

Devoir surveillé n° 5

Les 4 exercices sont indépendants. Les exercices 1 et 2 sont proches du cours, les exercices 3 et 4 sont plus originaux.

Données :

Masse molaire du dioxygène : $M(\text{O}_2) = 32 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Masse molaire du diazote : $M(\text{N}_2) = 28 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Composition de l'air : 80% de diazote et 20% de dioxygène

Capacité thermique molaire d'un gaz parfait diatomique : $C_{vm,di} = \frac{5}{2}R$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Pression atmosphérique : $P_{\text{atm}} = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$

Exercice 1 : Résonance en charge ($\sim 15\%$)

On étudie la tension aux bornes d'un condensateur de capacité C dans un circuit RLC série comportant un générateur de tension sinusoïdal $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.

Q1. Après avoir fait un schéma du circuit, montrer que l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur peut se mettre sous la forme :

$$\underline{U}_{Cm}(\omega) = \frac{E_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Préciser les expressions de ω_0 et Q .

Q2. Établir la condition d'existence d'une résonance en tension aux bornes du condensateur. On pourra introduire la fonction $f(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q^2}$, avec $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$.

Q3. Exprimer la pulsation de résonance de charge ω_r (lorsqu'elle existe) en fonction de ω_0 et Q .

Q4. Tracer qualitativement le graphique $U_{Cm}(\omega)$ pour $Q = 0,6$ et $Q = 2$. Faire apparaître clairement les valeurs particulières de U_{Cm} .

Q5. Comment avec un dipôle RLC alimenté avec un générateur sinusoïdal d'amplitude 12 V, peut-on récupérer 60 V aux bornes du condensateur ? Est-ce incompatible avec la loi des mailles ?

Exercice 2 : Moteur Stirling (~ 20%)

Extrait du concours Centrale Supélec TSI 2022

Au début du XIX^e siècle, les chaudières des machines à vapeur, soumises à de trop fortes pressions, explosent assez souvent. Robert Stirling a ainsi imaginé en 1816 un moteur dépourvu de chaudière où la chaleur est apportée de l'extérieur de la machine (moteur à « air chaud »). L'utilisation de ce moteur restera limitée, en particulier en raison de la trop faible puissance des modèles proposés, insuffisante pour concurrencer la machine à vapeur et le moteur à combustion interne.

Le moteur Stirling bénéficie actuellement d'un nouvel intérêt car il présente de nombreux avantages. Il peut utiliser n'importe quelle source d'énergie produisant de la chaleur, combustion de tout matériau mais également énergie solaire, nucléaire, géothermique, etc. Il produit peu de vibrations et est silencieux (pas d'explosion interne ni d'échappement gazeux, absence de valves et soupapes). Grâce à l'utilisation de matériaux modernes qui supportent de grands écarts de température et qui améliorent les transferts thermiques, son rendement est comparable, voire supérieur à celui des moteurs à combustion interne. Son entretien est facile et il s'use moins que les moteurs à explosion.

La conception d'un moteur Stirling est cependant délicate, en raison des gros écarts de température qu'il doit supporter et de la nécessité d'une excellente étanchéité ; son prix reste donc élevé. Par ailleurs, il est difficile de faire varier son régime. Son emploi reste ainsi cantonné à des utilisations de niches : générateur d'électricité en milieux extrêmes, propulseur pour sous-marins, etc. Sa réversibilité conduit à l'utiliser comme pompe à chaleur capable de refroidir à -200 °C ou de chauffer à plus de 700 °C .

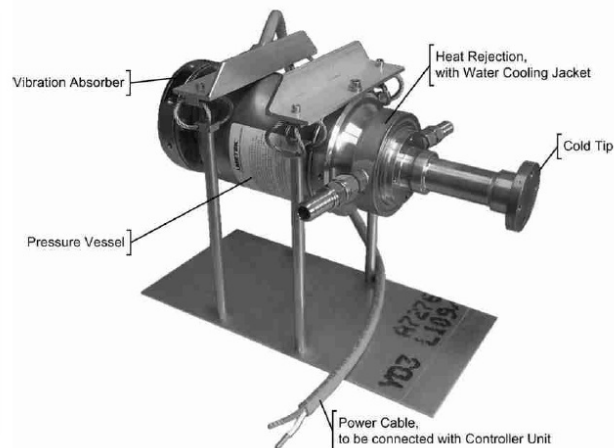
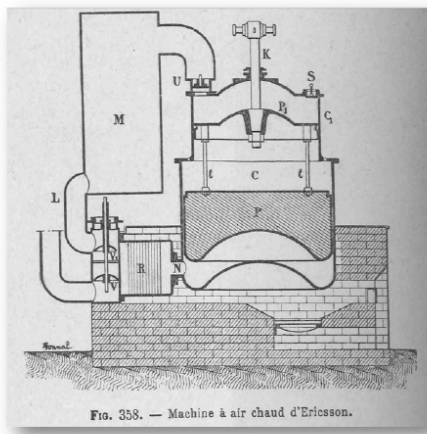


