

DS6 niveau 2 Correction

Exercice 1 :

Q1. La valeur moyenne du signal est 10mV (environ).

Q2. En supposant le signal périodique, on repère 2 périodes entre $t_1 = 1,4 \text{ ms}$ et $t_2 = 7,7 \text{ ms}$
D'où $T = \frac{t_2 - t_1}{2}$

$$\text{AN: } T = \frac{7,7 - 1,4}{2} \quad \text{soit} \quad \underline{T = 3,2 \text{ ms}}$$

$$\text{On en déduit } f = \frac{1}{T}$$

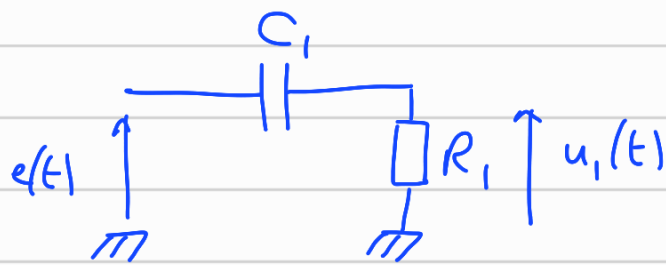
$$\text{AN: } f = \frac{1}{3,2 \cdot 10^{-3}} \quad \text{soit} \quad \underline{f = 3,2 \cdot 10^2 \text{ Hz}}$$

(valeur obtenue avec la valeur non arrondie de T)

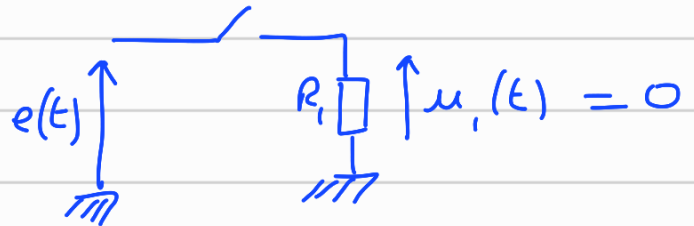
Q3. La fréquence de ce signal est proche de celle correspondant au π_1 aigu. (mais la corde est vraisemblablement désaccordée).

Q4. Le signal est périodique mais non sinusoïdal donc son spectre contiendra des harmoniques (fréquences multiples de celle du fondamental).

Q5.



- * Comportement à basse fréquence :
le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc on a le schém équivalent



- * Comportement à haute fréquence : le condensateur se comporte comme un fil donc on a



On en conclut donc que C_1 est un filtre passe-haut.

Q6 En appliquant la formule du pont diviseur de tension, on a :

$$\underline{H_1(j\omega)} = \frac{u_1}{e} = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}}$$

$$Q7. \quad \underline{H_1(j\omega)} = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}$$

En posant $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$ on a $H_1(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$

ω_1 correspond à la pulsation de coupure : $G(\omega_1) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

$$Q8. \quad \underline{H_1(jx)} = \frac{jx}{1 + jx}$$

* A basse fréquence : $\omega \ll \omega_1$, on a $x \ll 1$

$$\underline{H_1(j\omega)} \approx jx$$

d'où $|\underline{H_1(j\omega)}| \approx x$

et $G_{dB} \approx 20 \log(x) \Rightarrow$ asymptote oblique de pente $+20 \text{ dB/déc}$

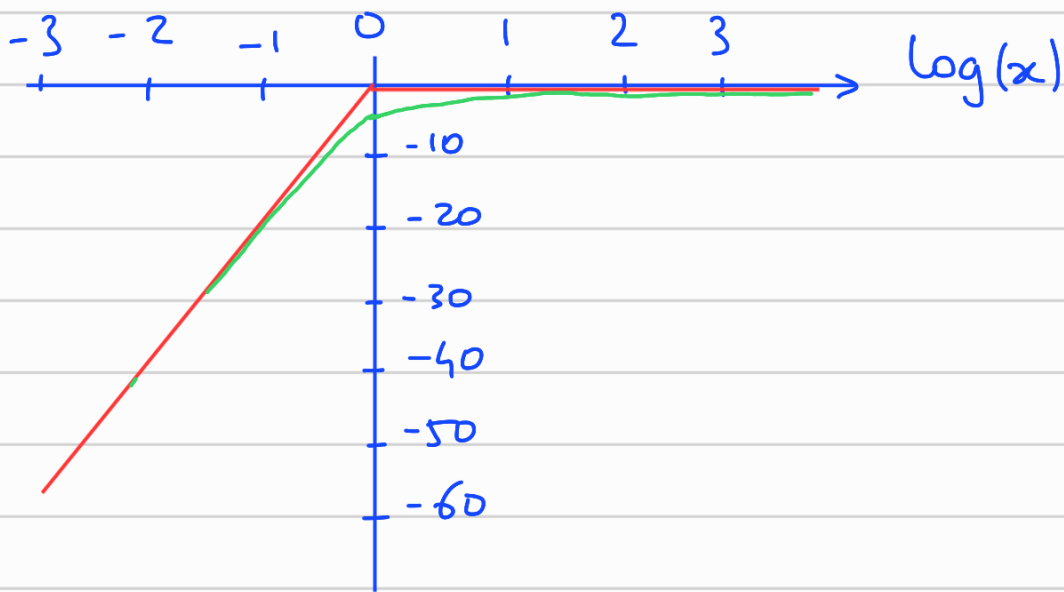
* A haute fréquence : $\omega \gg \omega_1$, on a $x \gg 1$

