dot{\theta}^2 \\ r_0\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} -\frac{A}{r_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - e \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ r_0\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \\ r_0\dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ B_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -m r_0 \dot{\theta}^2 = \frac{eA}{r_0} - e r_0 \dot{\theta} B_0 \\ m r_0 \ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0 \text{ donc } \dot{\theta} = cte \end{cases}$$

d'où $r_0 \dot{\theta} = cte = v_0$.

$$-m \frac{v_0^2}{r_0} = \frac{eA}{r_0} - e v_0 B_0$$

$$\Rightarrow \boxed{A = B r_0 v_0 - \frac{m}{e} v_0^2}$$

Q2. $\dfrac{dA}{dv_0} = B r_0 - \dfrac{2m}{e} v_0 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad v_0 = \frac{eBr_0}{2m}$$

$$A = Br_0 \frac{eBr_0}{2m} - \frac{m}{e}\left(\frac{eBr_0}{2m}\right)^2$$

$$A = \left(\frac{Br_0}{2}\right)^2 \cdot \frac{e}{m} \Rightarrow \boxed{A = \frac{m v_0^2}{e}}$$

Q3. On veut récupérer l'électron en F_2

$\Rightarrow$ pour $\theta = \theta_1$ on a $r = r_0$.

On n'a pas un mouvement circulaire car $\vec{v}(0)$ n'est pas selon $\vec{u_\theta}$.

$$\vec{On} = r\vec{u_r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{u_r}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u_\theta}$$

Force de Lorentz : $\vec{F_L} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

$$= -e\vec{E} - e \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ B \end{matrix}$$

$\dot{r}$ $\quad$ 0

$r\dot{\theta}$ $\quad$ 0

$$\vec{F_L} = \frac{eA}{r}\vec{u_r} - er\dot{\theta}B\vec{u_r} + e\dot{r}B\,\vec{u_\theta}$$

On applique à nouveau le PFD à l'électron dans R_T supposé galiléen :
En projection sur $\vec{u_\theta}$:

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = e\dot{r}B.$$

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{er\dot{r}B}{m}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = \frac{d}{dt}\frac{er^2B}{2m}$$

$$\Rightarrow r^2\dot{\theta} = \frac{er^2B}{2m} + cte$$

A l'état initial $r = r_0$ et $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$

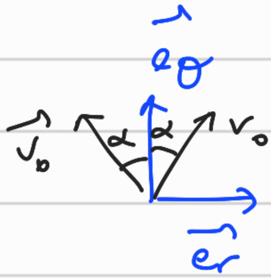
$$r_0^2\dot{\theta}_0 = \frac{er_0^2B}{2m} + cte$$

$$\Rightarrow cte = r_0^2\dot{\theta}_0 - \frac{er_0^2B}{2m}$$

D'où $$r^2\dot{\theta} = \frac{er^2B}{2m} + r_0^2\dot{\theta}_0 - \frac{er_0^2B}{2m}$$

Or $\quad r_0\dot{\theta}_0 = v_0 \cos\alpha$

$$r_0\dot{\theta}_0 = \vec{v_0}\cdot\vec{e_\theta}$$



$$= v_0\cos\alpha$$

$$r^2\dot{\theta} = \frac{eB}{2m}\left(r^2 - r_0^2\right) + r_0 v_0 \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{eB}{2m}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{r_0 v_0 \cos\alpha}{r^2}$$

Or $\quad v_0 = \frac{eBr_0}{2m}$ et $\alpha \ll 1 \Rightarrow \cos\alpha \simeq 1$

$$\dot{\theta} = \frac{eB}{2m}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + \frac{eB}{2m}\frac{r_0^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{eB}{2m}$$

On réinjecte selon $\vec{u_r}$:

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \frac{eA}{r} - er\dot{\theta}B$$

$$m\left(\ddot{r} - \frac{re^2B^2}{4m^2}\right) = \frac{eA}{r} - \frac{e^2rB^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = \frac{eA}{mr} - \frac{r}{2}\left(\frac{eB}{m}\right)^2 + \frac{r}{4}\left(\frac{eB}{m}\right)^2$$

$$\ddot{r} = \frac{eA}{mr} - \left(\frac{eB}{2m}\right)^2 r$$

En posant $r = r_0 + \rho$ avec $\rho \ll r_0$

on a $\ddot{r} = \ddot{\rho}$

$$\ddot{\rho} = \frac{eA}{m(r_0+\rho)} - \left(\frac{eB}{2m}\right)^2 (r_0 + \rho)$$

$$\ddot{\rho} = \frac{eA}{mr_0} \times \left(1 + \frac{\rho}{r_0}\right)^{-1} - \left(\frac{eB}{2m}\right)^2 (r_0+\rho)$$

