Devoir surveillé n° 6

Rappel des consignes

- Lire le sujet en entier avant d'écrire quoi que ce soit.
- Le sujet est long (comme le seront les sujets des concours), l'objectif n'est donc pas de le terminer mais de faire le maximum le plus rigoureusement et le plus efficacement possible.
- Les exercices peuvent être abordées dans n'importe quel ordre. En revanche, dans un exercice, les questions seront traitées dans l'ordre (mais vous pouvez passer des questions).
- La rédaction (clarté, précision) et la présentation (propreté, lisibilité) doivent être particulièrement soignées.
- N'oubliez pas d'encadrer les expressions littérales et de souligner les résultats des applications numériques.
- Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat dont vous avez besoin pour les questions suivantes, vous pouvez l'admettre (en le précisant sur votre copie).
- Essayez d'employer un français le plus correct possible, le correcteur ayant un seuil de tolérance qu'il serait risqué de dépasser !

Exercice 1 : Étude d'un accordeur de guitare

Avant de jouer un morceau, tout bon guitariste doit vérifier qu'elle est bien accordée. En effet, sous l'effet de plusieurs facteurs (température, hygrométrie, chocs, etc.), la tension des cordes peut varier, ce qui modifie les fréquences des notes qu'elles produisent.
La figure 1 montre un exemple de signal électrique à la sortie du microphone enregistrant le son issu de la corde de Mi aigu d'une guitare.

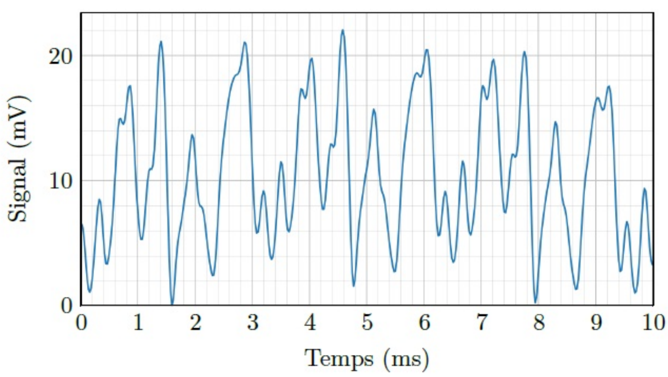


FIGURE 1 – Enregistrement du son de la corde Mi aigu.

Q1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne du signal représenté sur la figure 1.

Q2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on supposera pour cela le signal périodique).

Q3. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaitre des harmoniques ? Justifier.

Avant toute chose, le signal est envoyé dans un filtre dont on donne le diagramme de Bode :

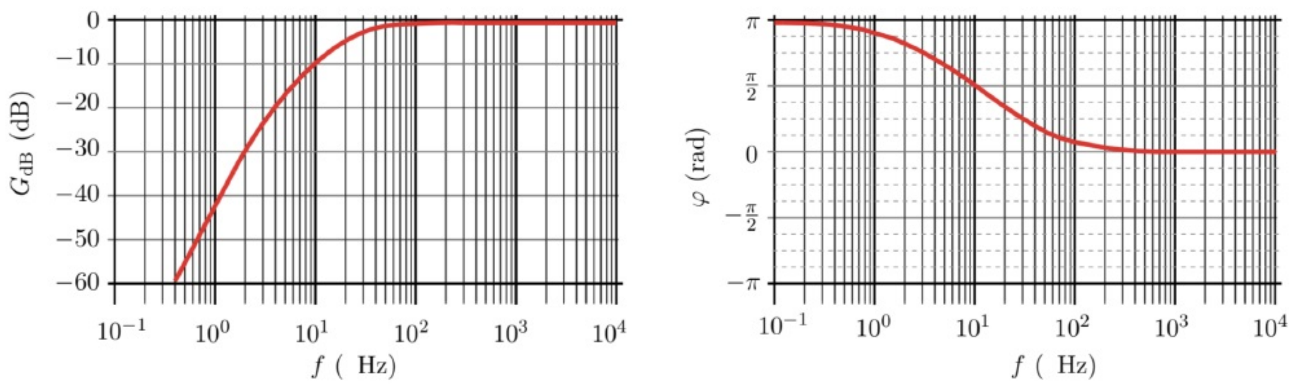


FIGURE 2 – Diagramme de Bode du filtre.

Q4. Indiquer de quel type de filtre il s'agit.