$$\underline{H_1(j\omega)} \approx 1$$

d'où $|\underline{H_1(j\omega)}| \approx 1$

et $G_{dB} \approx 0 \Rightarrow$ asymptote horizontale à 0 dB .

Rq: les 2 asymptotes se coupent en $\log x = 0$



Rq: pour $x=1$ (soit $\log x=0$) on a
 $G_{dB} = 20 \log(1/\sqrt{2}) = -3 \text{ dB}$. \rightarrow tracé vert

Q9. Avec les valeurs données on a

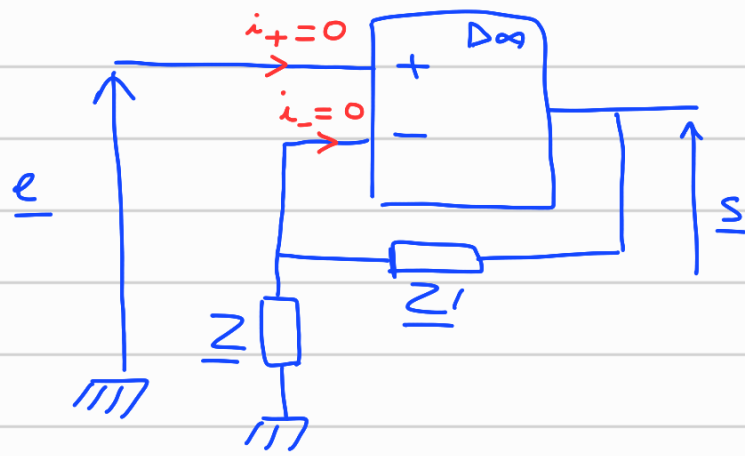
$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

$$\text{AN: } f_1 = \frac{1}{2\pi \cdot 10^5 \cdot 10^{-7}} = \underline{\underline{15,9 \text{ Hz}}}$$

Ce filtre passe-haut sert à éliminer la composante continue du signal, sans modifier le fondamental et ses harmoniques.

(En sortie de ce filtre, on a un signal de valeur moyenne nulle).

Q10.



Comme $i_- = 0$, le courant circulant dans Z et Z' est le même, donc en appliquant un pont diviseur de tension, on obtient :

$$\underline{V}_- = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}'} \underline{s}$$

$$\text{Or } \underline{V}_+ = \underline{V}_- = \underline{e}$$

$$\text{On a donc } \underline{e} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \underline{Z}'} \underline{s}$$

$$\text{Soit } \underline{s} = \frac{\underline{Z} + \underline{Z}'}{\underline{Z}} \underline{e}$$

$$\underline{s} = \left(1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}} \right) \underline{e}$$

$$\Rightarrow \underline{H} = 1 + \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$$

Q11 Si $\underline{z} = R$ et $\underline{z}' = R'$ on a

$$\underline{H} = 1 + \frac{R'}{R}$$

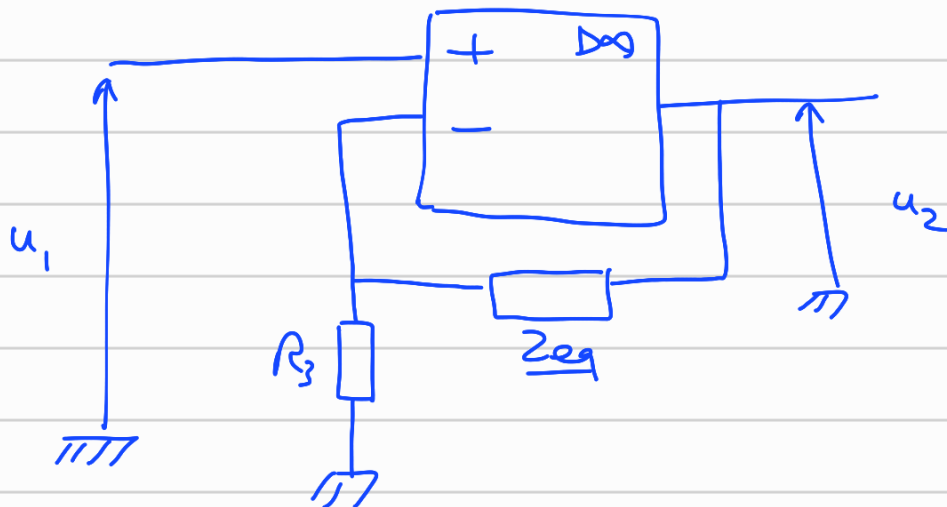
Ce montage sert à amplifier une tension (amplificateur non inverseur).

