DS n°5

Exercice 1 :

Q1. Pression dans le pneu : $P_0 = 1{,}70 + 1{,}00$

$= 2{,}70$ bar

$= \underline{2{,}70 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$.

Q2 D'après la loi des GP : $PV = nRT$

le pneu étant parfaitement étanche $n = cte$

et de volume constant $V_p = cte$

$$\Rightarrow \frac{P}{T} = cte \quad \Rightarrow \frac{P_0}{T_0} = \frac{P_{40}}{T_{40}}$$

$$P_{40} = P_0 \frac{T_{40}}{T_0}$$

AN : $P_{40} = 2{,}70 \cdot \dfrac{273+40}{273+20} = 2{,}88$ bar

le manomètre différentiel indiquera donc

$\underline{1{,}88 \text{ bar}}$ $(= P_{40} - P_{atm})$

Q3. a) $V_{air} = \dfrac{n_{air} R T_0}{P_{atm}}$

avec $n_{air} = n_{final} - n_{initial}$

$$= \frac{PV_p}{RT_0} - \frac{P_0 V_p}{RT_0} = (P - P_0)\frac{V_p}{RT_0}$$

$$\boxed{V_{air} = \frac{P - P_0}{P_{atm}} \cdot V_p}$$

AN : $V_{air} = \frac{3{,}00 - 2{,}70}{1{,}00} \cdot 35 = 10{,}5 \text{ L}$

b) $P' = \frac{n_{reste} R T_0}{V_1}$

avec $n_{reste} = \frac{P_1 V_1}{R T_0} - (P - P_0) \frac{V_P}{R T_0}$

$$P' = \frac{P_1 V_1 - (P - P_0) V_P}{V_1}$$

$$\boxed{P' = P_1 - (P - P_0) \frac{V_P}{V_1}}$$

AN : $P' = 6{,}00 - (3{,}00 - 2{,}70) \frac{35}{15} = \underline{5{,}3 \text{ bar}}$

Q4. Pression dans les pneus : 3,00 bar.

* Système {1 pneu} à l'équilibre dans $\mathcal{R}_t$ galiléen

Bilan des actions mécaniques :
- force de pression du gaz $\vec{F}_{gaz/p}$
- réaction de la route $\vec{R}_N$
- poids nul (masse négligeable.

le principe d'inertie donne : $\vec{0} = \vec{F}_{gaz/p} + \vec{R}_N$

$\Rightarrow \vec{R}_N = -\vec{F}_{gaz/p} = P \cdot S_{contact} \, \vec{u_z}$

* Système $\begin{Bmatrix}\text{voiture}\\ \text{complète}\end{Bmatrix}$ à l'équilibre dans $\mathcal{R}_T$ galiléen

Bilan des actions mécaniques :

- poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- réaction de la route $\vec{R_N} \times 4$

le principe d'inertie donne : $\vec{0} = m\vec{g} + 4\vec{R_N}$

$$\Rightarrow m\vec{g} = -4\vec{R_N} = -4P.S_{contact}\,\vec{u_z}$$

$$\boxed{S_{contact} = \frac{mg}{4P}}$$

AN : $S_{contact} = \dfrac{1440.10}{4.30.10^5} = 0{,}012\ m^2 = \underline{120\ cm^2}$

Exercice 2 :

Q1. $\phi_{1\to 2} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$

Soit $\boxed{\phi_{1\to 2} = \frac{\lambda S}{e}(T_1 - T_2)}$

Q2. $[\phi] = ML^2T^{-2}.T^{-1} = ML^2T^{-3}$ $\left(= \frac{\text{energie}}{\text{temps}}\right)$

$[S] = L^2$
$[e] = L$
$[T_1 - T_2] = \theta$

$ML^2T^{-3} = \frac{[\lambda]L^2}{L}\theta$

$[\lambda] = \frac{ML^2T^{-3}}{L\theta} \Rightarrow \boxed{[\lambda] = M.LT^{-3}\theta^{-1}}$

unité dans le système international :

λ en $\underline{kg.m.s^{-3}K^{-1}}$

(équivalent à $W.m^{-1}.K^{-1}$)

