

Devoir surveillé n° 6



Rappel des consignes

- Lire le sujet en entier avant d'écrire quoi que ce soit.
- Le sujet est long (comme le seront les sujets des concours), l'objectif n'est donc pas de le terminer mais de faire le maximum le plus rigoureusement et le plus efficacement possible.
- Les exercices peuvent être abordés dans n'importe quel ordre. En revanche, dans un exercice, les questions seront traitées dans l'ordre (mais vous pouvez passer des questions).
- La rédaction (clarté, précision) et la présentation (propreté, lisibilité) doivent être particulièrement soignées.
- N'oubliez pas d'encadrer les expressions littérales et de souligner les résultats des applications numériques.
- Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat dont vous avez besoin pour les questions suivantes, vous pouvez l'admettre (en le précisant sur votre copie).
- Essayez d'employer un français le plus correct possible, le correcteur ayant un seuil de tolérance qu'il serait risqué de dépasser !

Exercice 1 : Étude d'un accordeur de guitare

Notes jouées à la guitare

Nous allons étudier quelques aspects de l'accordeur électronique d'une guitare. La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu. Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau 1.

Note	Fréquence du mode fondamental f_{ac} en Hz
Mi grave	82,4
La	110,0
Ré	146,8
Sol	196,0
Si	246,9
Mi aigu	329,6

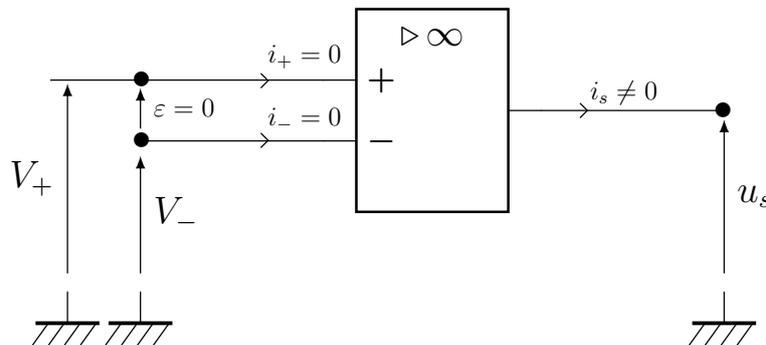
TABLEAU 1 – Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare.

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question. Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de cette corde.

Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (= on fixe f_{ac}).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur.
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co} .
- Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Informations sur l'amplificateur opérationnel



L'amplificateur opérationnel (AO) est un amplificateur différentiel (= un dispositif électronique permettant d'amplifier une différence de tension). Un AO peut avoir différentes fonctions : il peut faire des calculs mathématiques analogiques (additions, soustractions, inversions, intégrations, dérivées, etc.), faire du filtrage de signaux analogiques, amplifier des tensions, ou du courant. Il est alimenté en $\pm 15\text{ V}$ par rapport à la masse. C'est cette alimentation (non représentée sur le schéma) qui permet de fournir de la puissance en sortie en assurant un courant d'intensité i_s pouvant aller à des ordres de grandeurs de dizaines de milliampères. L'AO présente de très fortes impédances d'entrée, les courants en entrée sont extrêmement faibles. Pour un AO idéal (repéré par le symbole $\triangleright \infty$), $i_+ = i_- = 0$ (impédances d'entrées infinies).

L'AO présente deux types de fonctionnement :

- Le régime linéaire
- Le régime saturé (non linéaire)

Dans ce problème, l'AO sera idéal et utilisé en régime linéaire pour lequel :

$$i_+ = i_- = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = 0$$

Partie I. Le signal

La figure 1 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

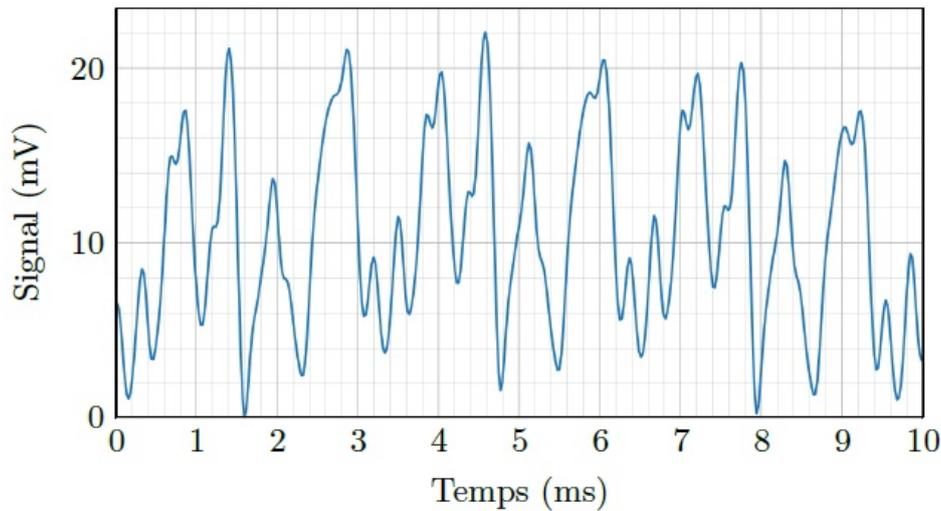


FIGURE 1 – Signal de la guitare.