Q12. Le condensateur C_2 et la résistance R_2 étant montés en dérivation, on a

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega = \frac{1 + jR_2C_2\omega}{R_2}$$

$$\Rightarrow \underline{Z}_{eq} = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$$

Q13. Le montage peut se redessiner avec:



On reprend la fonction de transfert établie à la question Q10, avec

$$\underline{Z} = R_3 \quad \text{et} \quad \underline{Z}' = \underline{Z}_{eq}$$

$$\underline{H}_2(j\omega) = 1 + \frac{\underline{Z}_{eq}}{R_3} = 1 + \frac{R_2}{R_3(1+jR_2C_2\omega)}$$

$$\text{soit } \underline{H}_2(j\omega) = 1 + \frac{R_2/R_3}{1+jR_2C_2\omega}$$

$$\text{En posant } G_0 = \frac{R_2}{R_3} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$$

$$\text{on a } \boxed{\underline{H}_2(j\omega) = 1 + \frac{G_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}}$$

$$\text{Q14. } |\underline{H}_2| = \left| \frac{1 + G_0 + j(\omega/\omega_2)}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} \right|$$

$$= \sqrt{\frac{(1+G_0)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}$$

* A basse fréquence $\omega \ll \omega_2$: $|\underline{H}_2| \approx 1 + G_0$

* A haute fréquence $\omega \gg \omega_2$: $|\underline{H}_2| \approx 1$

$$Q15 \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} \quad \text{et } G_0 = \frac{R_2}{R_3}$$

$$AN: \quad f_2 = \frac{1}{2\pi \cdot 680 \cdot 10^3 \cdot 470 \cdot 10^{-12}} = \underline{4,98 \cdot 10^2 \text{ Hz}}$$

$$G_0 = \frac{680 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3} = \underline{113}$$

Ce filtre va donc amplifier fortement les fréquences $\ll 500 \text{ Hz}$ (gain linéaire = 113 en BF) sans modifier les hautes fréquences).

Q16. Il s'agit d'un passe bande : le gain diminue rapidement en dehors de la bande passante, avec des asymptotes de pente $+20 \text{ dB/dec}$ et -20 dB/dec .

La fréquence centrale caractéristique est $f_0 \approx 330 \text{ Hz}$ (lecture sur le diagramme de droite plus précis)
 Cette valeur est très proche de celle du mi aigu.

Q17. La bande passante à -3 dB est la plage de fréquences pour laquelle $G_{dB} > \frac{G_{dB_{max}}}{\sqrt{2}}$

On lit
$$\begin{cases} f_{c1} = 320 \text{ Hz} \\ f_{c2} = 340 \text{ Hz} \end{cases}$$

La bande passante est donc :

$$[320 \text{ Hz} ; 340 \text{ Hz}] .$$

Q18. Graphiquement, on lit $G_{dB}(315 \text{ Hz}) = -6 \text{ dB}$

On a donc $20 \log |H| = -6$

$$\Rightarrow |H| = 10^{-\frac{6}{20}} = 0,50$$

Le signal est donc atténué de 50% si sa fréquence est 315 Hz.

Q19. Sur le spectre on observe :

- * un premier pic à $f=0 \text{ Hz}$ d'amplitude 10 mV, ce qui est bien cohérent avec le signal de la figure 1.
- * un deuxième pic à un peu plus de 300 Hz, ce qui correspondrait au mode fondamental du signal de la figure 1 (à 330 Hz).
- * des pics successifs réguliers, qui correspondent aux harmoniques, ce qui est cohérent puisque le signal de

La figure 1 est périodique mais pas sinusoïdal.

Q20. Le 1^{er} filtre coupe la composante continue \Rightarrow 1^{er} pic enlevé sur le spectre donc (a)

Q21. Le 2^{ème} filtre amplifie les fréquences inférieures à 500 Hz d'un facteur 100 environ puis de moins en moins (quasiment plus d'amplification à partir du 3^{ème} harmonique) \Rightarrow spectre (d) car le fondamental est environ égal à 1800 mV.

Q22. Le filtre F_c divise l'amplitude par 2 pour le mode fondamental \Rightarrow environ 900 mV.

