DS 6 niveau 1 correction

Exercice 1 :

Q1. le signal a une valeur moyenne de 10 mV

Q2. En supposant le signal périodique, on repère 2 périodes entre $t_1 = 1{,}4$ ms et $t_2 = 7{,}7$ ms

D'où $T = \frac{t_2 - t_1}{2}$

AN : $T = \frac{7{,}7 - 1{,}4}{2}$ soit $T = 3{,}2$ ms

On en déduit $f = \frac{1}{T}$

AN : $f = \frac{1}{3{,}2.10^{-3}}$ soit $f = 3{,}2.10^{2}$ Hz

(valeur obtenue avec la valeur non arrondie de T)

Q3. Le signal étant supposé périodique, il peut être décomposé en série de Fourier. N'étant pas purement sinusoïdal, son spectre comportera des harmoniques (fréquences multiples du fondamental).

Q4. Ce filtre est un passe-haut (les fréquences inférieures à 100 Hz sont atténuées).

Q5 On lit la fréquence de coupure lorsque le déphasage vaut $\pi/2$: $f_0 = 10$ Hz

Pente de l'asymptote :

$G_{dB} = -60\ dB$ pour $f = 0{,}4\ Hz$

$G_{dB} = -20\ dB$ pour $f = 4\ Hz$

$\Rightarrow$ on a donc une pente à $+40\ dB/déc$.

Q6. * Gain et déphasage pour un signal de fréquence 2 Hz : $G_{dB} = -30\ dB$

soit $G = 0{,}03$

$\varphi = 0{,}85\pi\ rad$

* Idem, pour un signal de 20 Hz :

$G_{dB} = -5\ dB$

soit $G = 0{,}56$

$\varphi = 0{,}35\ \pi$

* Idem pour un signal de 200 Hz :

$G_{dB} = 0$

soit $G = 1$

$\varphi = 0°$.

On obtient donc en sortie :

$$s(t) = 0{,}03 E_0 \cos(\omega t + 0{,}85\pi) + 0{,}56 E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{2} + 0{,}35\pi\right)$$

$$+ E_0 \cos(100\,\omega t - \pi/3)$$

Soit
$$s(t) = 0{,}03 E_0 \cos(\omega t + 0{,}85\pi) + 0{,}56 E_0 \cos(10\omega t + 0{,}85\pi) + E_0 \cos\left(100\,\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

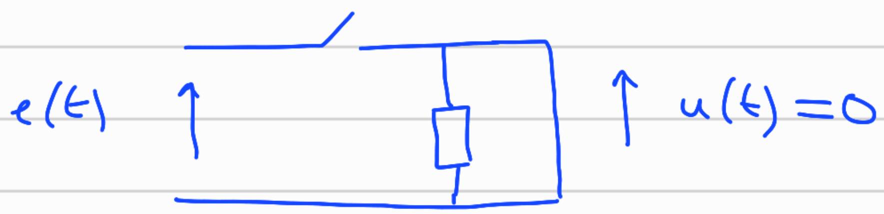
avec $E_0 = 1V$ on a :

$$\boxed{\begin{aligned} s(t) = &\ 0{,}03 \cos(\omega t + 0{,}85\pi) + 0{,}56 \cos(10\omega t + 0{,}85\pi) \\ &+ \cos(100\,\omega t - \pi/3) \end{aligned}}$$

Q7. * Comportement à basse fréquence :

condensateur $\Leftrightarrow$ interrupteur ouvert

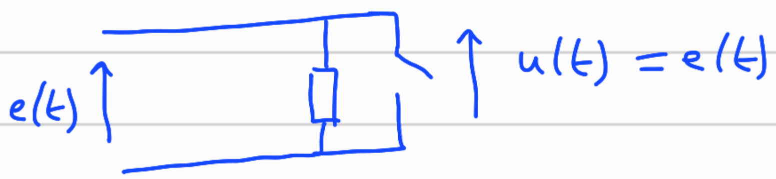
bobine $\Leftrightarrow$ fil



* Comportement à haute fréquence :

condensateur $\Leftrightarrow$ fil

bobine $\Leftrightarrow$ interrupteur ouvert.