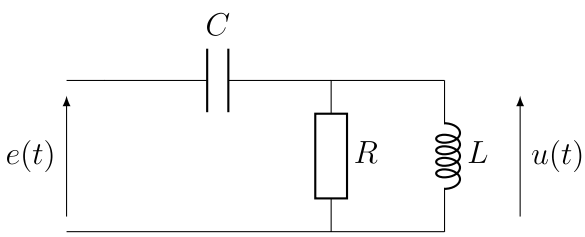
Q5. Identifier la fréquence caractéristique f_0 du filtre, pour laquelle le déphasage vaut $\frac{\pi}{2}$, et la valeur de la pente de l'asymptote.

Q6. On envoie en entrée le signal suivant :

$$e(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

avec $f = 2\,\mathrm{Hz}$ et $E_0 = 1\,\mathrm{V}$.
Déterminer l'expression du signal $u(t)$ de sortie du filtre.

Q7. On donne ci-dessous le schéma d'un filtre :



Justifier qualitativement que le filtre dont le montage est représenté ci-dessus peut avoir le diagramme de Bode de la figure 2.

Q8. La fonction de transfert de ce filtre est de la forme $\underline{H}(x) = \dfrac{Kx^2}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

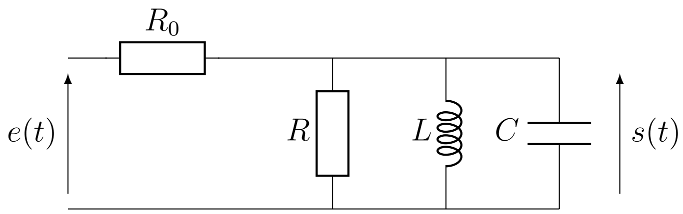
(a) Établir les expressions de K, Q et ω_0.

(b) Déterminer les équations des asymptotes de la courbe de phase.

(c) Déterminer la pente de l'asymptote du gain en décibels à basse fréquence.

(d) Retrouver la valeur du facteur de qualité à partir du diagramme de Bode.

Une fois ce premier traitement effectué, le signal passe dans un filtre très sélectif : si le signal d'entrée est à la fréquence de la note voulue ± 10 Hz, une lampe s'allume (signe que la note tenue est la bonne), sinon elle s'éteint.On propose pour ce filtre le circuit suivant :



Q9. Préciser sans calcul la nature de ce filtre.

Q10. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre se met sous la forme $\underline{H}(\omega) = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$.
ω_0 étant choisie de façon à être égale à la pulsation correspondant à la note voulue.

Q11. Donner les équations des deux asymptotes (hautes fréquences et basses fréquences) du gain en décibels et de la phase de ce filtre. Préciser les valeurs de G_{dB} et $varphi$ pour $\omega = \omega_0$.

Q12. La lampe s'éteint si la tension à ses bornes est inférieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$V. Sachant que le signal d'entrée du filtre a une amplitude de 1 V, quel doit être le facteur de qualité de ce filtre pour accorder la guitare sur un Mi aigu (329,6 Hz) ?

Q13. Supposons R et R_0 connus. Quelle sont les expressions de L et C pour que ce filtre joue son rôle ?

Exercice 2 : Modèle de l'atome d'hydrogène

Données

— Masse de l'électron : $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg
— Charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C
— Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0 \times 10^{8}$ m·s^{-1}
— Constante de Planck : $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J·s
— Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F·m^{-1}

Partie I. Étude classique de l'atome d'hydrogène

Rappel : L'atome d'hydrogène est composé d'un proton (dans le noyau) et d'un électron (dans le nuage électronique).

L'étude qui suit sera menée dans le référentiel $\mathcal{R}$ centré sur le proton, ce référentiel sera considéré comme galiléen. On désignera par r la distance entre le proton et l'électron et le moment cinétique de l'électron par rapport à l'origine dans le référentiel $\mathcal{R}$ sera noté $\overrightarrow{L}$.

Q1. Rappeler l'expression de la force électrostatique $\overrightarrow{F}$ s'exerçant sur l'électron.

Q2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_p de l'électron, en choisissant le zéro de cette énergie potentielle quand $r \to \infty$.

Q3. Montrer que le mouvement de l'électron est plan.

Q4. Déterminer l'énergie mécanique E de l'électron et la mettre sous la forme :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$$

où $E_{p,\text{eff}}(r)$ est une fonction de r à expliciter en fonction des paramètres du problème et du moment cinétique orbital $\overrightarrow{L}$ de l'électron.