FIGURE 1 - Gravure de 1899 d'un Moteur Ericsson M1851 avec régénérateur type Stirling (Wikipedia) et moteur Stirling de l'entreprise Sunpower fournissant le projet KRUSTY (ResearchGate)

Une enceinte étanche est séparée en deux chambres, une chambre chaude (chauffée par l'extérieur), de volume maximal V_1 , et une chambre froide équipée d'un dissipateur thermique (ailettes), de volume maximal V_2 . Chaque chambre est dotée d'un piston permettant de faire varier son volume et le fluide peut circuler librement d'une chambre à l'autre. Le piston de la chambre froide est le piston de travail, il entraîne le piston de la chambre chaude appelé « déplaceur » car son rôle est de faire circuler le fluide entre les deux chambres. Lors du transvasement, le fluide passe de la chambre chaude à la température T_3 à la chambre froide à la température $T_1 < T_3$ et réciproquement.

Le mouvement du gaz peut être décrit par 4 phases plus ou moins distinctes (Figure 2) :

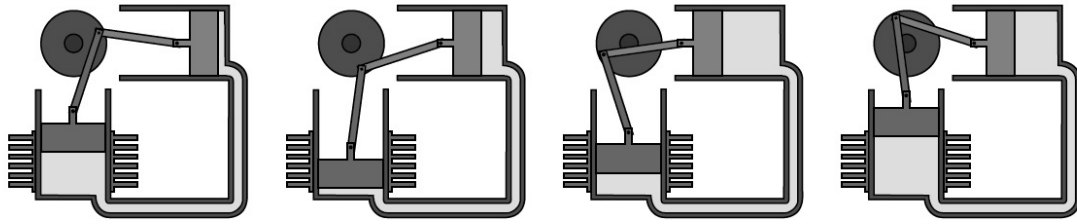


FIGURE 2 - Phases de fonctionnement d'un moteur Stirling de type alpha (d'après Wikipedia)

- une phase de compression, pendant laquelle le volume de la chambre chaude est minimal, le fluide, entièrement situé dans la zone froide, est comprimé par le piston de travail dans sa course vers le bas ;
- une fois le piston de travail au point mort bas, le déplaceur est ramené à gauche, ce qui a pour effet de transvaser le fluide comprimé, qui passe de la zone froide vers la zone chaude et reçoit un transfert thermique de la source externe ;
- une phase de détente, pendant laquelle le fluide se détend dans le volume d'expansion où il continue d'être chauffé. Cette détente a pour effet de repousser le déplaceur et le piston de travail ;
- une fois que le piston de travail a atteint le point mort haut, le déplaceur est ramené à droite, ce qui a pour effet de transvaser le fluide de la zone chaude (volume d'expansion) vers la zone froide (volume de compression). Au cours de ce transfert, le fluide cède de la chaleur au refroidisseur.

On étudie le cycle de Stirling idéal. Au cours de celui-ci, n moles de gaz parfait de coefficient adiabatique $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$ subissent les transformations suivantes :

- une compression (1 \rightarrow 2) isotherme réversible à la température T_1 ,
- un échauffement (2 \rightarrow 3) isochore jusqu'à l'état 3 de température T_3 ,
- une détente (3 \rightarrow 4) isotherme réversible à la température T_3 ,
- un refroidissement (4 \rightarrow 1) isochore jusqu'à l'état 1.

Il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression.

On note $r = \frac{V_1}{V_2}$ le rapport de compression entre les volumes fixés par construction.