Avec le DL : $(1+x)^n \simeq 1 + nx$ pour $x \ll 1$

On obtient $\ddot{\rho} = \frac{eA}{mr_0}\left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right) - \left(\frac{eB}{2m}\right)^2 (r_0+\rho)$

Or $A = \left(\frac{Br_0}{2}\right)^2 \frac{e}{m}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\rho} = \left(\frac{eB}{2m}\right)^2 r_0 \left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right) - \left(\frac{eB}{2m}\right)^2 (r_0 + \rho)$$

$$\ddot{\rho} = \left(\frac{eB}{2m}\right)^2 \left(r_0 - \rho - r_0 - \rho\right)$$

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{eB}{2m}\right)^2 2\rho = 0$$

Ce qui est l'équation de l'OH ayant pour solutions :

$$\rho(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

avec $\omega_0 = \frac{eB}{\sqrt{2}m}$

On détermine A et B avec ρ_0 et $\dot\rho_0$ à $t=0$

$$\rho_0 = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\dot\rho = B\omega_0 \cos\omega_0 t$$

or $\dot\rho(0) = v_0 \sin\alpha \Rightarrow v_0\sin\alpha = B\omega_0$

$$\Rightarrow B = \frac{v_0 \sin\alpha}{eB} \cdot 2m \, .$$

$$\rho(t) = \frac{2mv_0\sin\alpha}{eB}\sin\left(\frac{eB}{\sqrt{2}m}t\right)$$

Pour quelle valeur de t_1 a-t-on $\rho = 0$?

il faut $\frac{eB}{\sqrt{2}m}t_1 = \pi \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{2}m\pi}{eB}$

On a alors $\theta_1 = \theta(t_1) = \dot\theta(t_1) \times t_1$

$$\theta_1 = \frac{eB}{2m} \cdot \frac{\sqrt{2}\, m\pi}{eB}$$

$$\boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

Q4. θ_1 étant fixé on fait varier A de façon à collecter le maximum d'électrons, et on en déduit

$$\frac{e}{m} = \frac{4A}{r^2 B^2}$$

Or $A = \dfrac{V_b - V_a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{e}{m} = \dfrac{4}{r^2 B^2} \dfrac{V_b - V_a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

Pour $r_0 = \dfrac{a+b}{2}$: $\dfrac{e}{m} = \dfrac{16}{(a+b)^2 B^2} \dfrac{V_b - V_a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

$$V_b - V_a = \frac{e}{m} \frac{\ln(b/a)}{16} \times B^2 (a+b)^2$$

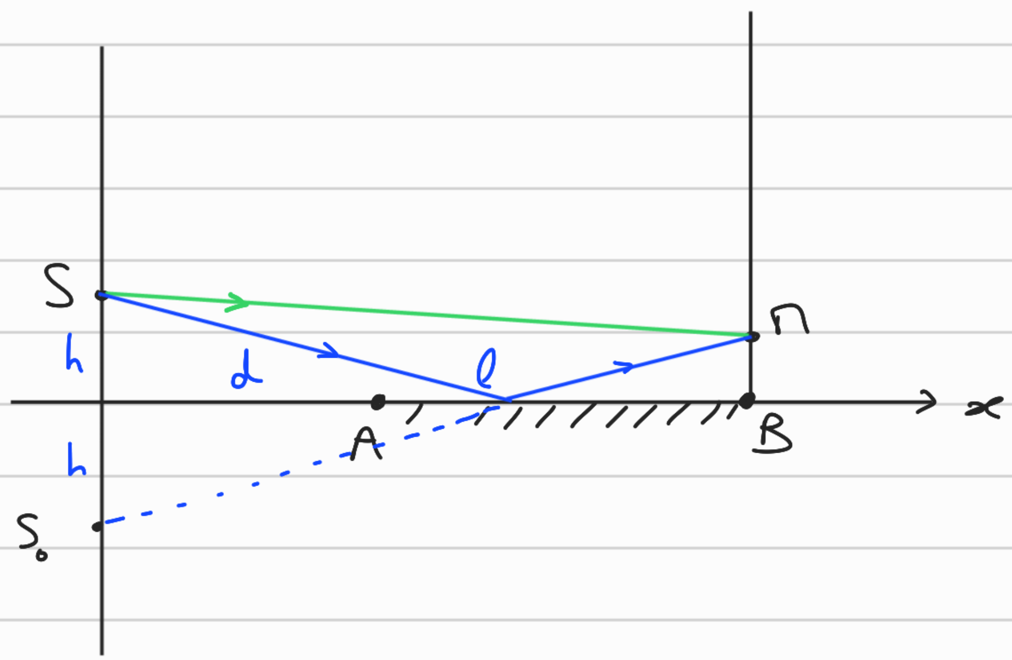
AN : $V_b - V_a = \underline{139 \text{ V}}$

Exercice 3 :

Q1. L'image par un miroir plan est obtenue par symétrie plane d'où $S_0(0,-h,0)$.

