

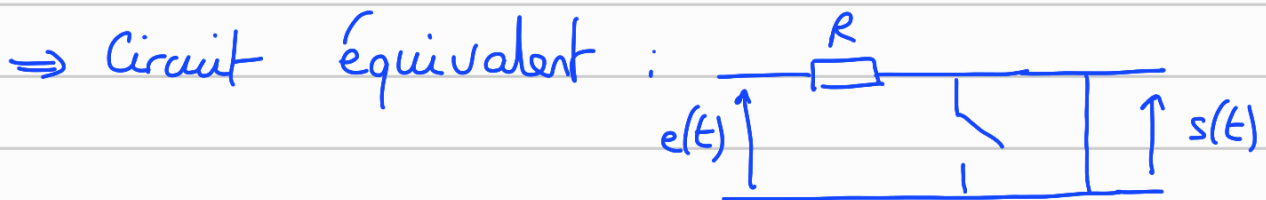
DS 6 . Correction

Ex 1

Q1 * $\bar{A}$ basse fréquence :

$$|Z_c| = \frac{1}{C\omega} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \text{---} \diagup \text{---} \quad (\text{interrupteur ouvert})$$

$$|Z_L| = L\omega \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{---} \bullet \bullet \text{---} \quad (\text{fil})$$

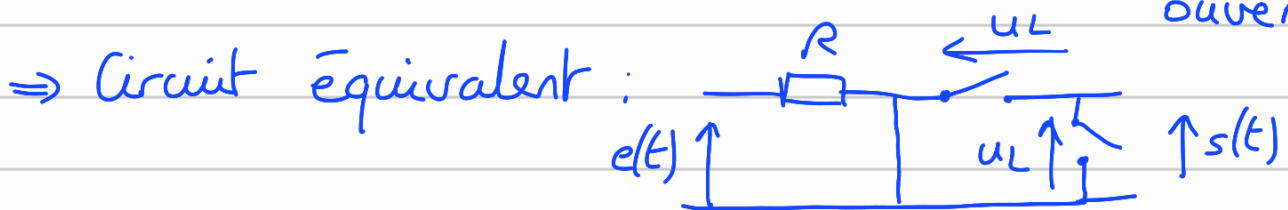


$$\Rightarrow s = 0 \quad (\text{tension nulle aux bornes d'un fil})$$

* $\bar{A}$ haute fréquence :

$$|Z_c| = \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{---} \bullet \bullet \text{---} \quad (\text{fil})$$

$$|Z_L| = L\omega \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \text{---} \diagup \text{---} \quad (\text{interrupteur ouvert})$$

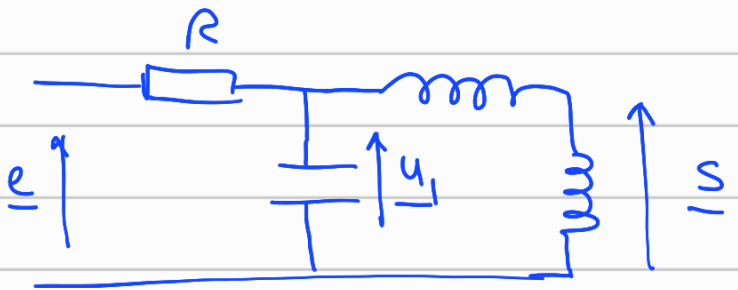


$$\text{or } \underset{u_L}{s(t)} + u_L = 0 \quad (\text{tension aux bornes d'un fil})$$

$$\Rightarrow u_L = 0 \quad (\text{les 2 bobines sont traversées par le même courant, qui est nul pour } \omega \rightarrow \infty)$$
$$\Rightarrow s = 0$$

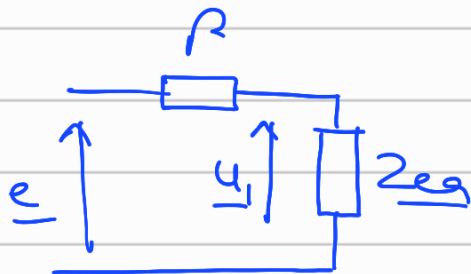
⇒ Ce filtre ne transmet ni les basses fréquences, ni les hautes fréquences
 ⇒ passe-bande.

Q2. $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$



Par un pont diviseur de tension on a $\underline{s} = \frac{\underline{u}_1}{2}$

Et avec une impédance équivalente on a:



$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_{eq}}{R + \underline{Z}_{eq}} \underline{e} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z}_{eq}}} \underline{e}$$

avec $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = jC\omega + \frac{1}{2jL\omega}$

D'où $\underline{s} = \frac{1}{2(1 + jRC\omega + \frac{R}{2jL\omega})} \underline{e}$

⇒ $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 + j2RC\omega + \frac{R}{jL\omega}} = \frac{jL\omega/R}{1 + j\frac{L\omega}{R}(2 + 2jR\omega)}$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + 2j\frac{L}{R}\omega - 2LC(j\omega)^2}$$

$$Q3. \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 - 2LC\omega^2 + 2j\frac{L}{R}\omega}$$

Par identification :

$$\begin{cases} 2LC = \frac{1}{\omega_0^2} \\ \frac{2L}{R} = \frac{1}{\omega_0 Q} \\ \frac{L}{R} = \frac{H_0}{\omega_0 Q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$$

$$Q = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{R\sqrt{2LC}}{2L} = R\sqrt{\frac{C}{2L}}$$

$$H_0 = \frac{L\omega_0 Q}{R} = \frac{L}{\sqrt{2LC}} \cdot R\sqrt{\frac{C}{2L}} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{2}$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$	$Q = R\sqrt{\frac{C}{2L}}$	$H_0 = \frac{1}{2}$
-----------------------------------	----------------------------	---------------------

$$AN: \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-7}}} = \underline{707 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}}$$

$$Q = 10^4 \sqrt{\frac{10^{-7}}{2 \cdot 10^{-3}}} = \underline{70,7}$$

Q4. De 10^{-1} à 10^0 , G_{dB} augmente de 20dB
 $\Rightarrow$ pente de l'asymptote BF = +20 dB/dec.

De 10^0 à 10^1 , G_{dB} diminue de 20dB
 $\Rightarrow$ pente de l'asymptote HF = -20 dB/dec.