- Q1. Représenter sur un diagramme (P, V) l'allure du diagramme correspondant au cycle idéal.
- Q2. Montrer que la capacité thermique à volume constant d'un système constitué de n moles de gaz parfait vaut $C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$, où R est la constante des gaz parfaits.
- Q3. Exprimer W_{12} , le travail reçu par le fluide au cours de la compression, en fonction de n, R, T_1 et r .
- Q4. En déduire le transfert thermique Q_{12} reçu par le fluide au cours de cette compression en fonction de n, R, T_1 et r .
- Q5. Préciser les signes de W_{12} et de Q_{12} .
- Q6. Exprimer Q_{23} , le transfert thermique reçu par le fluide au cours de l'échauffement isochore, en fonction de n, R, T_1, T_3 et γ . Préciser son signe.
- Q7. Exprimer W_{34} , le travail reçu par le fluide au cours de la détente, en fonction de n, R, T_3 et r .
- Q8. En déduire le transfert thermique Q_{34} reçu par le fluide au cours de cette détente en fonction de n, R, T_3 et r .
- Q9. Préciser les signes de W_{34} et Q_{34} .
- Q10. Exprimer le transfert thermique Q_{41} reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de n, R, T_1, T_3 et γ . Préciser son signe.
- Q11. Déterminer ΔU total pour un cycle de transformations. Commenter.

Exercice 3 : Les matériaux piézoélectriques ($\sim 35\%$)

Adapté du concours Centrale Supélec TSI 2020

Les matériaux piézoélectriques ont la capacité de voir apparaître une différence de potentiel entre leurs faces lorsqu'on exerce sur elles une contrainte (effet direct) mais également de pouvoir se déformer sous l'action d'une différence de potentiel imposée (effet inverse), ce qui en fait des matériaux très intéressants sur le plan des applications. On propose ici d'étudier différentes utilisations de ces matériaux.

Informations sur l'amplificateur opérationnel

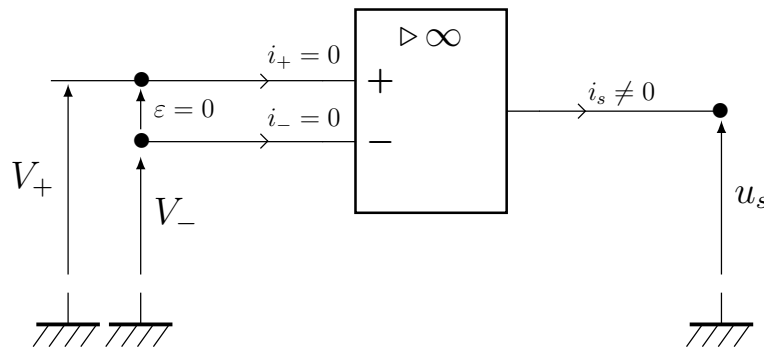


FIGURE 3

L'amplificateur opérationnel (AO) est un amplificateur différentiel (= un dispositif électronique permettant d'amplifier une différence de tension). Il peut avoir différentes fonctions : faire des calculs mathématiques analogiques (additions, soustractions, inversions, intégrations, dérivées, etc.), faire du filtrage de signaux analogiques, amplifier des tensions, ou du courant. Il est alimenté en $\pm 15\text{ V}$ par rapport à la masse. C'est cette alimentation (non représentée sur le schéma) qui permet de fournir de la puissance en sortie en assurant un courant d'intensité i_s pouvant aller à des ordres de grandeurs de dizaines de milliampères. L'AO présente de très fortes impédances d'entrée, les courants en entrée sont extrêmement faibles. Pour un AO idéal (repéré par le symbole $\triangleright \infty$), $i_+ = i_- = 0$ (impédances d'entrées infinies).

L'AO présente deux types de fonctionnement :

- Le régime linéaire, on parle alors d'amplificateur linéaire intégré (ALI)
- Le régime saturé (non linéaire)

Dans cet exercice, l'AO sera idéal et utilisé en régime linéaire (ALI) pour lequel :

$$i_+ = i_- = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = 0$$

Partie I. Utilisation en capteur de forces

1) Mesure de l'intensité d'une force s'exerçant sur une lame piézoélectrique

On suppose qu'une force \vec{F} régulièrement répartie est exercée sur la face de la lame, celle-ci entraînant l'apparition d'une tension V_e à ses bornes et de deux charges opposées $+q$ et $-q$ sur les faces de la lame. La charge q est liée à V_e ainsi qu'à la force \vec{F} exercée de sorte que $q = CV_e = KF$ où C , K et F représentent respectivement une capacité, une constante de proportionnalité et l'intensité de la force \vec{F} .