Le filtre proposé est donc bien un passe haut.

Q8 a) $$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} \cdot \frac{1}{jC\omega}}$$

avec $$\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}\right)\left(\frac{1}{jC\omega}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{jRC\omega}-\frac{1}{LC\omega^2}}$$

$$\underline{H} = \frac{-LC\omega^2}{1-LC\omega^2+j\frac{LC\omega}{RC}}$$

$$\underline{H} = \frac{-LC\omega^2}{1-LC\omega^2+j\frac{L}{R}\omega}$$

En posant $\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$ on obtient

$$\underline{H} = \frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{L}{R}\omega} \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{H} = \frac{-x^2}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}}$$

Et on identifie avec la relation proposée :

$\boxed{K = -1}$ et $\frac{L}{R}\omega = \frac{\omega}{\omega_0 Q} = \frac{\omega}{Q}\sqrt{LC}$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{R} = \frac{\sqrt{LC}}{Q} \quad \Leftrightarrow Q = \frac{R\sqrt{LC}}{L}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

b) $\varphi = \arg(\underline{H})$

Or la partie réelle du dénominateur n'est pas toujours positive, on multiplie donc numérateur et dénominateur par $(-j)$.

$$\underline{H} = \frac{jx^2}{\frac{x}{Q} - j + jx^2}$$

Et $\arg(\underline{H}) = \arg(jx^2) - \arg\left(\frac{x}{Q} + j(x^2-1)\right)$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x^2-1}{x/Q}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \varphi = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\pi}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \underline{0}$$

c) $G = |\underline{H}| = \dfrac{|K|x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$

Pour $x \ll 1$ on a $G \simeq Kx^2$

$\Rightarrow G_{dB,BF} = 20\log(|K|x^2) = 20\log|K| + 40\log x$

La pente de l'asymptote à basse fréquence vaut donc $+40$ dB/dec.

d) Pour $x = 1$ $G = \frac{|K|}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}} = Q$ car $|K| = 1$

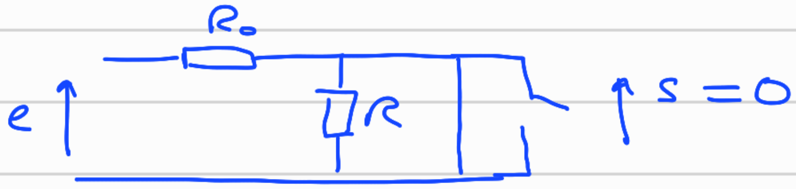
$x = 1 \Leftrightarrow f = f_0 = 10\,Hz$.

On lit $G_{dB}(f = 10\,Hz) = -10\,dB$

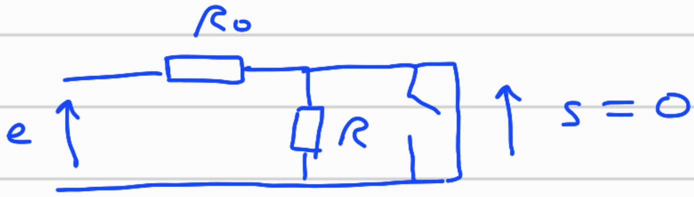
donc $G(x=1) = 10^{-\frac{10}{20}} = 0{,}3$.

On a donc $\underline{Q = 0{,}3}$

Q9. Comportement basse fréquence :



Comportement haute fréquence :



Ce filtre est donc un passe-bande.

Q10 Soit $\underline{Z'_{eq}}$ telle que $\frac{1}{\underline{Z'_{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Z'_{eq}}}{R_0 + \underline{Z'_{eq}}} = \frac{1}{1 + \frac{R_0}{\underline{Z'_{eq}}}}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R} - j\frac{R_0}{L\omega} + jR_0C\omega}$$

$$= \frac{1}{\frac{R_0+R}{R}\left(1 - j\,\frac{R_0R}{R_0+R}\cdot\frac{1}{L\omega} + j\,\frac{R_0RC\omega}{R_0+R}\right)}$$

$$= \frac{R/R_0+R}{1 - j\,\frac{R_0R}{L(R+R_0)}\,\frac{1}{\omega} + j\,\frac{R_0R}{R_0+R}\,C\omega}$$