- Q1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne du signal représenté sur la figure 1.
- Q2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on supposera ce signal périodique).
- Q3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
- Q4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

Partie II. Premier filtre

Le signal électrique provenant du micro de la guitare est d'abord envoyé sur le filtre représenté sur la figure 2 (filtre (F_a)).

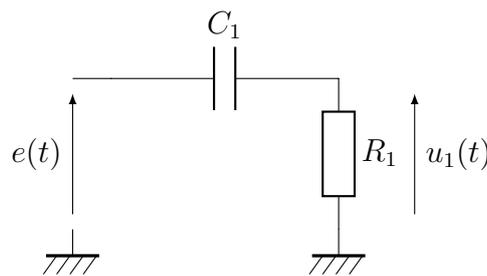


FIGURE 2 – Filtre (F_a)

- Q5. Déterminer sans calcul le type de ce filtre.
- Q6. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.
- Q7. Mettre $\underline{H}_1(j\omega)$ sous la forme $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$. Exprimer la pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
- Q8. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain en choisissant $x = \frac{\omega}{\omega_1}$.
- Q9. On a choisi $R_1 = 100\text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100\text{ nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 1, quel est le rôle de ce premier filtre ?

Partie III. Deuxième filtre

Dans cette partie, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs opérationnels sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaires. On étudie tout d'abord les filtres de la figure 3.

1) Préambule

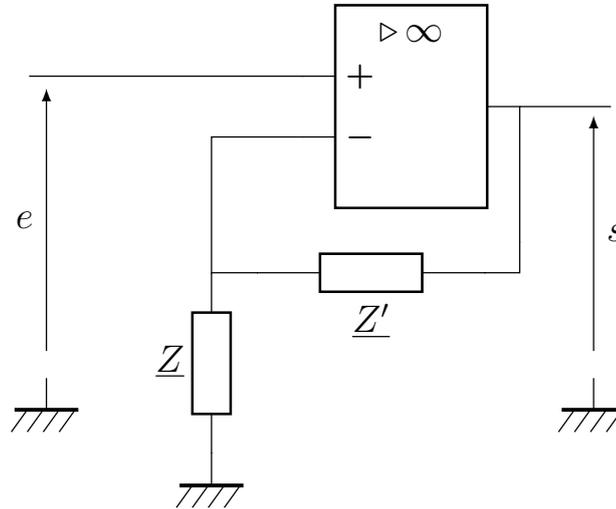


FIGURE 3 – Filtre à AO

- Q10. Exprimer la fonction de transfert \underline{H} du filtre représenté sur la figure 3 en fonction de \underline{Z} et \underline{Z}' . On rappelle que l'AO est idéal et fonctionne en régime linéaire (voir informations page 2).
- Q11. Que devient \underline{H} si \underline{Z} et \underline{Z}' sont des résistances ($\underline{Z} = R$, $\underline{Z}' = R'$) ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

2) Amplification (légèrement) sélective

Dans l'accordeur de guitare, le signal récupéré en sortie du filtre F_a et envoyé en entrée du filtre F_b représentée sur la figure 4 ci-dessous :

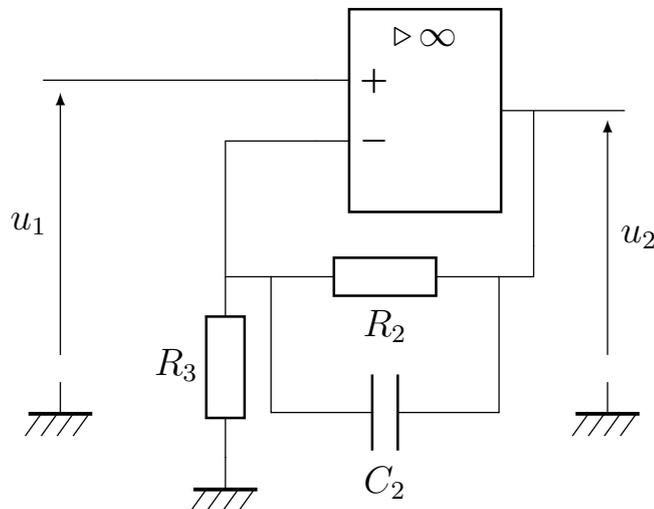


FIGURE 4 – Filtre F_b

- Q12. Quelle est l'impédance $Z_{\text{éq}}$ de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?

Q13. Déduire de la question Q10 l'expression de la fonction de transfert \underline{H}_2 de ce filtre en fonction de R_2 , R_3 et C_2 . Mettre \underline{H}_2 sous la forme :

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

Donner les expressions de G_0 et ω_2 .

Q14. Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence ? en haute fréquence ?