Q3 D'après le schéma et la formule :

a) $R_1 = \frac{e_{toit}}{\lambda_1 S_{toit}}$

avec $e_{toit} = e_1$ et $S_{toit} = l.L$

$$\Rightarrow \boxed{R_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 l L}}$$

b) $$R_2 = \frac{e_{lat}}{\lambda_1 S_{lat}}$$

avec $e_{lat} = e_1$ et $S_{lat} = 2l(H-d) + 2L(H-d)$

$$S_{lat} = 2(l+L)(H-d)$$

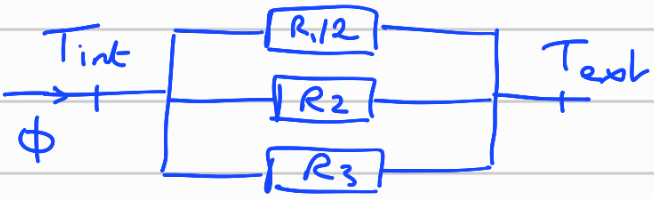
$$\boxed{R_2 = \frac{e_1}{2\lambda_1 (l+L)(H-d)}}$$

c) $$R_3 = \frac{e_{vitres}}{\lambda_2 S_{vitres}}$$

avec $e_{vitres} = e_2$ et $S_{vitres} = 2ld + 2Ld$
$= 2d(l+L)$

$$\boxed{R_3 = \frac{e_2}{2\lambda_2 d(l+L)}}$$

Q4. Dans le cas de la voiture, les résistances thermiques sont en parallèle (pas de superposition de matériaux) :



Q5. AN : $R_3 = \dfrac{2{,}0.10^{-3}}{2.1{,}2.0{,}50(1{,}75+4{,}00)} = 2{,}90 10^{-4}\ K.W^{-1}$

AN : $R_1 = \dfrac{0{,}10}{0{,}10 . 1{,}75 . 4{,}00} = 0{,}143\ K.W^{-1}$

AN $R_2 = \dfrac{0{,}10}{2 . 0{,}10(1{,}75+4{,}00)(1{,}5-0{,}5)} = 0{,}0870\ K.W^{-1}$

AN : $R_v = 2{,}89.10^{-4}\ K.W^{-1} \simeq R_3$

donc l'essentiel du flux thermique passe par les vitres.

Q6. Il faut tenir compte de la conducto-convection à la surface de la voiture.

$\Phi_{cond.conv} = h S_{toit} (T_{surf.sol} - T_{fluide})$ (loi de Newton)

$$\boxed{R_{cond.conv} = \frac{1}{h.S_{toit}}}$$

Résistance ajoutée en série car le flux thermique traversant ces 2 résistances est le même.

Q7. En régime permanent la température de l'air de la voiture est constante. D'où $\Delta U_{air} = 0$ (1ère loi de Joule)

Or $\Delta U_{air} = \left(\frac{\Delta T}{R_{th}} + n.p + P_1\right) \Delta t$

$\Rightarrow \boxed{G \Delta T + np + P_1 = 0}$

Q8. $P_1 = - G\Delta T - np$

AN : * été $P_1 = -150.(303-293) - 4.75$
$= \underline{-1800 \text{ W}} < 0$ car la climatisation évacue du transfert thermique en été

* hiver $P_1 = -150(263-293) - 4.75$
$= \underline{4200 \text{ W}} > 0$ car le chauffage fournit du transfert thermique en hiver.

On a $P_1 = 0$ pour $\Delta T = -\frac{np}{G} = T_{ext} - T_{int}$

$\boxed{T_{ext} = T_{int} - \frac{np}{G}}$

AN : $T_{ext} = 293 - \frac{4.75}{150} = 291 \text{K}$
$= \underline{18°\text{C}}$

ODG correct.

Q9. Bilan d'énergie de l'air de la voiture pendant la durée dt :

$$C dT = n.p.dt + P_{max} dt + G(T_{ext} - T)dt$$

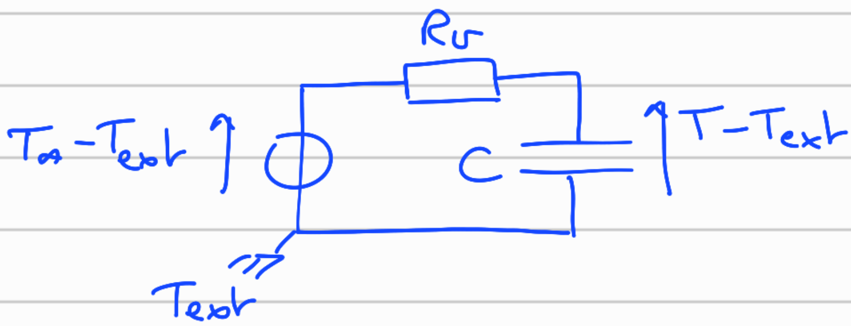
$$C \frac{dT}{dt} + GT = np + P_{max} + GT_{ext}$$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{G}{C} T = \frac{np}{C} + \frac{P_{max}}{C} + \frac{GT_{ext}}{C}}$$