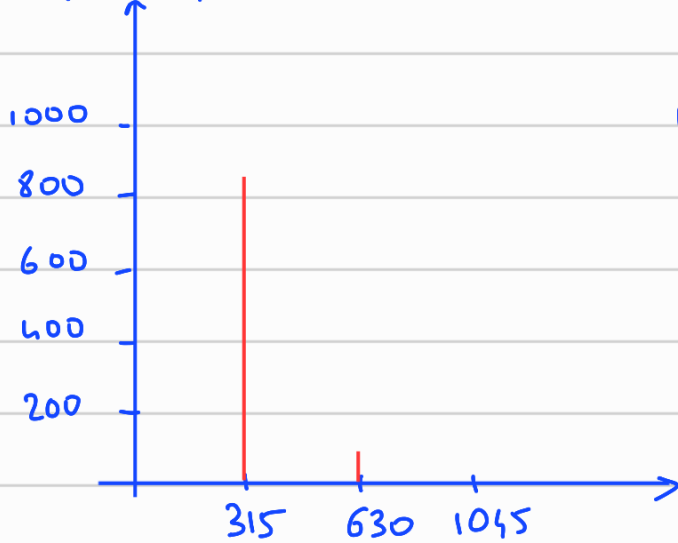
Le 1^{er} harmonique sera ensuite très faible : $G_{dB} \approx -30 \text{ dB}$ pour $f \approx 600 \text{ Hz}$ ce qui correspond à un gain de 0,03. Comme l'amplitude du 1^{er} harmonique était de 2000 mV, on aura en sortie du 3^{ème} filtre une amplitude de 63 mV.

Les autres harmoniques seront presque nuls.

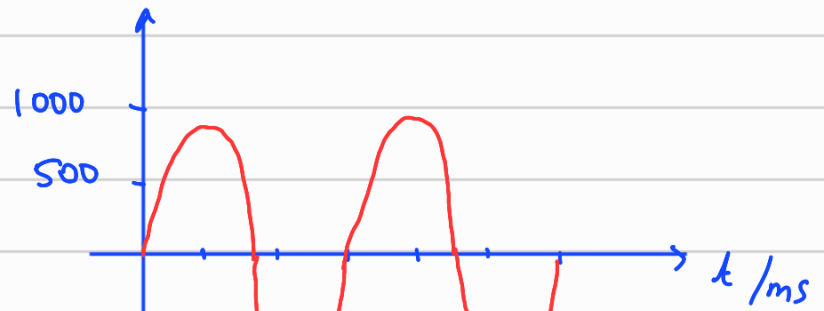
\Rightarrow le signal temporel sera quasiment

sinusoïdal de fréquence 315 Hz et d'amplitude 900 mV.

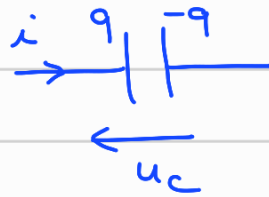
amplitude (mV)



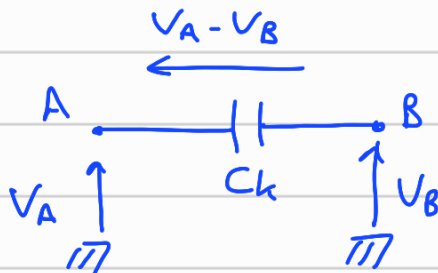
$s(t)$



Q23. En convention récepteur : $q = C u_c$

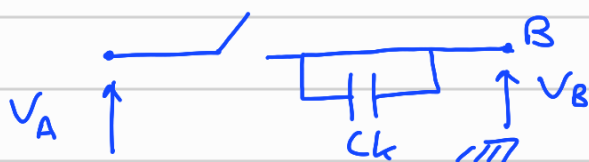


Q24. * Sur l'intervalle $[0, \frac{T_k}{2}[$ on a :



$$q_1 = -C_k (V_A - V_B)$$

* Sur l'intervalle $[\frac{T_k}{2}; T_k[$ on a



$$q_2 = 0$$

$$d'ou \quad dq = C_k (V_A - V_B)$$

$$Q25. \quad Q = \int_0^t i dt \quad \text{avec} \quad i = \frac{dq}{T_k}$$

$$Q = \int_0^t C_k (V_A - V_B) \times \frac{1}{T_k} dt$$

$$Q = \frac{C_k (V_A - V_B)}{T_k} \cdot t$$

$$Q26. \quad I_m = \frac{Q}{t} = \frac{C_k (V_A - V_B)}{T_k}$$

$$\text{Soit} \quad I_m = f_k C_k (V_A - V_B)$$

Q27. La relation précédente peut s'écrire

$$V_A - V_B = \frac{1}{f_k C_k} \cdot I_m$$

En posant $R_k = \frac{1}{f_k C_k}$ on montre que ce

dipôle est équivalent à un conducteur ohmique de résistance $\frac{1}{f_k C_k}$.

Q28. En insérant cette capacité commutée dans un filtre passe bande dont

La fréquence de résonance est fixée par R (fil de Wien par exemple), on peut ajuster cette fréquence de résonance avec la fréquence f_k .

Exercice 2 :

Q1.
$$\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$$

Q2.
$$\vec{F} = -e\vec{E} = -\frac{\rho e r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = -\frac{3e^2 r}{3 \cdot 4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = -kr \vec{e}_r$$

Q3. La force ressentie par l'électron est de la même force que celle exercée par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide nulle \Rightarrow on parle de modèle de l'électron élastiquement lié.