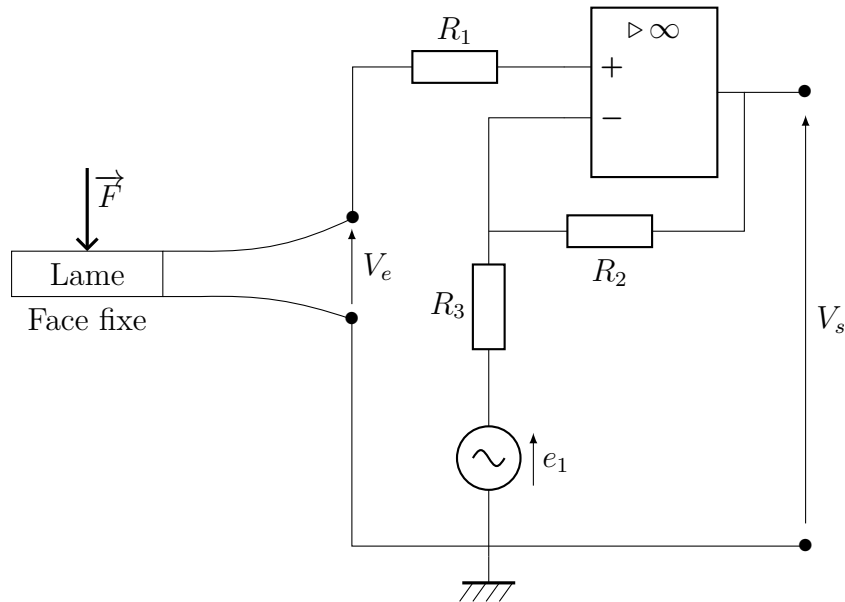


FIGURE 4

- Q1. Exprimer la tension V_e en fonction de e_1 , V_s et des différentes résistances.
- Q2. On donne : $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 6,5 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1,0 \text{ k}\Omega$, et $e_1 = 100 \text{ mV}$.
On mesure $V_s = 6,50 \text{ V}$.
En déduire V_e .
- Q3. Sachant que $C = 8,0 \times 10^{-13} \text{ F}$ et que $K = 1,0 \times 10^{-12} \text{ C}\cdot\text{N}^{-1}$, déterminer l'intensité de la force \vec{F} s'exerçant sur la lame.

2) Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur une lame

On considère que la lame est soumise à une action mécanique variant sinusoïdalement dans le temps à la fréquence f , fréquence que l'on se propose de déterminer à l'aide du montage de la figure 5.

- Q4. Montrer que la tension \underline{V}_s dépend de \underline{V}_e selon :

$$\underline{V}_s = -\frac{A}{1 + j(\omega/\omega_1 - \omega_2/\omega)} \underline{V}_e$$

en précisant les expressions de A , ω_1 et ω_2 en fonction de R_1 , R_2 , C_1 et C_2 .

- Q5. Montrer que, à $V_e = |\underline{V}_e|$ fixé, $V_s = |\underline{V}_s|$ passe par un maximum pour une pulsation ω que l'on exprimera en fonction de ω_1 et ω_2 .

On ajuste à présent la résistance R_1 de manière à ce que les signaux d'entrée et de sortie soient en opposition de phase.