Q15. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$ et $C_2 = 470 \text{ pF}$, ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

Partie IV. Filtrage très sélectif

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur f_{ac} (on suppose la corde légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde du Mi aigu que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} . Ce type de commande (  capacité commutée) sera étudié dans la dernière partie du problème.

1) Diagramme de Bode

La figure 5 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

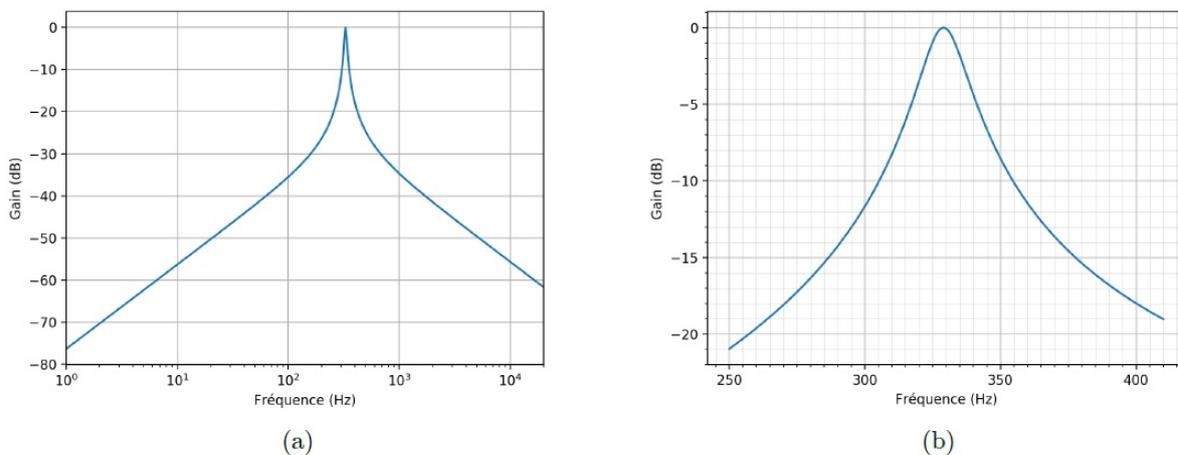


FIGURE 5 – Diagramme de Bode en gain du filtre F_c

Q16. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?

Q17. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.

Q18. Si la corde est désaccordée   $f_{co} = 315 \text{ Hz}$, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

2) Analyse spectrale

La figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 1.

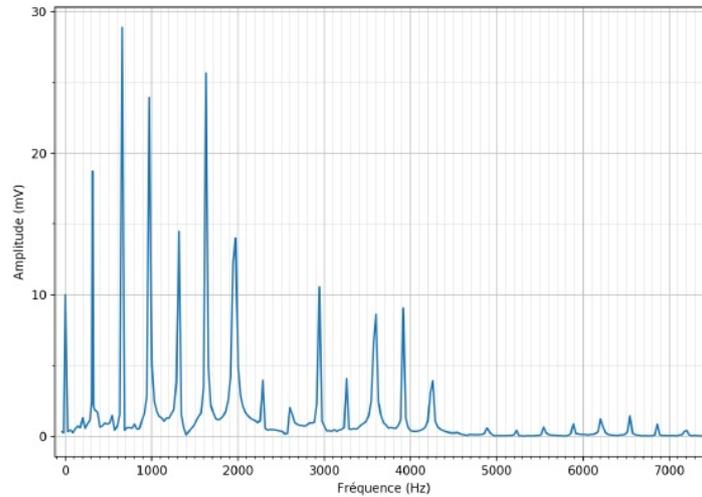


FIGURE 6 – Spectre du signal d'entrée

Q19. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 1.