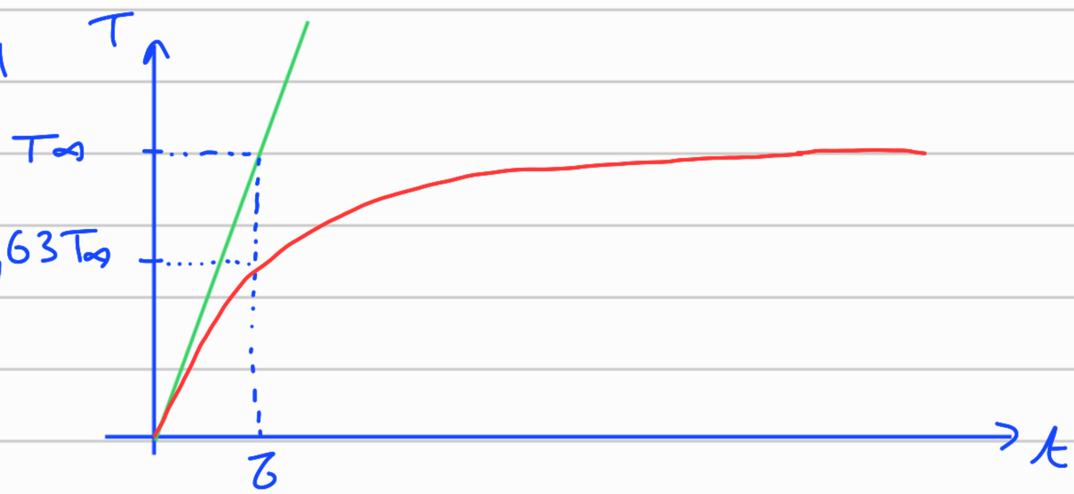
Par identification on a : $\tau = \frac{C}{G} = CR_v$

et $T_\infty = T_{ext} + \frac{np}{G} + \frac{P_{max}}{G} = T_{ext} + R_v(np + P_{max})$

Q10 On a une équation différentielle analogue à celle de la charge du circuit RC :



Q11



Q12 Sol. eq homogène + sol part. :

$$T(t) = Ae^{-t/\tau} + T_\infty$$

à $t=0$ $T = T_{ext}$.

$T_{ext} = A + T_\infty \Rightarrow A = T_{ext} - T_\infty$

$$T(t) = (T_{ext} - T_\infty)e^{-t/\tau} + T_\infty.$$

$$T(\Delta t) = T_c = (T_{ext} - T_\infty)e^{-\Delta t/\tau} + T_\infty.$$

avec $\tau = CR_v$ et $T_\infty = T_{ext} + R_v(np + P_{imax})$

$$T_c = -R_v(np + P_{imax})e^{-\Delta t/CR_v} + T_{ext} + R_v(np + P_{imax})$$

$$T_c = P_{imax} \cdot R_v(1 - e^{-\Delta t/CR_v}) + T_{ext} + R_v np - R_v np e^{-\Delta t/CR_v}$$

$$P_{imax} \cdot R_v(1 - e^{-\Delta t/CR_v}) = T_c - T_{ext} - R_v np(1 - e^{-\Delta t/CR_v})$$

$$P_{imax} = \frac{T_c - T_{ext} - R_v np(1 - e^{-\Delta t/CR_v})}{R_v(1 - e^{-\Delta t/CR_v})}$$

$$\boxed{P_{imax} = \frac{T_c - T_{ext}}{R_v(1 - e^{-\Delta t/CR_v})} - np}$$

Q13 $\boxed{q = \dfrac{P.\ell LH}{2RT_c}}$

AN : $q = \dfrac{1{,}0.10^5 . 4 \times 1{,}5 \times 1{,}75}{2 . 8{,}314 . 293} = \underline{215 \text{ moles}}$