Q5. Donner l'allure de la représentation graphique de $E_{p,\text{eff}}(r)$. Analyser qualitativement le comportement du système pour différentes valeurs de l'énergie mécanique E dans le cas où $L \neq 0$.

Q6. À quelles conditions (sur L et E) une orbite circulaire est-elle possible ? Calculer le rayon r_0 de l'orbite circulaire et l'énergie mécanique E_0 de l'électron décrivant une telle orbite en fonction de L, e, m_e et ε_0.

Q7. Quelle est la nature de la trajectoire de l'électron si $L = 0$?

Partie II. Étude classique de l'atome d'hydrogène

En 1913 Niels Bohr proposa un modèle « semi-classique » de l'atome d'hydrogène, dans ce modèle l'électron se trouve sur une orbite circulaire de rayon r et son moment cinétique orbital L est quantifié par :

$$L_n = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

où n est un nombre entier strictement positif et h la constante de Planck.

Q8. Montrer que les orbites sont quantifiées. (On donnera l'expression de l'orbite de rayon a_n). Déterminer la valeur du rayon a_0 de la première orbite de Bohr (on l'exprimera en pm).

Q9. En déduire que les niveaux d'énergie sont quantifiés. Montrer que l'énergie du niveau n peut se mettre sous la forme $E_n = \dfrac{E_0}{n^2}$. Donner la valeur (en eV) de l'énergie de l'état fondamental.

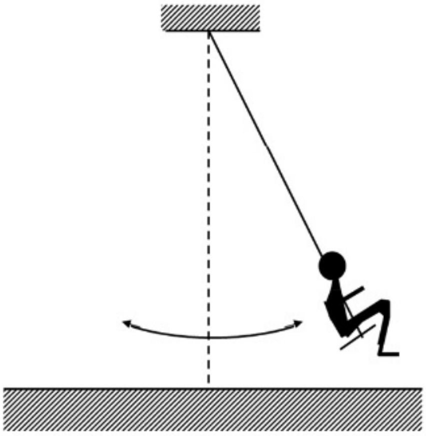
Q10. Vérifier la loi observée par Balmer donnant la longueur d'onde λ des raies de l'hydrogène : $\dfrac{1}{\lambda} = R_H \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{p^2}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^* > n$. R_H est la constante de Rydberg, dont on donnera l'expression en fonction de constantes fondamentales.

Q11. On donne $R_H = 1{,}09 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1}$. Quelles sont les longueurs d'onde dans le visible pour les séries de Lyman ($n = 1$) et de Balmer ($n = 2$) ?

Remarque : Ce modèle semi-classique n'est pas complètement satisfaisant, mais il prédit le spectre de raies de l'atome d'hydrogène. Il a fait émerger l'idée que la quantification des grandeurs physiques est nécessaire à l'échelle atomique.

Exercice 3 : Enfant sur une balançoire

Un enfant faisant de la balançoire (figure 1a) est modélisé par une masse ponctuelle m située en M et suspendue en O par une tige rigide, de masse négligeable et de longueur ℓ. Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ de norme g, est supposé uniforme. L'angle que fait la tige de suspension avec la verticale est noté θ (figure 1b). Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_z}$ tels que définis sur la figure 1b, définissent un trièdre orthonormé direct lié à la balançoire.



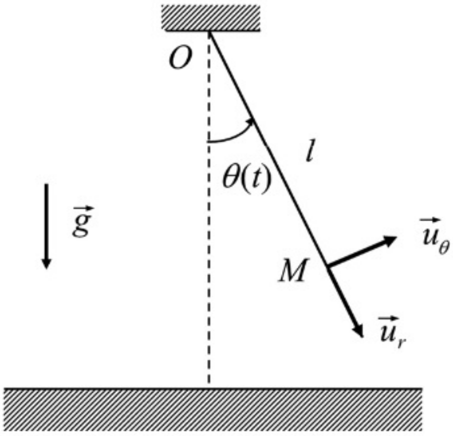


FIGURE 1 – (a) Enfant assis sur sa balançoire (b) Schéma de la balançoire et repère mobile associé

Pour toute cette étude, on suppose que le référentiel terrestre est galiléen.

Q1. Dans cette question, tout frottement de la tige sur son axe de rotation et tout frottement dû à la résistance de l'air sont négligés. En appliquant le théorème du moment cinétique :
  (a) Montrer que le mouvement est plan.
  (b) Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $\theta(t)$ en appliquant le théorème du moment cinétique.