La source S et la source S_0 constituent donc 2 sources lumineuses synchrones et cohérentes, distance d'une longueur $2h$. On est bien dans la même situation que celle des trous d'Young.

Q2



Q3. En appliquant la formule des trous d'Young, on a :

$$\delta(y,z) = S_0 n - S n$$

$$= \sqrt{(d+\ell-0)^2+(y+h)^2+(z-0)^2} - \sqrt{(d+\ell-0)^2+(y-h)^2+(z-0)^2}$$

$$= \sqrt{(d+\ell)^2 + (y+h)^2 + z^2} - \sqrt{(d+\ell)^2 + (y-h)^2 + z^2}$$

$$= (d+\ell)\sqrt{1 + \left(\frac{y+h}{d+\ell}\right)^2 + \left(\frac{z}{d+\ell}\right)^2} - (d+\ell)\sqrt{1 + \left(\frac{y-h}{d+\ell}\right)^2 + \left(\frac{z}{d+\ell}\right)^2}$$

$$= (d+\ell)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y+h}{d+\ell}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{d+\ell}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y-h}{d+\ell}\right)^2 - \left(\frac{z}{d+\ell}\right)^2\right)$$

$$= (d+\ell)\ \frac{2yh}{(d+\ell)^2}$$

$$\boxed{\delta = \frac{2yh}{d+\ell}}$$

Au niveau du point B on a $y=0$ d'où $\delta = 0$, il s'agit devrait donc y avoir une interférence constructive.

Q4. Lorsque 2 ondes de même amplitude S_m l'amplitude de l'onde résultant de leur somme vaut :

$$S_m' = \sqrt{2S_m^2 + 2S_m^2 \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}}$$

$$\boxed{S_m' = S_m\sqrt{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)^{1/2}}$$

Q5 $\boxed{I(y) = 2k\,S_m\left(1 + \cos\frac{4\pi y h}{\lambda_0(d+\ell)}\right)}$ avec $k = \text{cte}$

Q6. les zones lumineuses sont des bandes horizontales ($z = cte$) telles que

$$\cos\left(\frac{4\pi y_n h}{\lambda_0(d+\ell)}\right) = 1$$

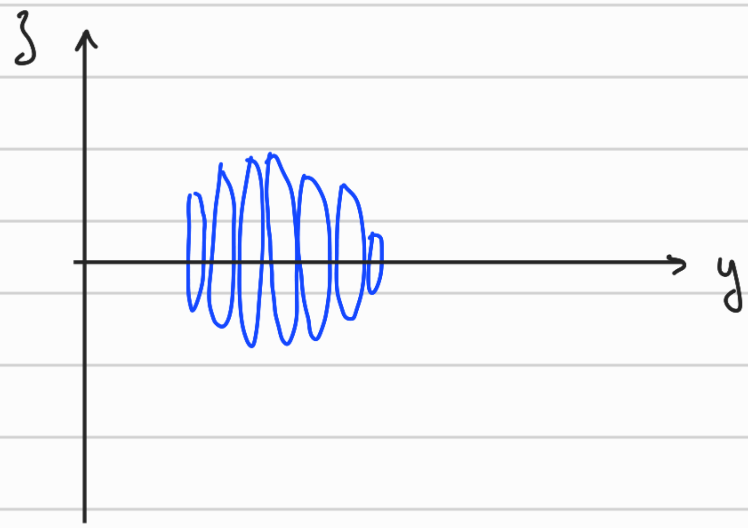
$$\cos\left(\frac{4\pi y_{n+1}}{\lambda_0(d+\ell)} + 2\pi\right) = 1$$

$$\frac{4\pi y_n h}{\lambda_0(d+\ell)} = \frac{4\pi y_{n+1}}{\lambda_0(d+\ell)} - 2\pi$$

$$(y_{n+1} - y_n)\frac{4\pi h}{\lambda_0(d+\ell)} = 2\pi$$

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0(d+\ell)}{2h}}$$

Q7



Les franges lumineuses sont parallèles à z ($y = cte$)

Q8 Sur la photo agrandie, on mesure $5i_{ag.} = 1,5$ cm

image 2 × trop grande dsl !

avec $\left.\begin{array}{l}(5i_{ag})_{max} = \frac{1,6}{2} \text{ cm} \\ (5i_{ag})_{min} = \frac{1,4}{2} \text{ cm}\end{array}\right\} u(5i_{ag}) = \frac{0,1}{2\sqrt{3}}$ cm

d'où $u(5i_{ag}) = 0,029$ cm $= 0,29$ mm.