Q5 D'après la fonction de transfert :

$$G = |H(jx)| = \frac{H_0 x/Q}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

* À basse fréquence : $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow x \ll 1$

$$G \sim \frac{H_0 x/Q}{1} = \frac{x H_0}{Q}$$

$$\text{d'où } G_{dB} \sim +20 \log x + 20 \log \frac{H_0}{Q}$$

$\Rightarrow$ on retrouve bien la pente à +20dB/dec observée sur le diagramme.

* À haute fréquence : $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow x \gg 1$

$$G \sim \frac{H_0 x/Q}{x^2} = \frac{H_0}{Qx}$$

$$\text{d'où } G_{dB} \sim -20 \log x + 20 \log \frac{H_0}{Q}$$

$\Rightarrow$ pente à -20 dB/dec.

Intersection des asymptotes pour $x = 10^0$
et valeur de G_{dB} pour $x = 1$: $20 \log \frac{H_0}{Q} \sim -43 \text{ dB}$

Q6. $\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{H_0 j\omega/Q}{1-\omega^2 + j\omega/Q}\right)$

la partie réelle du dénominateur n'est pas toujours positive $\Rightarrow$ on divise numérateur et dénominateur par $j\omega/Q$

$$\varphi = \arg\left(\frac{H_0}{1 + \frac{1-\omega^2}{j\omega/Q}}\right) = 0 - \arg\left(1 - j\frac{Q(1-\omega^2)}{\omega}\right)$$

* À basse fréquence $\omega \ll 1$: $\varphi = -\arg(1 - j\frac{Q}{\omega})$

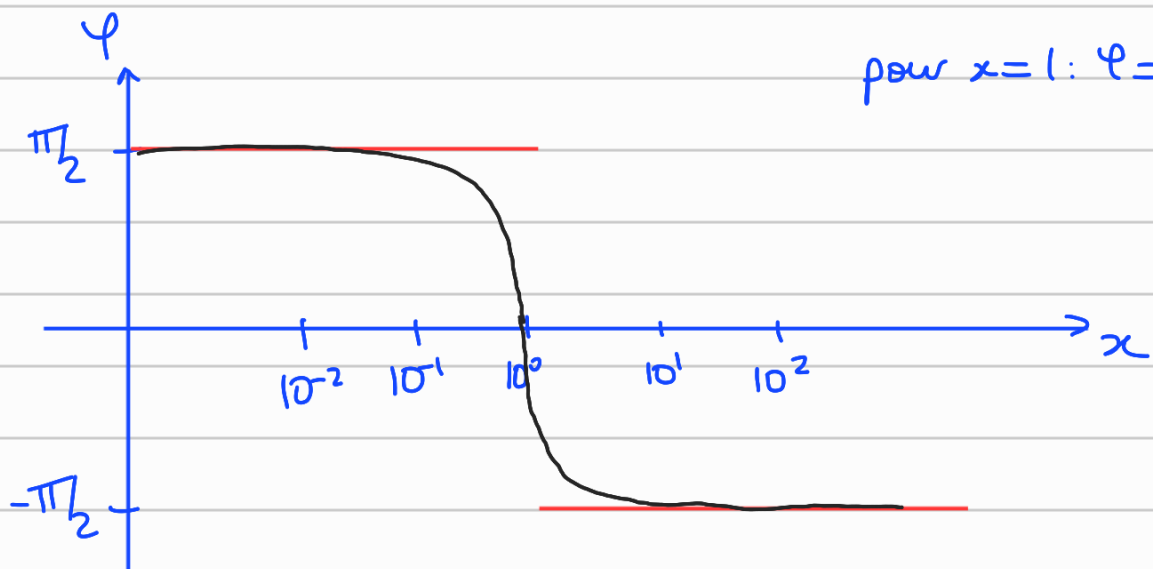
$$\varphi = -\arctan\left(-\frac{Q}{\omega}\right)$$

Pour $\omega \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow \pi/2$

* À haute fréquence $\omega \gg 1$ $\varphi = -\arg(1 + jQ\omega)$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{Q\omega}{1}\right)$$

Pour $\omega \rightarrow +\infty$ $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$



$$Q7. \quad G_1 = G_{dB}(z=1) = 20 \log \left(\frac{H_0 / \omega}{\sqrt{(1 - 1^2)^2 + \frac{1^2}{Q^2}}} \right)$$

$$\boxed{G_1 = 20 \log H_0}$$

$$G_1 = 20 \log \left(\frac{1}{2} \right) = \underline{-6 \text{ dB}}$$

G_2 correspond à l'intersection des asymptotes

$$\boxed{G_2 = 20 \log \frac{H_0}{\omega}}$$

$$G_2 = \underline{-43 \text{ dB}} \quad (\text{voir } Q5)$$

$\Rightarrow$ cohérent avec le diagramme !

Q8. On a un intégrateur si $s(t) = \int e dt$

$\Rightarrow$ Passage en complexes : $\underline{s} = \frac{\underline{e}}{j\omega}$

$$\Rightarrow \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{j\omega} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = -\frac{j}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\pi/2}$$

$$G_{dB} = -20 \log \omega \Rightarrow \text{pente à } -20 \text{ dB/dec}$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = -\pi/2$$

$\Rightarrow$ À haute fréquence on a bien une pente à -20 dB/dec et une phase de $-\pi/2$ (pour $\alpha > 4$)

On a un dérivateur si $s(t) = \frac{de(t)}{dt}$

$$\Rightarrow \underline{s} = j\omega \underline{e} \quad \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = j\omega = \omega e^{j\pi/2}$$

$$G_{dB} = +20 \log \omega$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = +\pi/2$$

$\Rightarrow$ À basse fréquence, on a bien une pente à $+20 \text{ dB/dec}$ et une phase de $+\pi/2$ (pour $\omega < 3 \cdot 10^{-1}$)

Ce montage présente cependant un gain très faible à basse et haute fréquence $\Rightarrow$ les harmoniques concernées seront beaucoup atténuées, d'où une qualité de l'intégration ou de la dérivation faible.