Q14 $H_m = U_m + PV_m$

$$\Rightarrow \boxed{H_m = U_m + RT}$$

et $dU_m = C_{vm}\, dT$

$dH_m = C_{pm}\, dT$

$\Big\}\ C_{pm}\, dT = C_{vm}\, dT + R\, dT$

$$\boxed{C_{pm} - C_{vm} = R}$$

Q15 $C = q\, C_{vm}$

or $\gamma C_{vm} - C_{vm} = R \Rightarrow C_{vm} = \dfrac{R}{\gamma - 1}$

$$\boxed{C = \frac{P e L H}{2(\gamma-1) T_c}}$$

AN : $C = \dfrac{1{,}0.10^5 . 1{,}5 . 1{,}75 . 4}{2 . 0{,}4 . 293} = \underline{4{,}48.10^3 J.K^{-1}}$

$$P_{1max} = \frac{(293-263)150}{\left(1 - e^{-\frac{120.150}{4{,}8.10^3}}\right)} - 4.75 = 4{,}31.10^3 W$$

$= \underline{4{,}31 kW}$

Exercice 3 :

Q1. la transformation $A \to B$ est adiabatique réversible $\Rightarrow$ $PV^\gamma = cte$

D'où $\boxed{P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma}$

Q2 $\boxed{Q_{AB} = 0}$ car la transformation est adiabatique

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} -P_{ext}\, dV$$ or le cycle est parcouru

de façon réversible $\Rightarrow$ $P_{ext} = P = \dfrac{\overset{= cte}{PV^\gamma}}{V^\gamma}$

$$\Rightarrow W_{AB} = -PV^\gamma \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V^\gamma} = -PV^\gamma \left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{V_A}^{V_B}$$

$$W_{AB} = \frac{P_B V_B^\gamma \cdot V_B^{1-\gamma} - P_A V_A^\gamma V_A^{1-\gamma}}{\gamma - 1}$$

$$\boxed{W_{AB} = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma - 1}}$$

Q3. $\boxed{W_{BC} = 0}$ car la transformation $B \to C$ est isochore

D'après le 1er principe : $Q_{BC} = \Delta U_{BC}$

$$\Rightarrow \boxed{Q_{BC} = n C_{vm} (T_C - T_B)}$$

Q4. D'après le 1er principe enthalpique :

$\Delta H_{CD} = Q_{CD}$ car $C \rightarrow D$ est une transformation isobare :

d'où $\boxed{Q_{CD} = n C_{p,m} (T_D - T_C)}$

Q5. $\boxed{Q_{DE} = 0}$ car adiabatique

$Q_{EA} = \Delta U_{EA}$ (car isochore $\Rightarrow W_{EA} = 0$)

$\boxed{Q_{EA} = n C_{v,m} (T_A - T_E)}$

Q6. U est une fonction d'état donc sa variation sur 1 cycle est nulle (le système revient à son état initial)

Q7. $\Delta U = Q_{total} + W_{total}$

$\Rightarrow \boxed{W_{total} = -Q_{total} = Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{EA}}$

$W_{total} = n C_{vm} (T_C - T_B) + n C_{pm} (T_D - T_C) + n C_{vm} (T_A - T_E)$

Q8. $PV^{\gamma} = cte$ sur $A \rightarrow B$

Or $PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V}$

$nRTV^{\gamma-1} = cte$ donc $TV^{\gamma-1} = cte$
(n et R constants aussi)

$$\Rightarrow \quad T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{T_B = T_A \alpha^{\gamma-1}}$$

Q9. $B \rightarrow C$ est isochore $\Rightarrow \dfrac{P}{T} = \dfrac{nR}{V} = cte$

$$\frac{P_C}{T_C} = \frac{P_B}{T_B} = \frac{P_B}{T_A \alpha^{\gamma-1}}$$

$$\Rightarrow T_C = \frac{P_C}{P_B} T_A \alpha^{\gamma-1} \Rightarrow \boxed{T_C = T_A \delta . \alpha^{\gamma-1}}$$