Par identification, il vient :

$$\boxed{H_0 = \frac{R}{R_0+R}}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q}{\omega_0} &= \frac{R_0R}{R_0+R}\,C \\ Q\omega_0 &= \frac{R_0R}{(R_0+R)L} \end{aligned}\right\} \quad Q^2 = \frac{(RR_0)^2}{(R+R_0)^2}\,\frac{C}{L}$$

$$\boxed{Q = \frac{RR_0}{R+R_0}\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

et $\omega_0^2 = \frac{R_0R}{(R_0+R)L} \times \frac{R_0+R}{R_0R}\,\frac{1}{C} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

Q 11. $|\underline{H}| = \dfrac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

* A basse fréquence : $\omega \ll \omega_0$ $|\underline{H}| \simeq \dfrac{H_0 \omega}{Q\omega_0}$

$G_{dB,BF} = 20 \log \dfrac{H_0}{Q\omega_0} + 20 \log \omega$

l'asymptote basse-fréquence a donc une pente de $+20$ dB/déc.

* A haute fréquence $\omega \gg \omega_0$ $|\underline{H}| \simeq \dfrac{H_0\omega_0}{Q\omega}$

$G_{dB,HF} = 20 \log \dfrac{H_0\omega_0}{Q} - 20 \log \omega$

l'asymptote haute-fréquence a donc une pente de -20 dB/déc.

$\varphi = \arg(\underline{H}) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$

* A basse fréquence : $\omega \ll \omega_0$

$\varphi_{BF} = \pi/2$

* A haute fréquence $\omega \gg \omega_0$

$\varphi_{HF} = -\pi/2$

Q12. Le domaine d'allumage de la lampe correspond à la bande passante, puisque la lampe s'allume si le signal de sortie est supérieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ fois le signal d'entrée.

On veut que la bande passante ait une largeur de 20 Hz ($\pm$ 10 Hz sur la fréquence de la note voulue).

Or $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$

AN avec $f_0 = 329{,}6$ Hz et $\Delta f = 20$ Hz

$\underline{Q = 16}$

Q13 On a établi à la question Q10 que

$$Q = \frac{RR_0}{R+R_0}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\Rightarrow f_0 \cdot Q = \frac{RR_0}{R+R_0}\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{RR_0}{2\pi(R+R_0)} \cdot \frac{1}{L}$$

$$\boxed{L = \frac{RR_0}{2\pi f_0 Q(R+R_0)}}$$

$$\frac{Q}{f_0} = \frac{RR_0}{R+R_0}\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi \frac{RR_0}{R+R_0} C$$

$$\boxed{C = \frac{Q(R+R_0)}{2\pi R R_0 \cdot f_0}}$$

Exercice 2 :

Q1. $\vec{F_e} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}$

avec $\vec{u}$ = vecteur unitaire dirigé du proton vers l'électron.

Q2. La force électrique est conservative, elle dérive d'une énergie potentielle :

$\delta W(\vec{F_e}) = -dE_p$

$\vec{F_e} \cdot d\vec{OM} = -dE_p$

$$-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\underbrace{\vec{u} \cdot d\vec{OM}}_{=dr} = -dE_p$$

$$d\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = -dE_p$$

$$\Rightarrow E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte$$

En prenant le zéro de l'énergie potentielle à l'infini, la constante est nulle :

$$\boxed{E_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Q3. On applique le TMC au système {électron} dans le référentiel R galiléen :

$$\frac{d\vec{L_0}(M/R)}{dt} = \vec{\mathcal{M}_0}\vec{F_e}$$

(on néglige le poids de l'électron).

$\vec{\mathcal{M}_0}(\vec{F_e}) = \vec{OM} \wedge \vec{F_e} = \vec{0}$ car $\vec{OM}$ et $\vec{F_e}$ sont colinéaires.

Le moment cinétique de l'électron par rapport à O est nul, son mouvement est donc contenu dans un plan (formé par $\vec{OM}$ et $\vec{v}$)

Q5. $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

or $\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ en coordonnées polaires.