$$\begin{aligned} \text{Q9 - } \underline{s}_1(t) &= \underline{H}(0) E_0 e^{j\varphi(0)} + \underline{H}(\omega_1) \cdot E_{1m} e^{j\omega_1 t} \\ &= G(\omega_1) E_{1m} e^{j(\omega_1 t + \varphi(\omega_1))} \\ &= \frac{H_0 \omega/Q E_{1m}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} e^{j(\omega_1 t - \arg(1 - j \frac{Q(1-x^2)}{x}))} \end{aligned}$$

avec $x = 1$ car $\omega_1 = \omega_0$ (et $H(0) = 0$)

$$\Rightarrow \underline{s}_1(t) = \frac{H_0}{Q} \frac{E_{1m}}{\sqrt{1/Q^2}} e^{j(\omega_0 t - 0)}$$

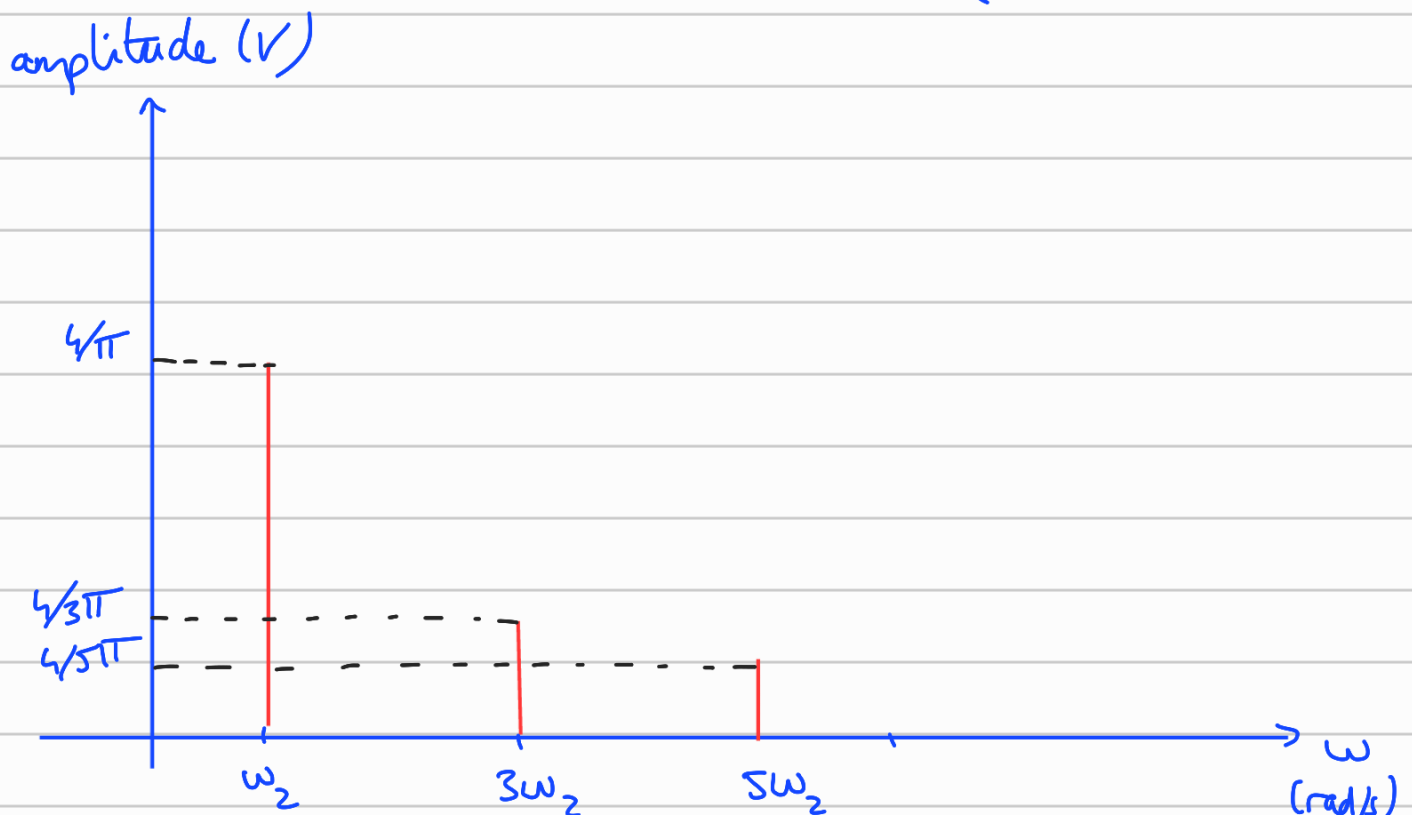
$$s_1(t) = \frac{E_{1m}}{2} \cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} Q10. E_{2eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e_2^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} e_2^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T e_2^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} E_{2m}^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T (E_{2m})^2 dt} = \sqrt{\frac{E_{2m}^2}{T} \left(\frac{T}{2} - 0 + T - \frac{T}{2} \right)} \end{aligned}$$

$$E_{2eff} = E_{2m}$$

Q11 amplitude de l'harmonique n impair:

$$S_{2(2n+1)m} = \frac{4}{\pi} E_{2m} \frac{1}{2n+1} = \frac{4E_{2m}}{(2n+1)\pi}$$



Q12 Sur le diagramme de Bode en gain
on lit $G_{dB}(\omega_0) = G_{dB}(x = 1/3) = -52 \text{ dB}$
 $G_{dB}(3\omega_0) = G_{dB}(x = 1) = -6 \text{ dB}$
 $G_{dB}(5\omega_0) = G_{dB}(x = 5/3) = -44 \text{ dB}$

avec $G_{dB} = 20 \log \frac{\text{amplitude de sortie}}{\text{amplitude d'entrée}}$

amplitudes en sortie : $10^{\frac{G_{dB}}{20}} \times \text{amplitude d'entrée}$

* 1^{er} pic : $= 10^{\frac{-52}{20}} \cdot \frac{4E_{2m}}{\pi} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

* 2^{ème} pic : $10^{\frac{-6}{20}} \cdot \frac{4E_{2m}}{3\pi} = 0,21 \text{ V}$

* 3^{ème} pic : $10^{\frac{-44}{20}} \cdot \frac{4E_{2m}}{5\pi} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