Q4. On étudie le système {électron} dans le référentiel terrestre galiléen. Il ne subit que la force $\vec{F} = -kr \vec{e}_r$

D'après le théorème du moment

cinétique on a : $\frac{d\vec{L}_0(n/R)}{dt} = \vec{\mathcal{J}}_0(\vec{F})$

or $\vec{\mathcal{J}}_0(\vec{F}) = \vec{0}$ car la force est centrale ($\vec{O}\vec{n}$ colinéaire à \vec{F})

d'où $\vec{L}_0(n/R) =$ vecteur constant.

$\vec{L}_0(n/R)$ étant fixe, sa direction ne change pas. Or $\vec{L}_0 = \vec{O}\vec{n} \wedge m\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{O}\vec{n}$ est donc orthogonal à une direction fixe $\Rightarrow n$ appartient au plan orthogonal à \vec{L}_0 passant par O .

Q5. On applique le PFD au système {électron} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m_e \vec{a} = \vec{F}$$

En projetant dans un repère cartésien on obtient :

$$\begin{cases} m_e \ddot{x} = -kx \\ m_e \ddot{y} = -ky \\ m_e \ddot{z} = -kz \end{cases}$$

On a donc 3 équations du type :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$$

$$x \quad x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$\text{or } \ddot{a} \quad t=0 \quad x(0) = r_0 \quad \text{et} \quad v_x(0) = 0$$

$$\text{d'où} \quad r_0 = A \quad \text{et} \quad B \omega_0 = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = r_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$x \quad y(t) = A' \cos \omega_0 t + B' \sin \omega_0 t$$

$$\text{or } \ddot{a} \quad t=0 \quad y(0) = 0 \quad \text{et} \quad v_y(0) = 0$$

$$\text{d'où} \quad A' = 0 \quad \text{et} \quad B' = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = 0$$

$$x \quad z(t) = A'' \cos \omega_0 t + B'' \sin \omega_0 t$$

$$\text{or } \ddot{a} \quad t=0 \quad z(0) = 0 \quad \text{et} \quad v_z(0) = v_0$$

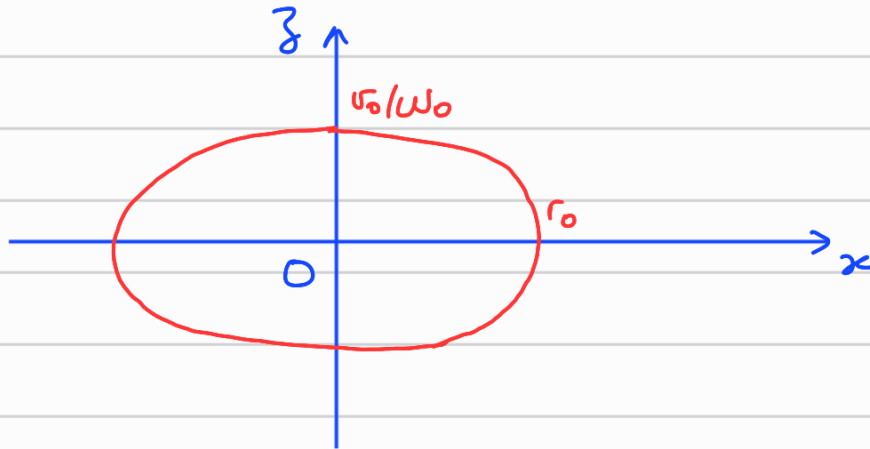
$$\text{d'où} \quad A'' = 0 \quad \text{et} \quad B'' \omega_0 = v_0$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$\begin{cases} x(t) = r_0 \cos(\omega_0 t) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

$$Q6. \quad \frac{x^2}{r_0^2} + \frac{z^2}{(v_0/\omega_0)^2} = 1$$

Le mouvement de l'électron est donc une ellipse de demi-axe r_0 sur Ox et $\frac{v_0}{\omega_0}$ sur Oz , de centre O .



$$Q7. \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m_e}{k}}$$

$$Q8. \quad f_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}} \times \frac{1}{2\pi} \quad \text{avec} \quad k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

$$f_0 = \frac{e}{4\pi \sqrt{\pi m_e \epsilon_0} a^{3/2}}$$

$$AN: \quad f_0 = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{4\pi \sqrt{\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-30}}} = \underline{\underline{2,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}}}$$

Q9. Dans ce cas le moment cinétique est le vecteur nul (et reste constant).
⇒ le mouvement est rectiligne ($\vec{O}\vec{M}$ et \vec{v} sont colinéaires à tout instant).

Le mouvement est similaire à celui d'un mobile lié à un ressort qui est contraint de se déplacer en 1D. (sans frottements).