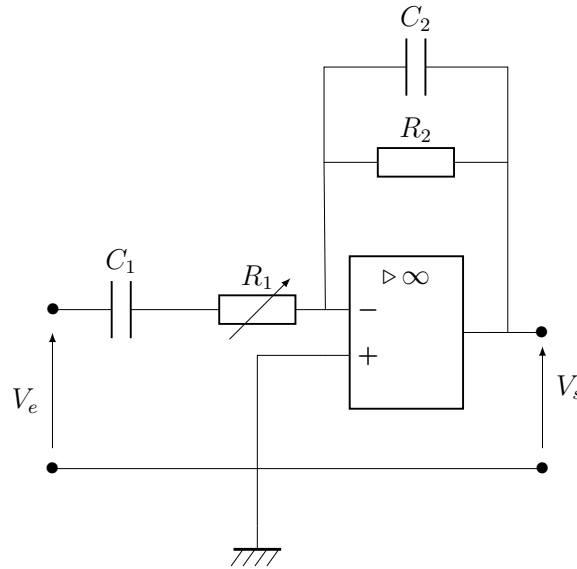


FIGURE 5

- Q6. Comment peut-on vérifier expérimentalement que les deux signaux sont en opposition de phase ? Indiquer quel matériel peut être utilisé pour cette opération et comment le relier au montage.
- Q7. Déterminer la fréquence de la contrainte s'exerçant sur la lame. Calculer sa valeur numérique sachant que $R_2 = 1,0 \times 10^2 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 50 \text{ nF}$, $C_2 = 5,0 \text{ nF}$ et qu'il a fallu régler R_1 à $10 \text{ k}\Omega$ de manière à ce que les deux signaux soient en opposition de phase.

Partie II. Microgénérateur piézoélectrique

Un élément piézoélectrique est collé à une « poutre », qui se met en mouvement sous l'effet de vibrations extérieures. L'élément piézoélectrique transforme l'énergie récupérée en énergie électrique, ce qui constitue une source autonome de puissance.

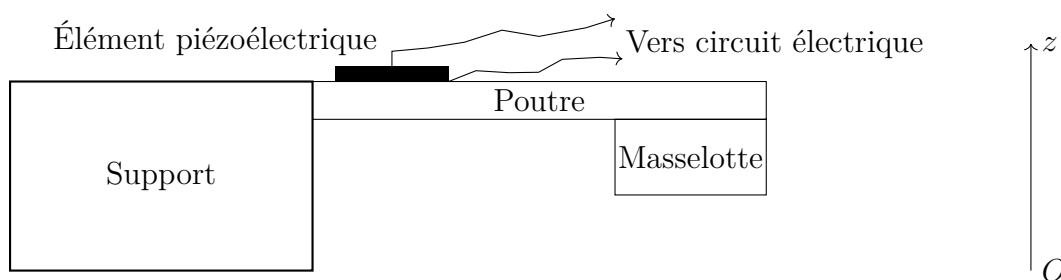


FIGURE 6

On appelle \vec{F}_E la force excitatrice ambiante, supposée sinusoïdale : $\vec{F}_E = F_E \vec{u}_z = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On travaille dans un référentiel terrestre. On se place en régime sinusoïdal forcé.

Le déplacement vertical du centre d'inertie de la poutre peut être modélisé par l'équation mécanique :

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + kz = F_E$$

- Q8. Que représente le terme $\frac{d^2 z}{dt^2}$?

- Q9. Indiquer à quel type de forces correspondent $-kz$ et $-\alpha \frac{dz}{dt}$. Expliquer qualitativement quelles caractéristiques de la poutre sont modélisées par ces forces.
- Q10. On pose $z(t) = \text{Re}(\underline{Z}_m e^{j\omega t})$.
Exprimer \underline{Z}_m , amplitude complexe de la vibration mécanique suivant l'axe vertical (Oz).

Dans toute la suite de cette partie II on se place à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/M}$.

- Q11. Décrire, à cette pulsation, le mouvement du centre d'inertie de la poutre.
- Q12. Dédire de ce qui précède l'expression de la vitesse de déplacement vertical v_z du centre d'inertie de la poutre en fonction de F_0 , α , ω_0 et du temps.

La partie électrique du dispositif peut être modélisée de la façon suivante : une source de courant d'intensité βv_z est disposée en parallèle avec un condensateur de capacité C_0 et une résistance d'utilisation R . Soit V la tension aux bornes de R . On veut montrer que la puissance moyenne récupérée par le dipôle d'utilisation est proportionnelle au carré de F_0 .