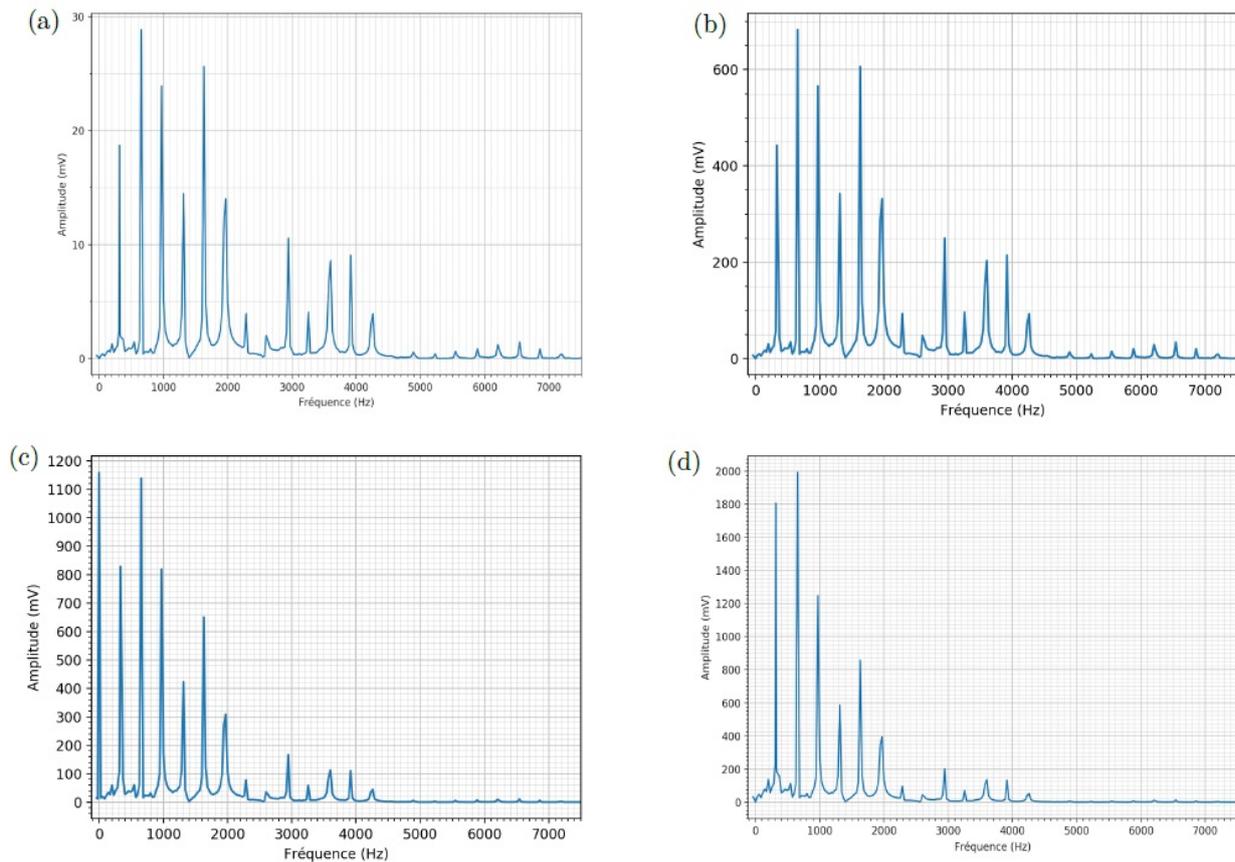


FIGURE 7 – Spectres

Q20. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure 7 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).

Q21. Même question, pour la sortie du filtre (F_b).

Q22. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

Partie V. Filtre à capacité commutée

Q23. Rappeler l'expression de la charge q transférée à un condensateur de capacité C en fonction de la tension u_C à laquelle il est soumis. On précisera grâce à un schéma les conventions d'orientation utilisées.

On monte maintenant un condensateur de capacité C_k entre deux interrupteurs commandés notés K_A et K_B comme l'indique la figure 8.

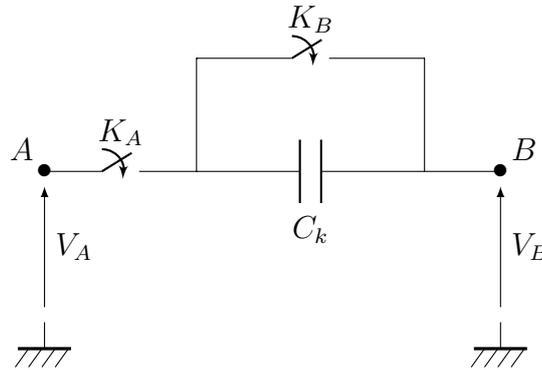


FIGURE 8 – Capacité commutée

On fait les hypothèses suivantes :

- Les interrupteurs sont idéaux (d'impédance infinie quand ils sont ouverts et nulle quand ils sont fermés).
- Ils sont toujours dans des états complémentaires : si K_A est ouvert, alors K_B est fermé et inversement.
- Ils sont commandés de manière périodique par un signal extérieur (signal u_{ref} carré périodique de fréquence f_k (période T_k) de telle sorte que :
 - sur l'intervalle $[0, \frac{T_k}{2}[$: K_A est fermé et K_B ouvert ;
 - sur l'intervalle $[\frac{T_k}{2}, T_k[$: K_A est ouvert et K_B fermé.
- Les condensateurs ont le temps de se charger/décharger sur chaque intervalle de temps.
- La période T_k est faible devant tous les autres temps caractéristiques.

Q24. Donner les expressions de q_1 et q_2 , les charges portées par l'armature du condensateur reliée directement au point B respectivement sur l'intervalle $[0, \frac{T_k}{2}[$ et $[\frac{T_k}{2}, T_k[$. En déduire l'expression de la charge $\delta q = q_2 - q_1$ transférée de l'entrée vers la sortie en une période.

Q25. À quoi est égale la charge Q transférée de l'entrée vers la sortie en un temps $t \gg T_k$?

Q26. En déduire l'expression de l'intensité moyenne I_m associée à ce transfert en fonction de V_A , V_B , C_k et f_k .

Q27. Pourquoi peut-on en conclure que ce dipôle AB se comporte comme une résistance R_k ? Donner l'expression de cette résistance R_k .