Q10. La force subie par l'électron est
$$\vec{F} = -eE_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z.$$

Q11. D'après le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on a, en projection suivant \vec{e}_z :

$$m_e \ddot{z} = -kz - h\dot{z} - eE_0 \cos(\omega t)$$

$$\text{soit } \ddot{z} + \frac{h}{m_e} \dot{z} + \frac{k}{m_e} z = -\frac{eE_0}{m_e} \cos(\omega t).$$

Avec les notations proposées :

$$\ddot{z} + 2\alpha \dot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{e}{m_e} E_0 \cos(\omega t)$$

Q12. On définit $z(t) = z e^{j(\omega t + \varphi)} = z e^{j\omega t}$
avec $z = z e^{j\varphi}$

Q13 Avec le formalisme complexe

$$\dot{z} = j\omega z \text{ et } \ddot{z} = -\omega^2 z$$

$$\text{De plus } E_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}(E_0 e^{j\omega t})$$

$$\text{Donc } -\omega^2 z + 2\alpha j\omega z + \omega_0^2 z = -\frac{e E_0}{m_e}$$

$$z (\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha\omega j) = -\frac{e E_0}{m_e}$$

$$z = \frac{e E_0 / m_e}{\omega^2 - \omega_0^2 - 2\alpha\omega j}$$

L'accélération \ddot{z} vaut donc :

$$\ddot{z} = \frac{e E_0 / m_e}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + \frac{2\alpha j}{\omega}}$$

Avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ on a :

$$\ddot{z} = \frac{e E_0 / m_e}{\frac{1}{x^2} + 2j \frac{\alpha}{\omega_0} \cdot \frac{1}{x} - 1}$$

Par identification

$$Y_0 = \frac{e E_0}{m_e}$$

Q14. les radiations visibles sont telles que

$$400 \cdot 10^{-9} < \lambda < 800 \cdot 10^{-9}$$

$$\text{or } \lambda = \frac{c}{f} =$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 10^{-7} < \frac{c}{f} < 8 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{c}{8 \cdot 10^{-7}} < f < \frac{c}{4 \cdot 10^{-7}}$$

$$\text{AN: } 3,75 \cdot 10^{14} < f < 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\text{or on avait calculé } f_0 = 2,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\text{Soit: } 0,023 < \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 < 0,09$$

$$\text{On a donc } 11 < \frac{1}{x^2} < 43$$

Le terme 1 sera donc négligé devant $\frac{1}{x^2}$.

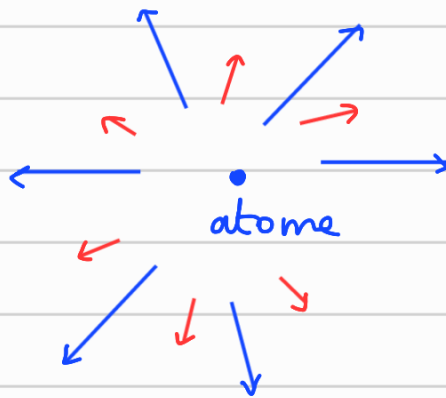
$$\text{Et } \ddot{z} = |\ddot{z}| = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}} \quad \text{Soit } \boxed{\ddot{z}(x) = \gamma_0 x^2}$$

$$Q15 \quad P(x) = \mu \cdot \gamma_0^2 x^4$$

$$\text{or } x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2\pi c}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_0}{2\pi c} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

$$\text{Donc } P(\lambda) = \mu \gamma_0^2 \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4}$$

Q16



$$\frac{P_{\text{bleu}}}{P_{\text{rouge}}} = \left(\frac{\lambda_{\text{rouge}}}{\lambda_{\text{bleu}}} \right)^4 \approx 9^4$$

La puissance diffusée dans le domaine des petites longueurs d'ondes (bleu) est nettement supérieure à celle diffusée dans les grandes longueurs d'onde. Cela explique (en partie) la couleur bleue du ciel. Il faut en réalité aussi tenir compte du spectre de la lumière solaire et de la courbe de réponse de l'œil.

Q17. On considère le système {particule α } dans le référentiel terrestre galiléen.

E_m est une constante du mouvement car la seule force prise en compte est conservative.

$$\text{Or } E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r}$$

avec $r = ON$, en considérant une énergie potentielle électrostatique nulle à l'infini.

Initialement $v \rightarrow v_0$ et $r \rightarrow +\infty$ donc

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Q18. D'après le TNC appliqué à la particule α , on a $\frac{d\vec{L}_O(n)}{dt} = \vec{\sigma}_O(\vec{F})$

or $\vec{\sigma}_O(\vec{F}) = \vec{0}$ (force centrale dirigée selon la droite (ON)).

\Rightarrow le moment cinétique est une constante du mouvement.

$$\vec{L}_O(n) = \vec{ON} \wedge m\vec{v} \quad \text{Évaluons sa valeur}$$

à l'état initial : $\vec{L}_0(n) = (x_0 \vec{u}_x + b \vec{u}_y) \wedge m v_0 \vec{u}_z$

Soit $\vec{L}_0(n) = -m b v_0 \vec{u}_z$ | $\Rightarrow \vec{ON}$ et \vec{v} restent compris dans le plan orthogonal à \vec{u}_z .

$L_0 = m b v_0$.