On obtient : $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

D'autre part $\vec{L}_0(n/R) = \vec{On} \wedge m\vec{v} = \vec{L}$ constant

Soit $\vec{L} = r\vec{u_r} \wedge m(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}$

Et $\|\vec{L}\| = L = mr^2\dot{\theta}$

On a donc $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ et en injectant dans E :

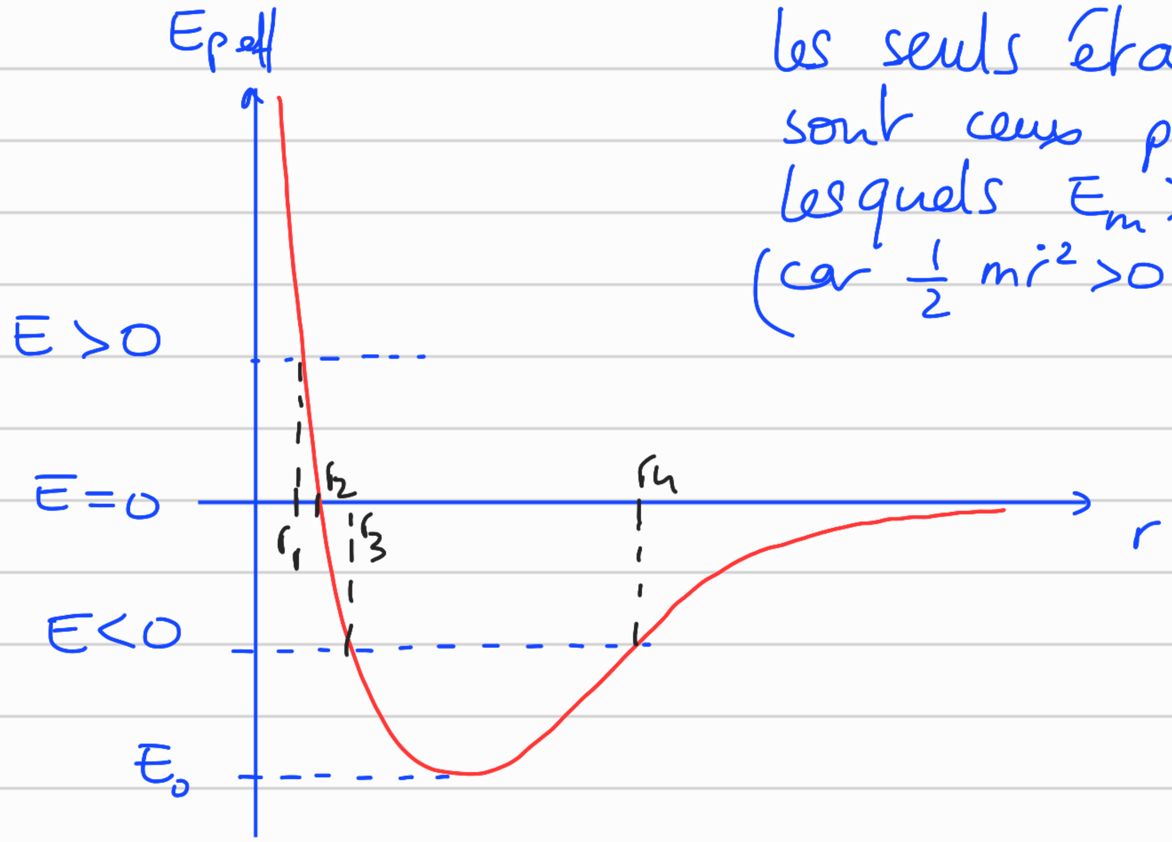
$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \frac{L^2}{m^2 r^4} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

On pose $\boxed{E_{peff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

Q6. * Pour $r \to 0$ c'est le terme en $\frac{1}{r^2}$ qui domine

* Pour $r \to +\infty$ c'est le terme en $-\frac{1}{r}$ qui domine



les seuls états possibles sont ceux pour lesquels $E_m > E_{p,eff}$ (car $\frac{1}{2} m\dot{r}^2 > 0$)

* Pour $E>0$ le mouvement est limité à $r > r_1$ r peut prendre des valeurs infinies. c'est un état de diffusion. La trajectoire est une branche d'hyperbole de foyer O

* Pour $E=0$ $r > r_2$ c'est le mouvement limite entre un mouvement non borné et un mouvement lié. C'est un état de diffusion. La trajectoire est une parabole de foyer O.