Q28. Expliquer qualitativement comment utiliser cette capacité commutée pour créer des filtres dont la fréquence caractéristique est réglée par le signal de référence u_{ref} et, en particulier, un filtre du type recherché pour (F_a).

Exercice 2 : Évolution du modèle de l'atome au début du XX^e siècle

Données

- Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \times 10^8$ m·s⁻¹
- Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J·s
- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F·m⁻¹
- Équation d'une ellipse de centre $C(x_C, z_C)$, de demi-axe a dans la direction (Ox) et de demi-axe b dans la direction (Oz) : $\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(z - z_C)^2}{b^2} = 1$
- numéro atomique d'un atome d'or : $Z = 79$
- masse d'une particule α : $m = 6,64 \times 10^{-24}$ kg

Partie I. Le modèle de Thomson (1904)

En 1904, le physicien anglais Sir Joseph John Thomson (1856-1940) propose le modèle suivant pour l'atome d'hydrogène :

- Il est constitué d'une sphère de centre O et de rayon a .
- La charge positive $+e$ de l'atome est répartie uniformément dans le volume intérieur de cette sphère.
- La sphère est supposée fixe dans un référentiel galiléen propre à l'étude, auquel on associe le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
- L'électron se déplace librement à l'intérieur de la sphère; on repère par M sa position et on note $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ son vecteur position.
- On néglige l'interaction gravitationnelle devant l'interaction électromagnétique.

- Q1. Donner, en fonction de e et a , l'expression de la densité volumique de charge ρ de la boule chargée positivement dans ce modèle.
- Q2. On admet que le champ électrique créé par une boule de centre O uniformément chargée est de la forme $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r$. En déduire la force subie par l'électron. On posera $k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$.
- Q3. Pourquoi nomme-t-on aussi le modèle de Thomson « modèle de l'électron élastiquement lié à l'atome » ?
- Q4. Montrer que le mouvement de l'électron est plan.
- Q5. La loi de force précédente définit un modèle, analogue à trois dimensions de l'oscillateur harmonique, connu sous le nom d'oscillateur spatial. Donner les équations du mouvement de l'électron $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ pour les conditions initiales suivantes : on suppose qu'à $t = 0$, $\vec{r}_0 = r_0 \vec{e}_x$ et $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$ où \vec{e}_x est le vecteur unitaire de l'axe (Ox) et \vec{e}_z le vecteur unitaire de l'axe Oz .
- Q6. Tracer l'allure de la trajectoire, le plan de figure étant le plan de la trajectoire.
- Q7. Quelle est la période du mouvement en fonction de m_e et k ?
- Q8. En prenant $a = 0,1$ nm, calculer la fréquence du mouvement et la longueur d'onde associée.
- Q9. On se place, dans cette question uniquement, dans le cas particulier où $\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = \vec{0}$. Quel est le mouvement de l'électron ? Donner un exemple d'analogie mécanique.

- Q10. On soumet l'atome d'hydrogène précédemment décrit à l'action d'une onde plane lumineuse représentée par un champ électrique oscillant, que l'on peut considérer uniforme au niveau de l'atome, qui s'écrit $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$. Donner l'expression de la force électrique subie par l'électron lorsque l'atome est illuminé.
- Q11. Après un régime transitoire d'une courte durée, l'électron oscille suivant la direction du champ électrique de l'onde. La force de rappel élastique s'écrit alors $\vec{F}_e = -kz\vec{e}_z$, et les pertes d'énergie des électrons par rayonnement sont modélisées par une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\dot{z}\vec{e}_z$. En supposant le noyau atomique fixe dans le référentiel terrestre, lui-même supposé galiléen, écrire l'équation du mouvement de d'un électron suivant \vec{e}_z . On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$ et $2\alpha = \frac{h}{m_e}$.
- Q12. En régime établi, la position $z(t)$ de l'électron pourra se mettre sous la forme $z(t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Exprimer alors l'amplitude complexe \underline{z} associée.
- Q13. En déduire que l'amplitude complexe $\underline{\ddot{z}}(x)$ de l'accélération de l'électron peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\ddot{z}}(x) = -\frac{\gamma_0}{\frac{1}{x^2} + \frac{2j\alpha}{\omega_0} \frac{1}{x} - 1} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Préciser l'expression de γ_0 .

- Q14. Estimer un encadrement de $\frac{1}{x^2}$ pour les pulsations ω appartenant au domaine visible. En déduire une expression simplifiée approchée de $\underline{\ddot{z}}(x)$ dans ce domaine de pulsations, en considérant de plus, que l'électron est peu amorti (le terme correspondant à l'amortissement sera négligé).
- Q15. Une charge en accélération a émet dans toute les directions un rayonnement électromagnétique de puissance $P(\omega) = \mu \dot{z}^2(\omega)$, avec μ constante positive. Montrer que, dans le domaine visible, la puissance rayonnée $P(\lambda)$ peut être approchée par l'expression :

$$P(\lambda) = \mu \gamma_0^2 \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4}$$

où λ est la longueur de la lumière incidente et $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$, avec c la célérité de la lumière dans le vide.