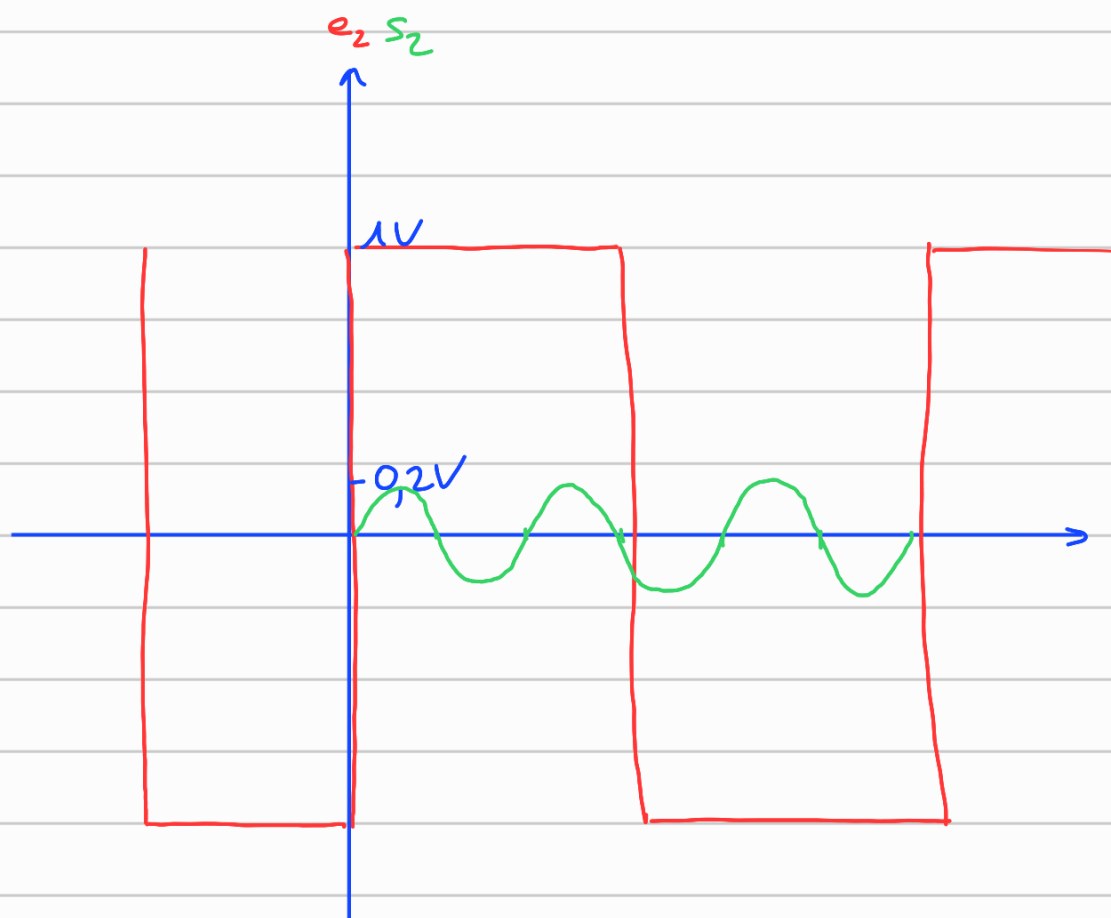
Q13 $s_2(t) = 3,2 \cdot 10^{-3} \sin(\omega_2 t + \varphi_1) + 0,21 \sin(3\omega_2 t + \varphi_2)$
 $+ 1,6 \cdot 10^{-3} \sin(5\omega_2 t + \varphi_3)$

avec $\varphi = \arg(\underline{H}) = -\arg\left(1 - j \frac{Q(1-x^2)}{x}\right)$

* pour $x = 1$ $\varphi_2 = 0$

on peut négliger les harmoniques 1 et 5
car leurs amplitudes sont très faibles.

$\Rightarrow s_2(t) = 0,21 \sin(3\omega_2 t + 0) = \underline{0,21 \sin(7,07 \cdot 10^7 t)}$



Exercice 2 :

Q1. $\vec{F}_g = -G \frac{m_T m_L}{r^2} \vec{e}_r$

avec $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}_L}{r_L}$

Q2. Il est judicieux de se placer dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$ pour étudier le mouvement de la lune autour de la Terre. Il est centré sur le centre de la Terre et les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines.

Q3. La lune est soumise à une seule force ($\vec{F}_g$) qui est centrale. Le TNC appliqué à la lune donne : $\frac{d\vec{L}_T}{dt} = \vec{J}_T(\vec{F}_g) = \vec{0}$

car $\vec{F}_g$ est porté par une droite qui passe par 0.

$\Rightarrow \vec{L}_T$ est une constante.

Or $\vec{L}_T = \vec{r}_L \wedge m\vec{v}(L/\mathcal{R}_g)$

les vecteurs $\vec{r}_L$ et $\vec{v}$ sont donc à tout instant orthogonaux à un vecteur constant orthogonal à $\vec{L}_T \Rightarrow$ ils sont contenus dans un plan orthogonal à $\vec{L}_T$, et contenant le centre de force (T).

Q4 En coordonnées polaires $\vec{r} = r\vec{u}_r$
et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

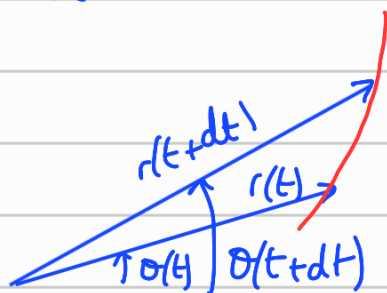
$$\Rightarrow \vec{L}_r = \vec{r} \wedge m\vec{v} = (r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta))$$

$$\Rightarrow \vec{L}_r = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z = c\vec{e}$$

La quantité $m r^2 \dot{\theta}$ est donc constante,
avec $m = cte$ on a aussi $r^2 \dot{\theta} = cte$

On pose $\boxed{r^2 \dot{\theta} = C}$

Q5. Loi des aires : l'aire balayée par
par le vecteur $\vec{r}$ par unité de
temps est constante au cours du
mouvement.