Dans toute la suite du problème, les mouvements de la balançoire et de l'enfant seront étudiés dans le plan vertical de la figure 1b).

Q2. À quelle condition l'enfant assis sur la balançoire sera-t-il un oscillateur harmonique ? Donner l'expression littérale de la pulsation propre ω_0 correspondante.

Q3. Déterminer la valeur numérique de la période des oscillations T_0 de l'oscillateur harmonique, ainsi que la vitesse maximale $v_{\max}$ de l'enfant, sachant qu'il part d'un angle $\theta_0 = 30\ ^\circ$ sans vitesse initiale. Données : $\ell = 2{,}5\,\text{m}$, $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, et $m = 20\,\text{kg}$.

L'approximation de l'oscillateur harmonique est ici examinée en considérant les effets non linéaires. L'enfant part d'un angle θ_0 positif sans vitesse initiale.

Q4. En partant du théorème du moment cinétique, étudié à la question (Q1.), donner l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ en fonction de θ, θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. En déduire l'expression de la période $T(\theta_0)$ sous forme d'une intégrale en fonction de θ, θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration. On ne demande pas de calculer cette intégrale.

Q5. Une intégration numérique permet de dessiner la courbe représentative de la fonction $T(\theta_0)$ ci-dessous (figure 2). Commenter cette courbe.

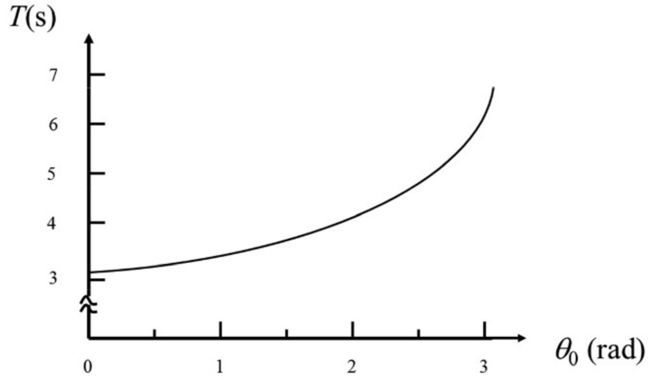


Figure 2 – Période des oscillations an fonction de l'angle de départ

Au point O s'exercent des forces de frottement sur la tige. Le moment de ces forces (par rapport à O) est égal à $-C\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_z}$ où C est une constante positive et $\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}$.

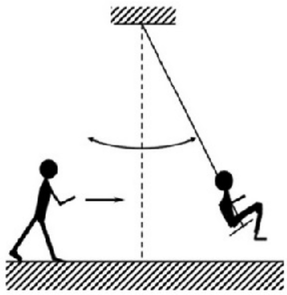
Q6. Quelle est la dimension de la constante C.

Q7. Établir l'équation différentielle à laquelle doit maintenant obéir $\theta(t)$.

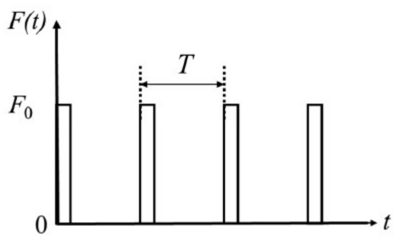
Q8. En supposant que l'angle θ reste suffisamment petit, à quelle inégalité doit satisfaire C pour que le mouvement de l'enfant puisse être considéré comme un mouvement oscillatoire dont l'amplitude décroît avec le temps (mouvement pseudo-périodique) ?

Les frottements (étudiés des questions Q6 à Q8) ont pour conséquence d'amortir le balancement de l'enfant et un deuxième enfant vient donc aider le premier enfant qui se balance à maintenir une amplitude constante en le poussant (figure 3a) avec une force horizontale périodique non harmonique dont le module $F(t)$ est représenté à la figure 3b.

Figure 3



a) Enfant sur sa balançoire poussé par un autre enfant



b) Profil de la force appliquée à l'enfant sur sa balançoire en fonction du temps

Q9. À quel moment et à quelle fréquence l'enfant pousseur doit-il appliquer sa poussée sur l'enfant de la balançoire pour que son action soit la plus efficace possible ? Que vaut donc la période T de la force $F(t)$ pour que l'action de l'enfant pousseur soit la plus efficace possible ? (on supposera les frottements faibles dans cette question).

Q10. Reproduire le schéma de la figure 3b et représenter sur le même graphe l'angle θ.