* Pour $E<0$ le mouvement est limité à $r_3 < r < r_4$. C'est un mouvement lié, la trajectoire est une ellipse de foyer O

* Pour $E = E_0$ le mouvement est limité à $r = r_0$ il s'agit d'un mouvement circulaire de centre O.

Q6. L'orbite circulaire est possible pour $L \neq 0$ et $E = E_0 = E_{peff}(r_0)$

(= valeur minimale de E_{peff})

$$\left.\frac{dE_{peff}}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \iff \frac{-L^2}{m r_0^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} = 0$$

$$\iff \frac{L^2}{m_e r_0} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\iff \boxed{r_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{m \cdot e^2}}$$

$$E_0 = \frac{L^2}{2m \cdot 4^2\pi^2\varepsilon_0^2 L^4} \cdot m^2 e^4 - \frac{e^2 \cdot m e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 4\pi\varepsilon_0 L^2}$$

$$E_0 = \frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 L^2} - \frac{me^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2 L^2}$$

$$\boxed{E_0 = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 L^2}}$$

Q7. La trajectoire de l'électron est rectiligne si $L=0$ ($\vec{OM}$ et $\vec{v}$ colinéaires)

Q8. D'après le PFD appliqué au système {électron} dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$$

or $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta} = v\vec{u_\theta}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\dot{\theta}^2\vec{u_r}$$

$$\Rightarrow -mr\dot{\theta}^2 = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -m\frac{v^2}{r}$$

Le moment cinétique de l'électron (constant) vaut $L = mvr = n\hbar$

soit $v = \frac{n\hbar}{mr}$

$$\Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{m.n^2\hbar^2}{m^2r^3}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{4\pi\varepsilon_0 \cdot \hbar}{me^2} n^2 \qquad \text{or } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{\varepsilon_0 h^2}{me^2 \cdot \pi} \cdot n^2}$$

Les rayons sont donc quantifiés, ils ne peuvent prendre que des valeurs discrètes.

L'orbite pour $n=1$ a pour rayon a_0 :

$$a_0 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{me^2\pi}$$

AN : $$a_0 = \frac{8{,}85.10^{-12} . 6{,}63.10^{-34}}{9{,}1.10^{-31} . (1{,}6.10^{-19})^2 . \pi}$$

$$a_0 = 5{,}3.10^{-11}\ m \quad \text{soit } \underline{a_1 = 53\ pm}$$

Q9. $$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

or $$mv^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

On remplace r par son expression :

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{m.e^2.\pi}{\varepsilon_0 h^2 n^2} \quad = \frac{1}{a_0}$$

$$\boxed{E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0} \times \frac{1}{n^2}}$$

Pour le niveau fondamental $(n=1)$ on a :

$$E = -\frac{(1{,}6.10^{-19})^2}{8\pi.8{,}85.10^{-12}.5{,}3.10^{-11}} = -2{,}2.10^{-18}\ \text{J}$$

$E = -14\ \text{eV}$

Q 10 $\quad \Delta E = \frac{hc}{\lambda}$ pour la transition entre 2 niveaux d'énergie

$$E_p - E_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{hc}{\lambda}$$

Soit $\quad \frac{1}{\lambda} = \underbrace{\frac{e^2}{8\pi.hc\varepsilon_0 a_0}}_{R_H}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$ $\quad$ avec $n<p$

$$R_H = \frac{e^2.me^2\pi}{8\pi h.c\,\varepsilon_0.\varepsilon_0 h^2}$$

Soit $\boxed{R_H = \frac{me^4}{8h^3.c\,\varepsilon_0^2}}$

Q11. * Pour $n = 1$:

$$\lambda_{21} = \left(1{,}09.10^7\left(1-\frac{1}{4}\right)\right)^{-1} = 1{,}22.10^{-7}\,m$$

↳ pas dans le visible

Et les autres longueurs d'ondes sont inférieures car ΔE est supérieur.