aire balayée pendant dt :

$$dt = \frac{1}{2} \left(r \cdot r d\theta + \underbrace{r d\theta \cdot dr}_{2^{\text{nd}} \text{ ordre}} \right) \approx \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

$$\frac{dt}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{C}{2}$$

Q6. le PFD appliqué à L dans $\mathcal{R}_g$ galiléen donne :

$$m \vec{a} = -G \frac{m_L m_T}{r^2} \vec{u}_r$$

On a donc $\vec{a} \cdot \vec{u}_\theta = 0$ et $\vec{a} \cdot \vec{u}_z = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Q7. } \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} \\ &= \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

$$\text{or } \dot{\theta} = \frac{c}{r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + \frac{c}{r} \vec{u}_\theta}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{L}}_r &= \vec{r} \wedge m_L (r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \\ &= r \dot{\theta} \vec{u}_r \wedge m_L (r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \\ &= m_L r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{L}}_r = m_L \frac{c}{r^2} \cdot r^2 \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{L}}_r = m_L c \vec{u}_z}$$

$$\text{Q8. } \vec{e} = \frac{(r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \frac{c}{r} \vec{u}_\theta) \wedge m_L c \vec{u}_z}{G m_T m_L} - \vec{u}_r$$

$$\vec{e} = \frac{-\dot{\theta} m_L c \vec{u}_r + m_L \frac{c^2}{r} \vec{u}_r}{G m_T m_L} - \vec{u}_r$$

$$\vec{e} = \frac{-\dot{r}C\vec{u}_\theta + C^2/r \vec{u}_r}{Gm_T} - \vec{u}_r$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}}{dt} &= \frac{-\ddot{r}C\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}C\vec{u}_r - \frac{C^2}{r^2}\dot{r}\vec{u}_r + \frac{C^2}{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta}{Gm_T} - \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ &= \frac{(\dot{r}\dot{\theta} - \frac{C}{r^2}\dot{r})\vec{u}_r + (\frac{C^2}{r}\dot{\theta} - \ddot{r}C)\vec{u}_\theta}{Gm_T} - \dot{\theta}\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

$$\text{or } C = r^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{(\dot{r}\dot{\theta} - \dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_r + (r^3\dot{\theta}^3 - \ddot{r}r^2\dot{\theta})\vec{u}_\theta}{Gm_T} - \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}}{dt} &= \frac{r^3\dot{\theta}^3 - \ddot{r}r^2\dot{\theta} - Gm_T\dot{\theta}}{Gm_T} \vec{u}_\theta \\ &= \frac{r^2\dot{\theta}(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r}) - Gm_T\dot{\theta}}{Gm_T} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

$$\text{Or d'après le AFD } \vec{a} \cdot \vec{u}_r = -\frac{Gm_T}{r^2}$$

$$\text{avec } \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\text{d'où } \vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{Gm_T}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{r^2\dot{\theta} \cdot Gm_T/r^2 - Gm_T\dot{\theta}}{Gm_T} \vec{u}_\theta = \vec{0}$$

donc $\vec{e}$ est une constante du mouvement.

Q9. $\vec{r} = r\vec{u}_r$ et $\vec{e} = e\vec{u}_x$

$$\Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{r} = r\vec{u}_r \cdot e\vec{u}_x$$

$$= er \cos \theta$$

Or on a aussi $\vec{e} = \frac{-iC\vec{u}_\theta + C^2/r\vec{u}_r}{Gm_T} - \vec{u}_r$

$$\Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{r} = \frac{C^2}{Gm_T r} - r$$

$$\Rightarrow er \cos \theta = \frac{C^2}{Gm_T} - r$$

$$\Rightarrow r(1 + e \cos \theta) = \frac{C^2}{Gm_T}$$

$$r = \frac{C^2/Gm_T}{1 + e \cos \theta}$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse
de paramètre $p = \frac{C^2}{Gm_T}$ et d'excentricité e .

Q10. Apogée = point de l'orbite le plus
éloigné de l'astre
attracteur (la Terre)
Périgée = point de l'orbite le plus
près de la Terre.

$$Q11. \quad r_A = r_{\max} = r(\theta = \pi)$$

$$r_A = \frac{p}{1-e}$$

$$r_P = r_{\min} = r(\theta = 0)$$

$$r_P = \frac{p}{1+e}$$

$$\Rightarrow \frac{r_A}{r_P} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow r_A(1-e) = r_P(1+e)$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{r_A - r_P}{r_P + r_A}}$$

$$p = r_A(1-e) = r_A \left(\frac{r_P + r_A - r_A + r_P}{r_P + r_A} \right)$$

$$\boxed{p = \frac{2r_A r_P}{r_A + r_P}}$$

$$AN: \quad e = \underline{6,54 \cdot 10^{-2}} \quad ; \quad p = \underline{380 \cdot 10^8 \text{ m}}$$

$$Or \quad C = \sqrt{p G m_T} \quad AN: \quad C = \underline{3,89 \cdot 10^{11} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}}$$

$$Q12. \quad D'après l'énoncé \quad \mathcal{A} = \pi \sqrt{a^3 \rho}$$

$$or \quad a = \frac{r_A + r_P}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \pi \sqrt{\frac{(r_A + r_P)^3}{8} \cdot \frac{2r_A r_P}{r_A + r_P}} = \pi \frac{r_A + r_P}{2} \sqrt{r_A \cdot r_P}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{A}}{T_L} = \frac{a\pi \sqrt{r_A r_P}}{T_L} = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{\rho G m_T}}{2}$$

$$\text{avec } \rho = \frac{2r_A r_P}{r_A + r_P} \Rightarrow \frac{a\pi \sqrt{r_A r_P}}{T_L} = \frac{\sqrt{r_A r_P} \cdot \sqrt{G m_T}}{\sqrt{2} \sqrt{2a}}$$

$$2\pi a^{3/2} = T_L \sqrt{G m_T} \Rightarrow \boxed{\frac{T_L^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G m_T}}$$

Q13. D'après la 3^e loi de Kepler

$$T_L = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G m_T}}$$

$$\text{AN : } T_L = 2,35 \cdot 10^6 \text{ s} \approx \underline{\underline{27,2 \text{ jours}}}$$

$$\text{Q14. } E_p(r) = -\mathcal{G} \frac{m_T m_L}{r}$$

$$\text{Q15. } E_c(r) = \frac{1}{2} m_L (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad \text{or } \dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$$

$$E_c(r) = \frac{1}{2} m_L \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_L \frac{c^2}{r^2}$$

$$\text{Q16. } E_m(r) = \frac{1}{2} m_L \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_L \frac{c^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G} m_T m_L}{r}$$