Q10. $C \rightarrow D$ est isobare $\Rightarrow \dfrac{V}{T} = \dfrac{nR}{P} = cte$

$$\Rightarrow \frac{V_C}{T_C} = \frac{V_D}{T_D} = \frac{V_C}{T_A \delta \alpha^{\gamma-1}}$$

$$\Rightarrow T_D = T_A \delta \alpha^{\gamma-1} \frac{V_D}{V_C} \Rightarrow \boxed{T_D = T_A \beta . \delta . \alpha^{\gamma-1}}$$

Q11. $E \rightarrow A$ isochore $\Rightarrow \dfrac{P}{T} = cte$

$$\frac{P_E}{T_E} = \frac{P_A}{T_A} \Rightarrow T_E = T_A \frac{P_E}{P_A}$$

et $\quad P_E V_E^{\gamma} = P_D V_D^{\gamma} = P_C V_D^{\gamma}$

or $\quad \dfrac{V_C}{T_C} = \dfrac{V_D}{T_D} \Rightarrow P_E V_E^{\gamma} = P_C V_C^{\gamma} \left(\dfrac{T_D}{T_C}\right)^{\gamma}$

et $\frac{T_D}{T_C} = \beta \Rightarrow P_E V_E^\gamma = P_C V_C^\gamma \cdot \beta^\gamma.$

$$\Rightarrow P_E = P_C \left(\frac{V_C}{V_E}\right)^\gamma \beta^\gamma = P_C \left(\frac{V_B}{V_E}\right)^\gamma \beta^\gamma$$

or $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$

$$V_B = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot V_A \Rightarrow P_E = P_C \left(\frac{V_A}{V_E}\right)^\gamma \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \beta^\gamma$$

$$\Rightarrow T_E = \frac{T_A}{P_A} \cdot P_C \underbrace{\left(\frac{V_A}{V_E}\right)^\gamma}_{=1} \underbrace{\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}_{=\alpha^{1-\gamma}} \cdot \beta^\gamma$$

$$T_E = T_A \frac{P_C}{P_A} \alpha^{-\gamma} \cdot \beta^\gamma$$

et $P_A = \frac{P_B V_B^\gamma}{V_A^\gamma}$

$$T_E = T_A \cdot \frac{P_C}{P_B} \underbrace{\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma}_{=\alpha} \alpha^{-\gamma} \beta^\gamma = T_A \cdot \delta$$

$$\boxed{T_E = T_A \cdot \delta \cdot \beta^\gamma}$$

Q 12 $\eta = \frac{-W_{tot}}{Q_{BC} + Q_{CD}}$

$$\Rightarrow \eta = \frac{Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{EA}}{Q_{BC} + Q_{CD}} = 1 + \frac{Q_{EA}}{Q_{BC} + Q_{CD}}$$

$$\eta = 1 + \frac{n C_{v,m}(T_A - T_E)}{n C_{v,m}(T_C - T_B) + n C_{p,m}(T_D - T_C)}$$

$$\eta = 1 + \frac{T_A - T_E}{T_C - T_B + \gamma(T_D - T_C)}$$

$$\eta = 1 + \frac{T_A(1 - \delta\beta^\gamma)}{T_A \delta . \alpha^{\gamma-1} - T_A \alpha^{\gamma-1} + \gamma(T_A \beta.\delta.\alpha^{\gamma-1} - T_A \delta . \alpha^{\gamma-1})}$$

$$\eta = 1 + \frac{1 - \delta\beta^\gamma}{\delta\alpha^{\gamma-1} - \alpha^{\gamma-1} + \gamma\beta\delta\alpha^{\gamma-1} - \gamma\delta\alpha^{\gamma-1}}$$

$$\boxed{\eta = 1 + \frac{1 - \delta\beta^\gamma}{\alpha^{\gamma-1}(\delta - 1 + \gamma\delta(\beta - 1))}}$$

Q13 $8L \rightarrow 100$ km parcourus à 100km/h

donc 8L pour 1h.

et $m = \rho V$

Nb de cycles en 1h :

$\frac{1}{2} \times 2000 \times 60 = 60\,000$

$$\Rightarrow \quad m_c = \frac{\rho V}{60000}$$

AN : $m_c = \frac{0{,}874 . 8}{60\,000} = 1{,}17 . 10^{-4}$ kg

$\underline{m_c = 0{,}117 \text{ g}}$

Exercice 4 :