$\Rightarrow u(i_{ag}) = 0,058$ mm

devrait être 1,5mm

$i_{ag} = \frac{15,00}{5}$ mm $= 3$mm avec $u(i_{ag}) = 0,058$ mm

$i = \frac{3}{5} = 0,6$ mm avec $u(i) = 0,0116$ mm

Q9 zscore : $z = \frac{|1,5 - 1,497|}{\sqrt{0,058^2 + 0,013^2}} = 0,05 < 2$

on peut utiliser i_{ag} et $u(i_{ag})$ car les facteurs 5 se compensent

Le zscore est inférieur à 2 donc les 2 mesures sont compatibles.

Q10 $h = \frac{\lambda_0(d+\ell)}{2i_0}$

AN : $h = \frac{600.10^{-9}(1,0.10^{-2} + 24.10^{-2})}{2.\frac{1,497.10^{-3}}{5}} = 2,51.10^{-4}$ m $= \underline{251\ \mu m}$

Q11. Le rayon issu de S_0 le plus "haut" est tel que : $\frac{y_n'}{\ell} = \frac{h}{d}$ d'après Thalès.

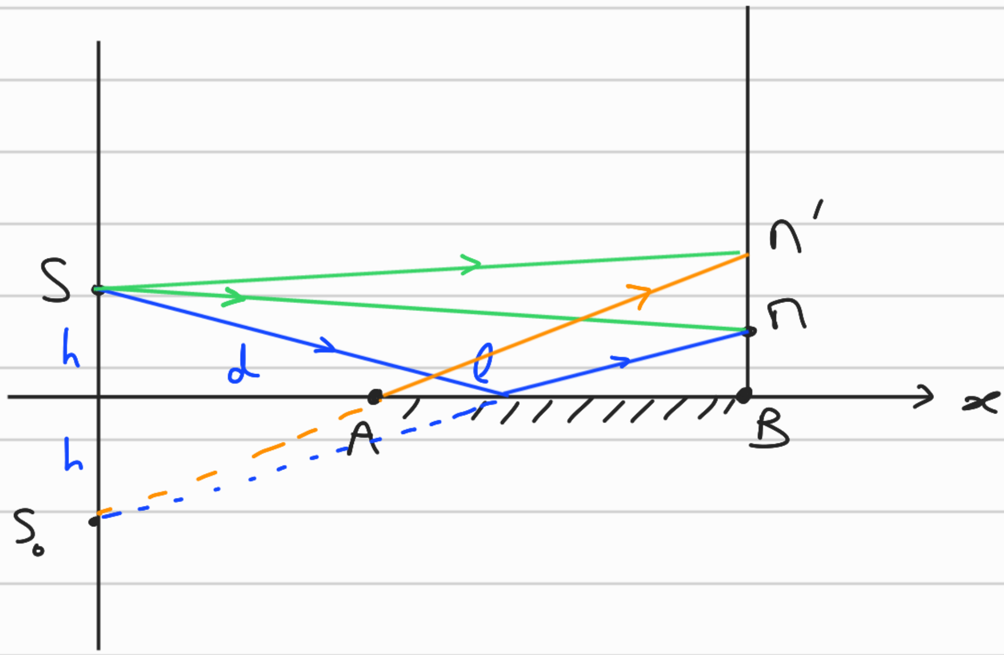
D'où $y_{n'} = \frac{\ell}{d}h$.

On peut donc voir $N = \frac{y_n'}{i} = \frac{\ell h}{d} \cdot \frac{2h}{\lambda_0(d+\ell)}$

$$\boxed{N = \frac{2h^2\ell}{\lambda_0 d(d+\ell)}}$$

AN : $N = \dfrac{2(251.10^{-6})^2 . 24.10^{-2}}{600.10^{-9}\ 10^{-2} . 25.10^{-2}} = 20$

On peut espérer voir 20 franges.



Q12. C'est la diffraction par le diaphragme devant S qui limite la visibilité des franges

D'après la formule de la diffraction par 1 trou circulaire $\sin\theta = 1{,}22\,\dfrac{\lambda}{a} \simeq \dfrac{L}{2D}$

$$a = \frac{1{,}22\lambda . 2D}{L}$$

AN : $a = 1{,}63.10^{-4}\ m = \underline{163\,\mu m}$

Q13. Si la figure d'interférences est décalée d'½ interfrange, on a 1 raie noire en $y=0$. Il faut donc $\varphi = \pi$.