La lune étant soumise à la seule attraction gravitationnelle, qui est

une force conservative $E_m = \text{cte}$
d'après le TEN appliqué à la lune
dans R_g galiléen.

$$Q17. \quad E_m(r_A) = \frac{1}{2} m_L \frac{C^2}{r_A^2} - \frac{G m_T m_L}{r_A}$$

$$E_m(r_p) = \frac{1}{2} m_L \frac{C^2}{r_p^2} - \frac{G m_T m_L}{r_p}$$

$$2E_m r_{A,p}^2 + 2G m_T m_L r_{A,p} - m_L C^2 = 0$$

$$\Delta = (4G m_T m_L)^2 + 8 m_L C^2 E_m$$

$$\left. \begin{aligned} r_A &= \frac{-2G m_T m_L + \sqrt{\Delta}}{4E_m} \\ r_p &= \frac{-2G m_T m_L - \sqrt{\Delta}}{4E_m} \end{aligned} \right\} r_A + r_p = -\frac{G m_T m_L}{E_m}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{G m_T m_L}{r_A + r_p} = -\frac{G m_T m_L}{2a}}$$

$$AN: \quad E_m = \underline{\underline{-383 \cdot 10^{28} \text{ J}}}$$

$$Q18 \quad E_{m,f} = -\frac{G m_T m_L}{a}$$

(erreur dans
l'énoncé : $1/2$
grand axe $= a/2$)

$$Q19. E_{m,f} = \frac{1}{2} m_f v_f^2 - \frac{G m_T m_f}{R_T} = - \frac{G m_T m_L}{a}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2 G m_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right)}$$

$$AN : v = \underline{11,1 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1} = 11,1 \text{ km.s}^{-1}}$$

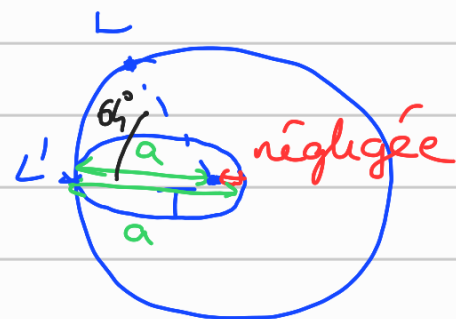
Q20. La Terre occupe un des foyers de l'ellipse.

$$\times \text{ période pour la fusée : } T_f = 2\pi \sqrt{\frac{(a/2)^3}{G m_T}}$$

$$\times \text{ période pour la Lune : } T_L = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G m_T}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2} T_f = T_L \Rightarrow \frac{T_f}{2} = 0,177 T_L$$

$$\text{Et } 360^\circ \rightarrow T_L \\ ? \rightarrow 0,177 T_L$$



La fusée doit démarrer lorsque l'angle $LT L' = 61^\circ$
(L' = apogée de la fusée sur son orbite elliptique)

Q21. La fusée parcourt la moitié de l'ellipse

$$\frac{T^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{G m_T} \Rightarrow \text{Durée} = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{8 G m_T}}$$

$$AN : \frac{T}{2} = 4,16 \cdot 10^5 \text{ s} \approx 4,8 \text{ jours.}$$

Exercice 3 :

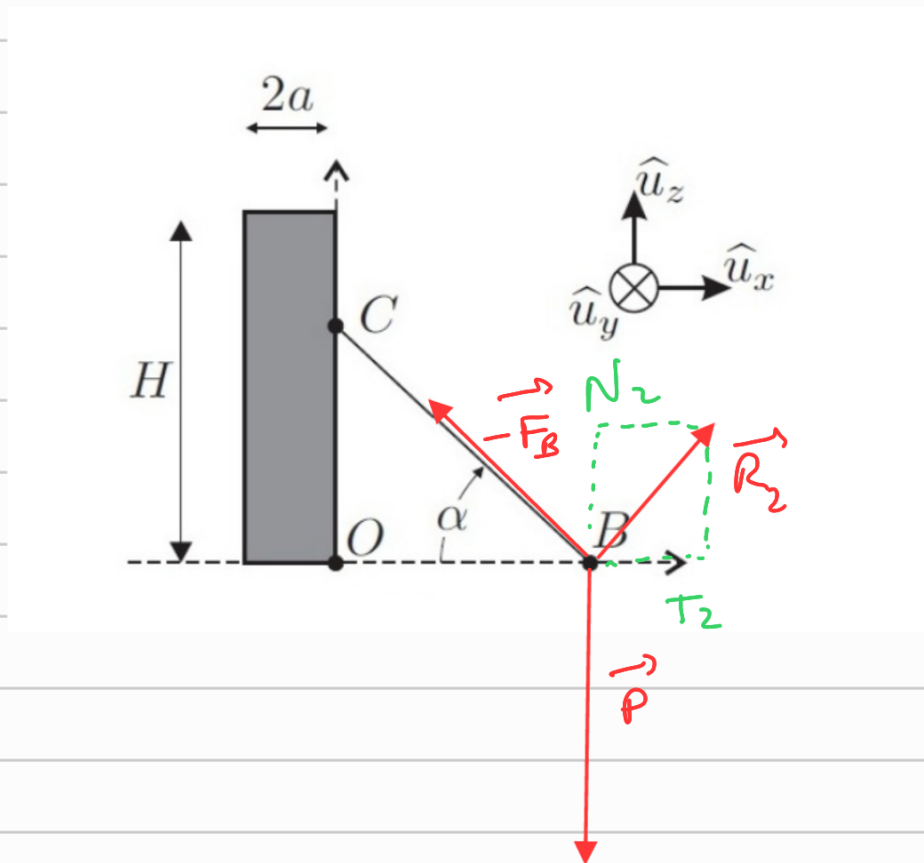
Q1. le principe d'inertie appliqué au câble dans R_T galiléen donne :

$$-\vec{F} + \vec{F}_B + \vec{P} = \vec{0}$$

↪ négligé ici

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_B.$$

Q2. Forces exercées sur le bûcheron :