- Q16. La puissance lumineuse calculée précédemment est rayonnée dans toutes les directions par les molécules. Faire un schéma et comparer P pour le rouge et pour le bleu, puis expliquer, en admettant que les atomes de l'atmosphère soumis aux rayons solaires ont un comportement identique à celui de l'atome d'hydrogène, l'origine de la couleur bleue du ciel.

Partie II. Modèle de Rutherford (1911)

En 1911, l'expérience de Rutherford montre qu'il existe un noyau quasi ponctuel chargé positivement au sein de l'atome, invalidant ainsi le modèle de Thomson. Rutherford propose un modèle planétaire dans lequel les électrons décrivent des trajectoires circulaires autour d'un noyau ponctuel fixe.

L'expérience réalisée en 1911 par Sir Ernest Rutherford est schématisée sur la figure ci-dessous. Des particules α (c'est à dire des noyaux d'hélium portant la charge positive $+2e$, émis par radioactivité) sont envoyées sur une cible constituée par une mince feuille d'or. L'impact de ces particules sur des écrans au sulfure de zinc provoque une scintillation qui permet de mesurer la déviation qu'elles ont subie.

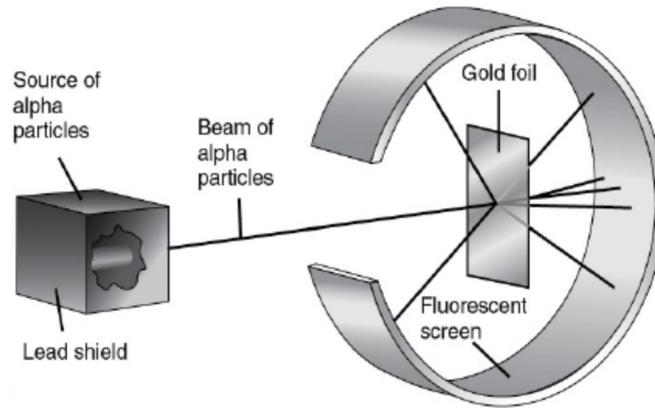
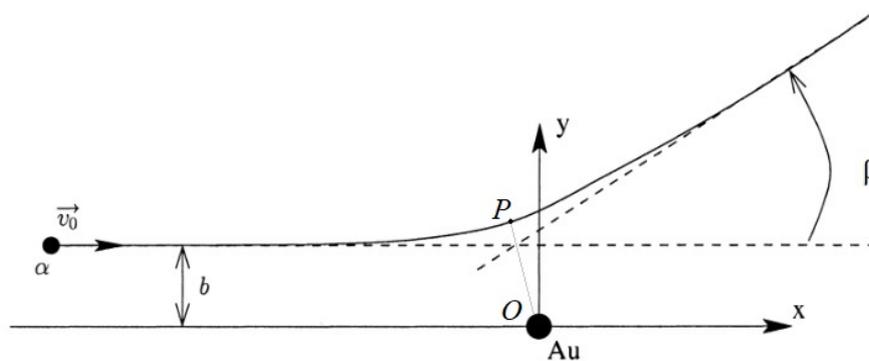


FIGURE 1 – Dispositif expérimental de l'expérience de Rutherford.

L'expérience montre que l'immense majorité des particules traversent la cible sans être déviées, alors que certaines d'entre elles subissent une déviation importante (notée β sur la figure 2). Rutherford a supposé que ces fortes déviations étaient dues à la répulsion électrostatique entre les particules α et les noyaux des atomes d'or. D'autre part le fait que ces déviations soient rares, en dépit du grand nombre de couches atomiques traversées, suggère que cette charge positive est répartie dans une petite région de l'espace.

Cette partie consiste à étudier un modèle simplifié de cette expérience : Une particule α , de masse m et de charge $+2e$ vient de l'infini avec la vitesse $v_0 = v_0 \vec{e}_x$, et s'approche avec le paramètre d'impact b d'un noyau cible d'or de masse $M \gg m$ et de charge $Q = Ze$ considéré comme immobile au point O . La masse de la particule α étant très grande devant celle d'un électron, on considèrera que le mouvement des particules α est insensible à l'interaction avec les électrons de l'atome d'or. La déviation de la particule α n'est donc due qu'à l'interaction (répulsive) avec le noyau d'or.

FIGURE 2 – Schéma de l'interaction d'une particule α arrivant sur un atome d'or.

- Q17. Quelle est l'énergie E_m associée au mouvement de la particule α ?
- Q18. Montrer que le moment cinétique de la particule α est conservé (on notera L_0 sa norme). En déduire que la trajectoire de la particule α est plane.
- Q19. Donner l'expression de l'énergie mécanique de la particule α . Montrer que l'on peut la mettre sous la forme : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}$. Préciser l'expression de $E_{p,\text{eff}}$. On posera $K = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$.
- Q20. Déduire des questions Q18 et Q19 la particule α est dans un état de diffusion.
- Q21. Que représente la distance OP ? Montrer que $OP = \frac{K}{mv_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K} \right)^2} \right)$.