Q19. $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{k}{r}$

avec $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$

$\Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{k}{r}$

De plus $\vec{L}_0(n) = \vec{ON} \wedge m \vec{v} = \text{constante}$

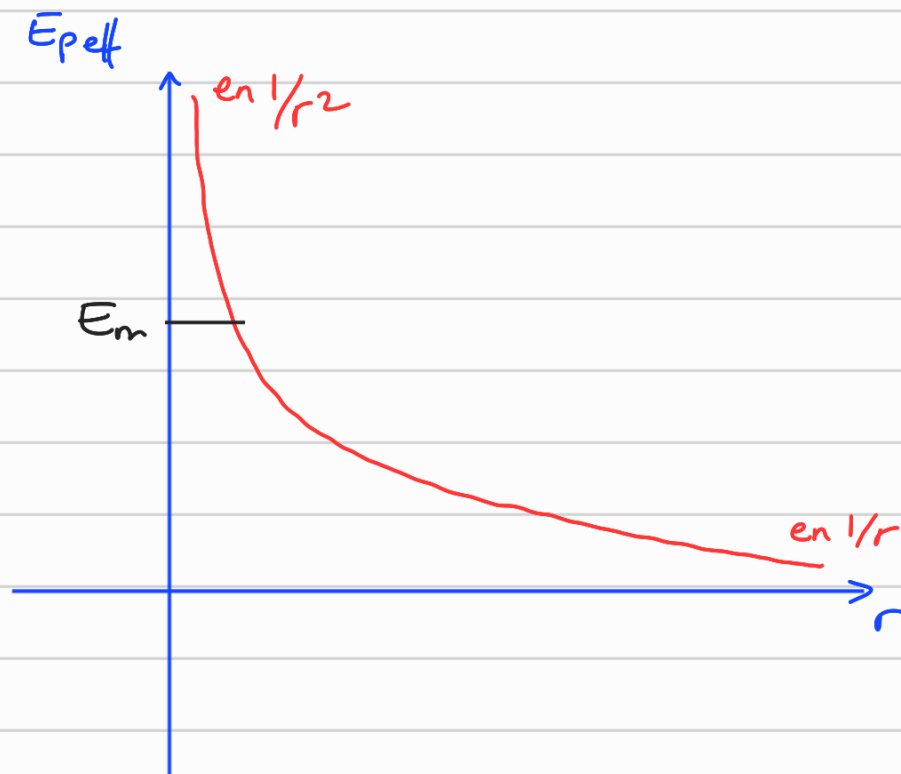
Or $\vec{L}_0(n) = r \vec{u}_r \wedge m (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$

$\Rightarrow m r^2 \dot{\theta} = L_0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{L_0}{m r^2}$

On obtient : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \frac{L_0^2}{m^2 r^4} + \frac{k}{r}$

Soit $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L_0^2}{2 m r^2}}_{E_{p, ell}} + \frac{k}{r}$

Q 20.



Comme E_m est positive le mouvement est non borné \rightarrow état de diffusion.

Q21. OP représente la distance minimale d'approche : r_{\min} . lorsque la particule d est en P, $\dot{r} = 0$ on a donc $E_m = E_{P, \text{eff}}$.

$$E_m = \frac{(mbv_0)^2}{2mr_{\min}^2} + \frac{k}{r_{\min}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

\Rightarrow équation du 2nd degré en r_{\min} :

$$\frac{mb^2v_0^2}{2} + k r_{\min} - \frac{1}{2} m v_0^2 r_{\min}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m v_0^2 r_{\min}^2 - 2k r_{\min} - m b^2 v_0^2 = 0$$

$$\Delta = 4k^2 + 4m^2 b^2 v_0^4 > 0$$

$$r_{\min} = \frac{2k + \sqrt{4k^2 + 4m^2 b^2 v_0^4}}{2m v_0^2} = \frac{2k + 2k \sqrt{1 + \frac{m^2 b^2 v_0^4}{k^2}}}{2m v_0^2}$$

$$r_{\min} = \frac{k}{m v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{m b v_0^2}{k} \right)^2} \right)$$

Q 22 $b = \frac{k}{\tan \beta/2 \cdot m v_0^2}$ avec $k = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$

AN : $k = \frac{2.79(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = 3,64 \cdot 10^{-26} \text{ J.m}$

d'où $b = \frac{3,64 \cdot 10^{-26}}{\tan 30 \cdot 6,64 \cdot 10^{24} (6,20 \cdot 10^5)^2} = 2,47 \cdot 10^{-14} \text{ m}$

Et $r_{\min} = (\tan \beta/2) \cdot b \left(1 + \sqrt{1 + (\tan \beta/2)^2} \right)$

$r_{\min} = 3,1 \cdot 10^{-14} \text{ m}$

⇒ On en déduit qu'un noyau d'or a une taille de l'ordre de 10^{-14} m ⇒ bien plus petit que la valeur connue à l'époque
 ⇒ caractère lacunaire de l'atome.