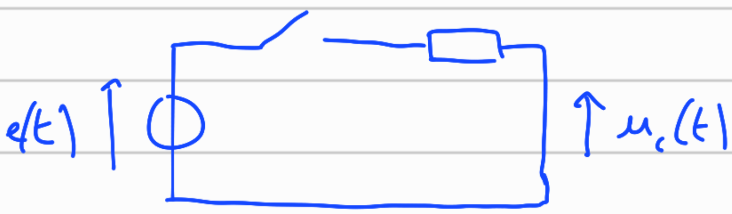
Q1. $f = \frac{c}{\lambda}$ AN : $f = \frac{3{,}00.10^8}{1829} = \underline{1{,}64.10^5 Hz}$

Q2 $\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$

Q3. * à basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert :

On a donc $\lim\limits_{f \to 0} u_c(t) = e(t)$

* à haute fréquence, le condensateur est équivalent à un fil et la bobine à un interrupteur ouvert :



On a donc $\lim\limits_{f \to +\infty} u_c(t) = 0$

Q4 Pont diviseur de tension en complexes :

$$\underline{u_c} = \frac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_c}} \underline{e}$$

avec $\underline{Z_c} = \frac{1}{jC\omega}$ $\quad \underline{Z_L} = r + jL\omega$ $\quad \underline{Z_R} = R$

et $\underline{u_c} = \underline{U_m} e^{j\omega t}$ et $\underline{e} = E_m e^{j\omega t}$

On obtient : $\underline{U_m} = \dfrac{1/jC\omega}{(R+r) + j(L\omega - 1/C\omega)} E_m$

$$\underline{U_m} = \frac{E_m}{(R+r)jC\omega + j^2(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \cdot C\omega} = \frac{E_m}{(1 - LC\omega^2) + j(R+r)C\omega}$$

Par identification avec la forme proposée

$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = LC\omega^2$; $(R+r)C\omega = \frac{\omega}{\omega_0 Q}$; $\boxed{A = E_m}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$(R+r)C = \frac{\sqrt{LC}}{Q} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Q5 $$U_m = \frac{E_m}{\sqrt{(1-X)^2 + \frac{X}{Q^2}}}$$

U_m est maximale lorsque $(1-x)^2 + \frac{x}{Q^2}$ est minimal.

$\Rightarrow$ Etude de la fonction $f(x) = (1-x)^2 + \frac{x}{Q^2}$

$$f'(x) = -2(1-x) + \frac{1}{Q^2}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{Q^2} - 2$$

$f'(x)$ est affine, de pente $2x$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{1}{Q^2} - 2$.

$f'(x)$ s'annule en changeant de signe si $\frac{1}{Q^2} - 2 < 0$

$\Leftrightarrow \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

On a alors $\boxed{x_r = 1 - \frac{1}{2Q^2}}$

d'où $\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0}$

Q6. Graphiquement, on lit $f_r = 164$ kHz
$\Rightarrow$ bon réglage de C pour écouter France inter.

Analyse du graphique de la phase pour obtenir ω_0 :

$$\varphi = \arg(\underline{u_m}) = \arg\left(\frac{E_m}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}\right)$$

$$= \arg(E_m) - \arg\Big(\underbrace{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}_{\text{partie réelle pas toujours} > 0} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}\Big)$$

$$= -\arg\left(\frac{-j}{-j}\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)\right)$$

$$= -\arg\left(\frac{\omega}{\omega_0 Q} + j\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right)\right) + \arg(-j)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{(\omega/\omega_0)^2 - 1}{\frac{\omega}{\omega_0 Q}}\right)$$

Pour $\omega = \omega_0$ $\varphi = -\pi/2$

On lit sur le graphique de la phase $f_0 = 164$ kHz (utilisation de l'échelle)

Or $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega_0^2}$

AN : $C = \frac{1}{170.10^{-6}.(164.10^3)^2 4\pi^2} = 5{,}54.10^{-9}$ F $= \underline{5{,}54 \text{ nF}}$

(Et f_0 est très proche de $f_R \Rightarrow Q$ est élevé).

Q7. Pour $\omega = \omega_0$ on a $\frac{U_m(\omega_0)}{E_m} = Q$

On lit $Q = 17,5$.