Q22. On peut montrer que l'angle de déviation β de la particule est donnée par $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{K}{mbv_0^2}$.

Les mesures expérimentales donnent $\beta = 60^\circ$ pour $v_0 = 6,20 \times 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. En déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or. Commenter avec la valeur prétendue du noyau d'or à l'époque ($1 \times 10^{-10} \text{ m}$).

Partie III. Quantification et modèle de Bohr (1913)

Avant de s'intéresser à la structure de l'atome, on avait déterminé que chaque atome (sous le coup d'une excitation) était capable de rayonner une onde électromagnétique (parfois appartenant au spectre visible). Pour l'atome d'hydrogène, les longueurs d'onde caractéristiques de ces rayonnements vérifient la loi expérimentale de Balmer-Rydberg :

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \quad \text{égalité (1)}$$

où n et p sont des entiers ($n < p$) et R_H est la constante de Rydberg. On souhaite retrouver théoriquement ce résultat en s'intéressant à l'atome d'hydrogène.

Q23. Dans le modèle de Rutherford, il est possible d'envisager une trajectoire circulaire de rayon R_n de l'électron autour du noyau fixe. Calculer la vitesse v correspondant à cette orbite et en déduire la période de rotation de l'électron sur cette orbite en fonction de ε_0 , m_e , e et R_n .

Q24. On numérote par n et p deux entiers et deux orbites circulaires distinctes d'énergies mécaniques respectives E_n et E_p . On note L_n et L_p les normes des moments cinétiques respectifs par rapport au noyau. Montrer que :

$$E_p - E_n = Y \left(\frac{1}{L_n^2} - \frac{1}{L_p^2} \right)$$

Y étant une constante que l'on explicitera en fonction de ε_0 , m_e et e .

Q25. En tenant compte de résultats connus en 1913 (théorie du corps noir, théorie de l'effet photoélectrique), Bohr a pu poser la relation bien connue aujourd'hui : $E_p - E_n = h\nu_{np}$ entre énergie et fréquence. De plus, il a posé la condition de quantification du moment cinétique suivante pour les orbites circulaires $L_n = n\hbar$ (où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante réduite de Planck).

Montrer que ces deux relations permettent de retrouver l'égalité (1). En déduire une expression de la constante de Rydberg R_H en fonction de ε_0 , m_e , e , c et h .

Remarque : Le modèle de Bohr est dit semi quantique car les niveaux d'énergie sont quantifiés mais l'approche reste classique, l'électron étant localisé. Ce modèle fut un premier succès dans la prévision du spectre d'émission de l'hydrogène. Mais les progrès de la spectroscopie ont rapidement conduit à observer que certaines raies vues initialement comme monochromatiques présentaient en fait une structure fine sous la forme de multiplets de raies voisines. C'est le cas, par exemple, de la raie H_α (correspondant à la transition du niveau E_3 vers le niveau E_2) qui fut observée comme un doublet par Michelson et Morley dès 1887, mais qui, plus tard, se révélera être formée de raies plus nombreuses.

Exercice 3 : Enfant sur une balançoire

Un enfant faisant de la balançoire (figure 1a) est modélisé par une masse ponctuelle m située en M et suspendue en O par une tige rigide, de masse négligeable et de longueur ℓ . Le champ de pesanteur \vec{g} de norme g , est supposé uniforme. L'angle que fait la tige de suspension avec la verticale est noté θ (figure 1b). Les vecteurs unitaires \vec{u}_r , \vec{u}_θ , \vec{u}_z tels que définis sur la figure 1b, définissent un trièdre orthonormé direct lié à la balançoire.

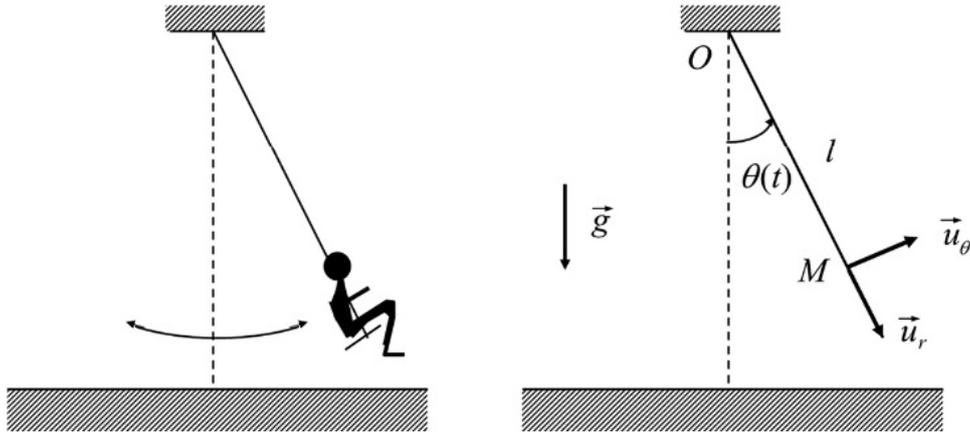


FIGURE 1 – (a) Enfant assis sur sa balançoire (b) Schéma de la balançoire et repère mobile associé

Pour toute cette étude, on suppose que le référentiel terrestre est galiléen.