* Pour $n = 2$

$$\lambda_{32} = \left(1{,}09.10^7\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\right)^{-1} = 6{,}61.10^{-7}\,m$$

→ raie à 661 nm

$$\lambda_{42} = \left(1{,}09.10^7\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)\right)^{-1} = 4{,}89.10^{-7}\,m$$

→ raie à 489 nm

$$\lambda_{52} = \left(1{,}09.10^7\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{25}\right)\right)^{-1} = 4{,}37.10^{-7}\,m$$

→ raie à 437 nm

$$\lambda_{62} = \left(1{,}09.10^7\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{36}\right)\right)^{-1} = 4{,}13.10^{-7}\,m$$

→ raie à 413 nm

(les raies suivantes ne sont pas dans le visible)

Exercice 3

Q1. a) D'après le TMC appliqué au système {enfant sur la balançoire} dans le référentiel terrestre galiléen à l'échelle de l'expérience :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} + \underbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}}_{=\vec{0}} \quad \text{avec } O \text{ fixe}$$

car $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{OM}$ et $\vec{P}$ étant dans le plan "de la feuille" donc $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$ est dans la direction orthogonale à la feuille.

$\vec{L_O}$ reste donc orthogonal au plan de la feuille (à l'instant initial $\vec{L_O}$ est orthogonal au plan de la feuille car $\overrightarrow{OM}(t=0)$ et $\vec{v}(t=0)$ sont dans le plan de la feuille.

b) On continue l'application du TMC :

$$\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$
$$= l\vec{u_r} \wedge ml\dot{\theta}\vec{u_\theta} = ml^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\vec{u_r} \wedge (mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta})$$

$$= -mgl\sin\theta\,\vec{u_z}$$

D'où $\quad m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

Q2. Pour que l'équation obtenue soit celle d'un O.H il faut $\sin\theta \approx \theta$ donc il faut se placer à des angles faibles ($\theta \ll 1\,\text{rad}$).

On a alors $\quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$

La pulsation propre de cet oscillateur harmonique vaut $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

Q3. $\quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

AN: $\quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}5}{10}} = \underline{3{,}1\ s}$

Q4. En multipliant l'équation obtenue en Q1 par $\dot{\theta}$ on a :

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = \frac{g}{\ell}\frac{d}{dt}(\cos\theta)$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}^2(0)}{2} = \frac{g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Or $\dot{\theta}(0) = 0$ (enfant lâché sans vitesse initiale)

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} \; .$$

soit $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$

d'où on tire $dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}$

On détermine la durée d'1/4 d'oscillation : $\frac{T}{4}$

$$\boxed{\frac{T}{4} = \int_{\theta_0}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}}$$

Q5 On remarque que T varie peu pour $\theta_0 < 1$ rad.

Q6. $C\frac{d\theta}{dt}$ est un moment : dimension [force] $\times$ L

soit $M.L^2.T^{-2}$

$\frac{d\theta}{dt}$ est une vitesse angulaire : T^{-1}

D'où $\boxed{[C] = ML^2T^{-1}}$

Q7. le TMC projeté sur (Oz) donne :

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - C\dot{\theta}.$$

Q8. Pour de petits angles on a :

$$ml^2\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + mgl\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{ml^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

on identifie avec l'equation de l'OH amortie : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$\frac{C}{ml^2} = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$Q = \frac{ml^2}{C}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Le régime sera pseudo-périodique si

$Q > \frac{1}{2}$ soit $\frac{ml^2}{C}\sqrt{\frac{g}{l}} > \frac{1}{2}$

$$\frac{C}{ml\sqrt{gl}} < 2 \iff \boxed{C < 2ml\sqrt{gl}}$$

Q9. Le moment de la force est maximal lorsque si $\overrightarrow{On}$ est orthogonal à $\vec{F}$ donc si $\overrightarrow{On}$ est vertical.

$\Rightarrow$ Il faut pousser l'enfant en bas de la trajectoire et vers l'avant.

La période de la force doit donc valoir T_0 (ou un multiple mais moins efficace).

Q10