Q23 D'après le PFD appliqué au système {électron} dans le référentiel R galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_r$$

$$\text{or } \vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = v \vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow -mR\dot{\theta}^2 = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = -m \frac{v^2}{R}$$

D'où
$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R m}}$$

$$\text{et } T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \sqrt{\frac{4\pi^2 \epsilon_0 R m}{e^2}}$$

Q24 . $E = E_c + E_p$

$$= \frac{1}{2} m \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$\text{et } L = mR^2\dot{\theta} = mRv$$

$$L^2 = m^2R^2v^2 = m^2R^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 Rm} = R \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow R = \frac{L^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{me^2}$$

$$E = - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{me^2}{L^2 \cdot 4\pi\epsilon_0} = - \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{L^2}$$

$$E_p - E_n = \underbrace{\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2}}_Y \left(\frac{1}{L_n^2} - \frac{1}{L_p^2} \right)$$

$$\text{Q25 } E_p - E_n = h\nu_{np} = \frac{hc}{\lambda_{np}}$$

$$\text{or } E_p - E_n = Y \left(\frac{1}{(nh)^2} - \frac{1}{(ph)^2} \right)$$

$$\frac{hc}{\lambda_{np}} = \frac{Y}{h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = \frac{Y}{h \cdot h^2 \cdot c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

$$R_H = \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2} \times \frac{4\pi^2}{h^3 \cdot c} = \frac{me^4}{8h^3\epsilon_0^2 c}$$

Exercice 3

Q1. a) D'après le TNC appliqué au système {enfant sur la balançoire} dans le référentiel terrestre galiléen à l'échelle de l'expérience :

$$\frac{d\vec{L}_O(t)}{dt} = \vec{O}\vec{n} \wedge \vec{P} + \underbrace{\vec{O}\vec{n} \wedge \vec{T}}_{=\vec{0}} \quad \text{avec } O \text{ fixe}$$

car $\vec{O}\vec{n}$ et \vec{T} sont colinéaires.

$\vec{O}\vec{n}$ et \vec{P} étant dans le plan "de la feuille" donc $\vec{O}\vec{n} \wedge \vec{P}$ est dans la direction orthogonale à la feuille.

\vec{L}_0 reste donc orthogonal au plan de la feuille (à l'instant initial \vec{L}_0 est orthogonal au plan de la feuille car $\vec{O}\vec{n}(t=0)$ et $\vec{v}(t=0)$ sont dans le plan de la feuille.

b) On continue l'application du TNC :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O(t) &= \vec{O}\vec{n} \wedge m\vec{v} \\ &= l\vec{u}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{u}_\theta = ml^2\dot{\theta}\vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{O}\vec{n} \wedge \vec{P} &= l\vec{u}_r \wedge (mg\cos\theta\vec{u}_r - mg\sin\theta\vec{u}_\theta) \\ &= -mglsin\theta\vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\text{D'où } ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Q2. Pour que l'équation obtenue soit celle d'un O.H il faut $\sin \theta \approx \theta$ donc il faut se placer à des angles faibles ($\theta \ll 1 \text{ rad}$).

$$\text{On a alors } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

La pulsation propre de cet oscillateur harmonique vaut $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\text{Q3. } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\text{AN: } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2,5}{10}} = \underline{3,1 \text{ s}}$$

Q4. En multipliant l'équation obtenue en Q1 par $\dot{\theta}$ on a :

$$\ddot{\theta} \dot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = \frac{g}{l} \frac{d}{dt} (\cos \theta)$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = \frac{g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Or $\dot{\theta}(0) = 0$ (enfant lâché sans vitesse initiale)

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$\text{soit } \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$\text{d'où on tire } dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

On détermine la durée d' $\frac{1}{4}$ d'oscillation: $\frac{T}{4}$

$$\frac{T}{4} = \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

Q5 On remarque que T varie peu pour $\theta_0 < 1 \text{ rad}$.

Q6. $C \frac{d\theta}{dt}$ est un moment : dimension $[\text{force}] \times L$

$$\text{soit } \text{N} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$$

$\frac{d\theta}{dt}$ est une vitesse angulaire : T^{-1}

D'où $[C] = \text{ML}^2\text{T}^{-1}$

Q7. Le TNC projeté sur (Oz) donne :

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - c\dot{\theta}.$$

Q8. Pour de petits angles on a :

$$ml^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgl\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{c\dot{\theta}}{ml^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

on identifie avec l'équation de l'osc
amortie : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x = 0$

$$\frac{c}{ml^2} = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$Q = \frac{ml^2}{c} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Le régime sera pseudo-périodique si

$$Q > \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{ml^2}{c} \sqrt{\frac{g}{l}} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{c}{ml\sqrt{gl}} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad c < 2ml\sqrt{gl}$$

Q9. Le moment de la force est maximal lorsque si \vec{ON} est orthogonal à \vec{F} donc si \vec{ON} est vertical.

⇒ Il faut pousser l'enfant en bas de la trajectoire et vers l'avant.

La période de la force doit donc valoir T_0 (ou un multiple mais moins efficace).

Q10