- Q1. Dans cette question, tout frottement de la tige sur son axe de rotation et tout frottement dû à la résistance de l'air sont négligés. En appliquant le théorème du moment cinétique :
- Montrer que le mouvement est plan.
 - Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par $\theta(t)$ en appliquant le théorème du moment cinétique.

Dans toute la suite du problème, les mouvements de la balançoire et de l'enfant seront étudiés dans le plan vertical de la figure 1b).

- Q2. À quelle condition l'enfant assis sur la balançoire sera-t-il un oscillateur harmonique ? Donner l'expression littérale de la pulsation propre ω_0 correspondante.
- Q3. Déterminer la valeur numérique de la période des oscillations T_0 de l'oscillateur harmonique, ainsi que la vitesse maximale v_{\max} de l'enfant, sachant qu'il part d'un angle $\theta_0 = 30^\circ$ sans vitesse initiale. Données : $\ell = 2,5 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, et $m = 20 \text{ kg}$.

L'approximation de l'oscillateur harmonique est ici examinée en considérant les effets non linéaires. L'enfant part d'un angle θ_0 positif sans vitesse initiale.

- Q4. En partant du théorème du moment cinétique, étudié à la question (Q1.), donner l'expression de $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de θ , θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. En déduire l'expression de la période $T(\theta_0)$ sous forme d'une intégrale en fonction de θ , θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration. On ne demande pas de calculer cette intégrale.

- Q5. Une intégration numérique permet de dessiner la courbe représentative de la fonction $T(\theta_0)$ ci-dessous (figure 2). Commenter cette courbe.

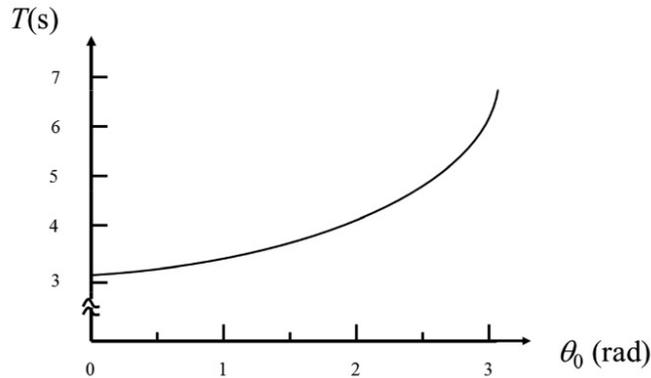


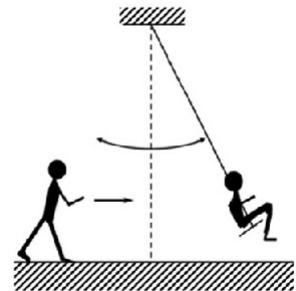
FIGURE 2 – Période des oscillations an fonction de l'angle de départ

Au point O s'exercent des forces de frottement sur la tige. Le moment de ces forces (par rapport à O) est égal à $-C \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z$ où C est une constante positive et $\vec{u}_z = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$.

- Q6. Quelle est la dimension de la constante C .
- Q7. Établir l'équation différentielle à laquelle doit maintenant obéir $\theta(t)$.
- Q8. En supposant que l'angle θ reste suffisamment petit, à quelle inégalité doit satisfaire C pour que le mouvement de l'enfant puisse être considéré comme un mouvement oscillatoire dont l'amplitude décroît avec le temps (mouvement pseudo-périodique)?

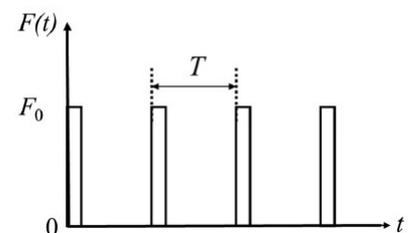
Les frottements (étudiés des questions Q6 à Q8) ont pour conséquence d'amortir le balancement de l'enfant et un deuxième enfant vient donc aider le premier enfant qui se balance à maintenir une amplitude constante en le poussant (figure 3a) avec une force horizontale périodique non harmonique dont le module $F(t)$ est représenté à la figure 3b.

FIGURE 3



- a) Enfant sur sa balançoire poussé par un autre enfant

- b) Profil de la force appliquée à l'enfant sur sa balançoire en fonction du temps



- Q9. À quel moment et à quelle fréquence l'enfant pousseur doit-il appliquer sa poussée sur l'enfant de la balançoire pour que son action soit la plus efficace possible? Que vaut donc la période T de la force $F(t)$ pour que l'action de l'enfant pousseur soit la plus efficace possible? (on supposera les frottements faibles dans cette question).
- Q10. Reproduire le schéma de la figure 3b et représenter sur le même graphe l'angle θ .