à l'équilibre $\vec{P} - \vec{F}_B + \vec{R}_2 = \vec{0}$

Projection sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$
$$\begin{cases} -F \cos \alpha + T_2 = 0 \\ F \sin \alpha - mg + N_2 = 0 \end{cases}$$

et dans le cas du non glissement $T_2 < f \cdot N_2$

$$F = \frac{T_2}{\cos \alpha} < \frac{f N_2}{\cos \alpha}$$

(ici T_2 et $N_2 > 0$)

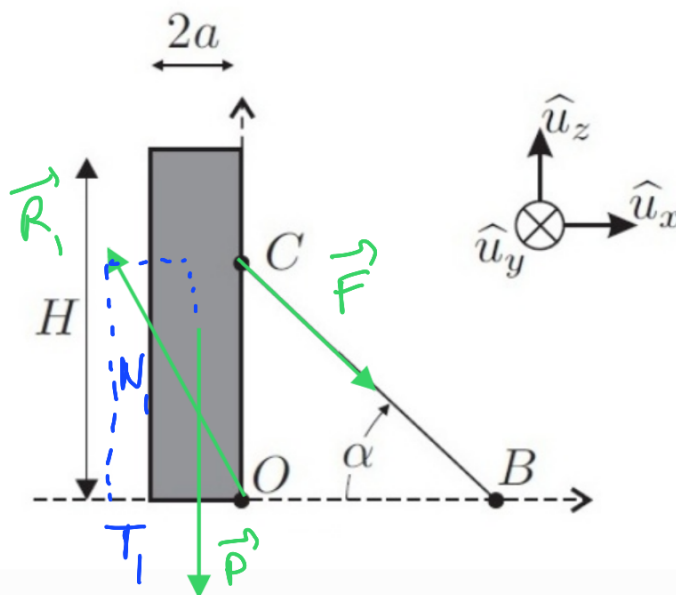
avec $N_2 = mg - F \sin \alpha$

$$F < \frac{f}{\cos \alpha} (mg - F \sin \alpha)$$

$$F \left(1 + \frac{f \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) < \frac{f mg}{\cos \alpha}$$

$$F < \frac{f mg}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

Q 3.



Première loi de Newton appliquée à l'arbre dans R_+ galiléen :

$$\vec{R}_1 + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{Projection sur } \vec{u}_x \text{ et } \vec{u}_y \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 + F \cos \alpha = 0 \\ -N_1 - F \sin \alpha + N_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = -F \cos \alpha \\ N_1 = N_2 + F \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\text{Il y a glissement si } |T_1| = f \cdot |N_1|$$

$$\text{or } T_1 < 0 \Rightarrow T_1 = -f N_1 \Rightarrow \frac{T_1}{N_1} = -f$$

$$\Rightarrow -\frac{F' \cos \alpha}{N_2 + F' \sin \alpha} = -f$$

$$-F' \cos \alpha = -f N_2 - f F' \sin \alpha$$

$$F' (f \sin \alpha - \cos \alpha) = -f N_2$$

$$F' = \frac{f N_2}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

$$\text{or } f N_2 > f m g \text{ et } \cos \alpha - f \sin \alpha < \cos \alpha + f \sin \alpha$$

$$\Rightarrow F' > F$$

donc si $0 \leq F \leq F_{\max}$ alors la condition de glissement au niveau de l'arbre n'est jamais satisfaite.

$$\begin{aligned}
 Q4. \quad \mathcal{M}_{Oy}(\vec{P}) &= (\vec{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_y \\
 &= \left[(-a\vec{u}_x + \frac{\pi}{2}\vec{u}_z) \wedge (-\pi g\vec{u}_z) \right] \cdot \vec{u}_y \\
 &= -a\pi g \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{Oy}(\vec{P}) = -a\pi g}$$

D'après le TNC appliqué à l'arbre dans R_+ galiléen, par rapport à l'axe Oy :

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\theta} &= \mathcal{M}_{Oy}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}_B) + \underbrace{\mathcal{M}_{Oy}(\vec{R}_1)}_{=0 \text{ car } \vec{R}_1 \text{ coupe } (Oy)}
 \end{aligned}$$

L'arbre commence à pivoter pour

$$\mathcal{M}_{Oy}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}_B) > 0$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}_B) > a\pi g}$$

Q6. L'angle α_m influe sur la distance bras de levier pour le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à (Oy) .

Le bras de levier est donné par $OB \sin \alpha$.
avec $OB = l \cos \alpha$

$$\Rightarrow \text{bras de levier} = l \cos \alpha \sin \alpha = \frac{l}{2} \sin 2\alpha$$

le bras de levier est maximal pour $\alpha_m = \pi/4$.

$$Q7. \mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}_B) = \frac{l}{2} \sin 2\alpha \cdot F_{\max} = \frac{lmg \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

$$\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}_B) = \frac{lmg}{f \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}}$$

$\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}_B)$ est maximal pour $\frac{1}{f \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$ minimal

On dérive par rapport à α pour trouver le minimum :

$$\frac{1}{f} (-\cos \alpha_m \cdot \sin^{-2} \alpha_m) + \sin \alpha_m \cos \alpha_m^{-2} = 0$$

$$\frac{1}{f} \frac{\cos \alpha_m}{\sin^2 \alpha_m} = \frac{\sin \alpha_m}{\cos^2 \alpha_m} \Rightarrow \frac{1}{f} \cos^3 \alpha_m = \sin^3 \alpha_m$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{(\tan \alpha_m)^3}$$

$$\Rightarrow \alpha_m = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{f}}\right)$$

Pour $f=1$ on a bien $\alpha_m = \pi/4$.

$$Q8. F_{\max} = \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

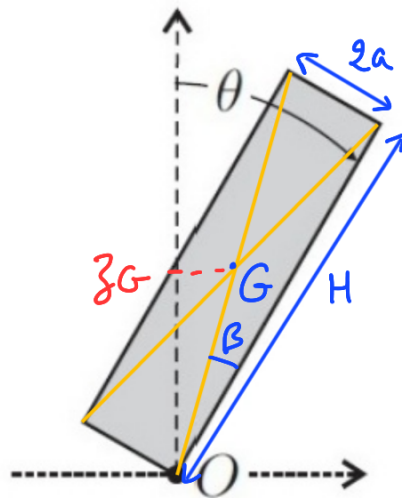
$$AN: F_{\max} = 693 \text{ N}$$

$$\text{et } \frac{l}{2} \sin 2\alpha \cdot F_{\max} > a \eta g$$

$$l > \frac{2a \eta g}{\sin 2\alpha \cdot F_{\max}}$$

$$\underline{l = 13,8 \text{ m}}$$

Q9.