Et $Q = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\Rightarrow \boxed{R+r = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{Q}}$$

AN : $R+r = \frac{1}{17,5} \cdot \sqrt{\frac{170.10^{-6}}{5,54.10^{-9}}} = \underline{10\,\Omega}$

Exercice 5 :

Q1. D'après la $1^{ère}$ loi de Newton appliqué au système voiture dans R_T galiléen :

$\vec{P} + \vec{F_{el}} = \vec{0} \Rightarrow -mg\vec{u_z} - k(z_e - l_0)\vec{u_z} = \vec{0}$

$$\boxed{z_e = l_0 - \frac{mg}{k}}$$

Q2 $\vec{F_{el}} = -k(l - l_0)\vec{u_{ext}}$

avec $l = z - z_s$ et $\vec{u_{ext}} = \vec{u_z}$

$$\boxed{\vec{F_{el}} = -k(z - z_s - l_0)\vec{u_z}}$$

Q3. le PFD appliqué au système voiture dans $\mathcal{R}_T$ galiléen donne :

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{F_{el}} + \vec{F} = m\vec{a}$

$-mg\vec{u_z} - k(z - z_s - l_0)\vec{u_z} - h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{u_z} = m\vec{a}$

En projetant sur la direction (Oz) on a :

$-mg - k(z - z_s - l_0) - h(\dot{z} - \dot{z}_s) = m\ddot{z}$

$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = -mg + k(z_s + l_0) + h\dot{z}_s$

or $-mg + kl_0 = kz_e$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = k(z_s + z_e) + h\dot{z}_s}$$

Q4 $m\ddot{z} + h\dot{z} + k(z - z_e) = kz_s + h\dot{z}_s$

Avec $z' = z - z_e$ on a $\dot{z}' = \dot{z}$ et $\ddot{z}' = \ddot{z}$

$\Rightarrow \quad m\ddot{z}' + h\dot{z}' + kz' = kz_s + h\dot{z}_s$

On pose $\quad y(t) = kz_s(t) + h\dot{z}_s(t)$

Q5 $z' = \underline{Z}' e^{j\omega t} \quad ; \quad \dot{z}' = j\omega \underline{Z}' e^{j\omega t} \quad ; \quad \ddot{z}' = -\underline{Z}'\omega^2 e^{j\omega t}$

$z_s = \underline{Z_s} e^{j\omega t} \quad ; \quad \dot{z}_s = j\omega \underline{Z_s} e^{j\omega t}$

D'où $-m\underline{Z}'\omega^2 + h(j\omega)\underline{Z}' + k\underline{Z}' = k\underline{Z_s} + h(j\omega)\underline{Z_s}$

$$\underline{Z}'\left(k - m\omega^2 + jh\omega\right) = \underline{Z_s}(k + jh\omega)$$

$$\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z_s}} = \frac{k + jh\omega}{k - m\omega^2 + jh\omega} = \frac{\frac{k}{m} + j\frac{h}{m}\omega}{\frac{k}{m} - \omega^2 + j\frac{h}{m}\omega}$$

$$\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z_s}} = \frac{\omega_0^2 + 2\lambda j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\lambda\omega}$$

Q6. En prenant le module, on a bien :

$$\boxed{H = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}}$$

Q7. a) Pour $\omega \to 0$ $H \sim 1$

La masse suit le relief du sol :

$z = z_s + z_e$ $\Rightarrow$ le ressort est constamment à sa longueur d'équilibre.

b) Pour $\omega \to +\infty$ $H \sim \sqrt{\dfrac{4\lambda^2\omega^2}{\omega^4}}$

donc $\lim\limits_{\omega \to +\infty} H = 0$

A haute fréquence, la masse m ne bouge pas dans la direction Oz

$\Rightarrow$ $z = z_e$.

Q8. Le dénominateur s'annule pour

$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2$ minimal.

On pose $X = \omega^2$ et

$f(X) = (\omega_0^2 - X)^2 + 4\lambda^2 X$

$f'(X) = -2(\omega_0^2 - X) + 4\lambda^2$

$f'(X) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\omega_0^2 - X_r = 2\lambda^2$

$X_r = \omega_0^2 - 2\lambda^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}}$ (car $\omega_0^2 > 2\lambda^2$ d'après l'énoncé)

ω_r est la pulsation de résonance en élongation.

Q9 - D'après les questions précédentes :