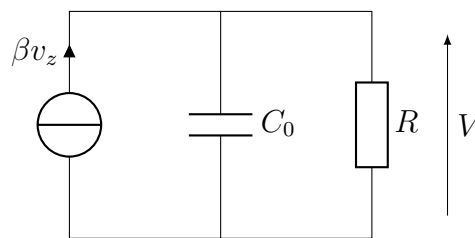


FIGURE 7

- Q13. Que représente la capacité C_0 ?
- Q14. β est appelé facteur de force : c'est le rapport entre la force appliquée à la lame piézoélectrique et la tension aux bornes de celle-ci. Montrer que βv_z est homogène à l'intensité d'un courant électrique.
- Q15. Exprimer \underline{V}_m , amplitude complexe de la tension aux bornes de la résistance d'utilisation en fonction de α , β , F_0 , R , C_0 et ω_0 .
- Q16. En déduire l'expression de la puissance moyenne récupérée P par la résistance d'utilisation.

Exercice 4 : Évolution de la température dans une pièce ($\sim 30\%$)

Adapté du concours Petites Mines TSI 2004

Partie I. Mise en route du chauffage

Soit une pièce d'habitation dont les dimensions sont 10 m, 7 m et 2,5 m, qui ne contient pas de meubles et sans aération. On note C la capacité thermique totale de l'air de la pièce. La température de l'air à l'instant t , notée $T(t)$, est supposée uniforme en tout point de la pièce.

Les fuites thermiques se font uniquement par l'intermédiaire d'une fenêtre simple vitrée de surface S . La température de l'extérieur est constante de valeur $T_0 = 273 \text{ K}$. On suppose que la puissance P_f des

fuites thermiques est proportionnelle à la surface de la vitre S et à l'écart de température entre la pièce et l'extérieur (loi de Newton). On appelle k le coefficient de proportionnalité. En valeur absolue, la loi de Newton s'exprime donc par :

$$|P_f| = kS|T - T_0| \quad (\text{avec } k > 0)$$

L'air de la pièce est chauffé par un radiateur électrique de résistance r alimenté par le secteur EDF, qui délivre une tension sinusoïdale $u(t)$, dont la valeur efficace $U_{\text{eff}} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle}$ vaut 220 V. On suppose que le radiateur transfère la totalité de la puissance électrique qu'il reçoit en chaleur vers l'air de la pièce.

Initialement l'air de la pièce est à une température $T_i = T(0) = 283 \text{ K}$. On met en route le chauffage.

- Q1. Rappeler la définition (formule) de la température cinétique d'un gaz parfait, puis établir que la capacité thermique molaire d'un gaz parfait monoatomique vaut $C_{vm, \text{mono}} = \frac{3}{2}R$.
- Q2. En supposant l'air de la pièce composé uniquement de diazote et de dioxygène, déterminer l'expression littérale de C en fonction de R , T , P_{atm} et V (le volume de la pièce). Faire l'application numérique lorsque l'air de la pièce est à la température T_i .

On considèrera dans la suite de l'exercice que C est constante sur la plage de température étudiée, égale à $150 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}$.

- Q3. Donner l'expression littérale de la puissance thermique moyenne P_J cédée par le radiateur à l'air de la pièce.
- Q4. Donner l'expression littérale de la puissance thermique moyenne P_{th} algébriquement reçue par l'air de la pièce.
- Q5. Quelle valeur faut-il donner à r pour qu'en régime permanent la température de l'air de la pièce soit de $T_1 = 293 \text{ K}$? Pour l'application numérique, on prendra $S = 2 \text{ m}^2$ et $k = 5,6 \text{ S.I.}$
- Q6. Écrire le bilan énergétique de l'air de la pièce entre deux instants infiniment voisins t et $t + dt$ et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$.
- Q7. Dans l'équation différentielle de $T(t)$, identifier une constante de temps τ .
Quelle est sa valeur numérique? Quelle est sa signification physique?
- Q8. Résoudre l'équation différentielle avec la condition initiale proposée. Donner l'expression de $T(t)$ en fonction de T_i , T_0 et τ .

Partie II. Soirée dans cette pièce

- Q9. Vingt personnes sont invitées à une soirée dans cette pièce. Chaque personne, dont le volume moyen v_{1p} est évalué à $0,07 \text{ m}^3$, cède à l'air ambiant une puissance thermique moyenne $P_{1p} = 100 \text{ kJ}\cdot\text{h}^{-1}$. Au début de la soirée, l'air de la pièce est à la température $T_1 = 293 \text{ K}$ et à la pression atmosphérique. La résistance du radiateur vaut $r = 4,3 \times 10^2 \Omega$.
Évaluer la variation de température ΔT de l'air de la pièce au bout de 2 heures.
Commenter le résultat obtenu.