$$E_p = \eta g z_G$$

$$\text{avec } \beta = \arctan \frac{2a}{H}$$

$$\text{et } z_G = OG \cos(\theta - \beta)$$

$$\text{avec } OG = \frac{1}{2} \text{ diagonale de l'arbre}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + H^2}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \eta g \sqrt{4a^2 + H^2} \cdot \cos\left(\theta - \arctan \frac{2a}{H}\right)$$

L'énergie potentielle est maximale pour $\theta = \arctan \frac{2a}{H}$. Au delà de cette valeur l'arbre va chuter.

(On peut aussi déterminer $\theta_{\min}$ avec le moment du poids : pour $\theta - \beta > 0$ G est à droite de O $\Rightarrow$ l'arbre chute. ce qui correspond au même $\theta_{\min} = \arctan \frac{2a}{H}$)

$$Q10 \quad \Gamma_v = \left(\sum \overrightarrow{ON_i} \wedge d\overrightarrow{F_v} \right) \cdot \overrightarrow{u_y}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{ON_i} = z_i \overrightarrow{u_z}$$

$$\text{et } d\overrightarrow{F_v} = 2a C_x \rho_a U^2 dz \overrightarrow{u_x}$$

$$\Rightarrow \Gamma_v = \int_0^H 2a C_x \rho_a U^2 z dz (\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_x}) \cdot \overrightarrow{u_y}$$

$$\boxed{\Gamma_v = a C_x \rho_a U^2 H^2}$$

Q11. D'après le texte

$$\begin{cases} \Gamma_r(0) = \Gamma_0 \\ \Gamma_r(\theta_c) = 0 \end{cases}$$

$$D'ou \quad \Gamma_0 (\beta + 0 + 0) = \Gamma_0 \Rightarrow \beta = 1$$

et on lit $\Gamma_r = 0$ pour $\theta = 10^\circ$

$$\Rightarrow \theta_c = 10^\circ.$$

$$Q12 \quad \left. \frac{d\Gamma_r}{d\theta} \right|_{\theta_m} = 0$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\Gamma_0 \left(1 + \frac{4\theta}{\theta_c} - 5 \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) \right) = 0$$

$$\frac{4}{\theta_c} - 10 \frac{\theta_m}{\theta_c^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_m = \frac{2}{5} \theta_c}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_m = \Gamma_r(\theta_m) &= \Gamma_0 \left(1 + 4 \cdot \frac{2}{5} - 5 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^2 \right) \\ &= \Gamma_0 \left(1 + \frac{8}{5} - \frac{20}{25} \right) = \Gamma_0 \left(\frac{25 + 40 - 20}{25} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma_m = \frac{9}{5} \Gamma_0}$$

Q13 . Graphiquement, on lit $\theta_m = 4^\circ$
or $\frac{2}{5} \cdot 10 = 4^\circ \Rightarrow$ cohérent

$$\text{et } \Gamma_m = -17 \cdot 10^3 \text{ N.m}$$

or $\frac{9}{5} \cdot (-10 \cdot 10^3) = -1800 \text{ N.m}$
 $\Rightarrow$ valeurs proches (écart relatif 5%)

Q14. le TEC scalaire appliqué à l'arbre dans R_+ galiléen par rapport à O_y donne :

$$\Delta E_c = \int_0^t (\Gamma_u + \Gamma_r) \cdot \dot{\theta} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - 0 = \int_0^{\theta} \left(\Gamma_u + \Gamma_o \left(1 + \frac{4\theta}{\theta_c} - \frac{5\theta^2}{\theta_c^2} \right) \right) d\theta$$

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \int_0^u \left(\Gamma_u + \Gamma_o + 4\Gamma_o \frac{\theta}{\theta_c} - 5\Gamma_o \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) d\theta$$

or $\Gamma_o < 0 \Rightarrow \Gamma_o = -|\Gamma_o|$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 &= (\Gamma_u - |\Gamma_o|) \theta - \frac{4}{\theta_c} |\Gamma_o| \frac{\theta^2}{2} + \frac{5|\Gamma_o|}{\theta_c^2} \frac{\theta^3}{3} \\ &= |\Gamma_o| \theta \left[\left(-1 + \frac{\Gamma_u}{|\Gamma_o|} \right) - 2 \frac{\theta}{\theta_c} + \frac{5}{3} \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = |\Gamma_o| \theta \left(p - 1 - 2u + \frac{5}{3} u^2 \right)}$$

Q15 l'arbre sera déraciné si $\dot{\theta} > 0$ pour tout θ de l'intervalle $[0, \theta_c]$, soit $u \in [0, 1]$

$$\dot{\theta} > 0 \Leftrightarrow p - 1 - 2u + \frac{5}{3} u^2 > 0$$

Minimum du polynôme : $\frac{5}{3}u^2 - 2u + p - 1$

$$\frac{10}{3}u - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{6}{10}$$

$$\text{Et } P(0,6) = \frac{5}{3} \frac{36}{100} - 2 \frac{6}{10} + p - 1$$

$$= \frac{180}{300} - \frac{12}{10} + p - 1$$

$$= \frac{6-12}{10} + p - 1 = -\frac{16}{10} + p.$$

Pour $p - \frac{16}{10} > 0$ l'arbre sera déraciné.

$$\Leftrightarrow p_c = 1,6 \quad \text{soit} \quad \Gamma_0 > 1,6 |\Gamma_0|$$

$$\Leftrightarrow a C_x \rho_a U^2 H^2 > 1,6 |\Gamma_0|$$

$$U > \sqrt{\frac{1,6 |\Gamma_0|}{a C_x \rho_a H^2}}$$

$$\text{AN : } \underline{U > 11,1 \text{ m.s}^{-1}}$$