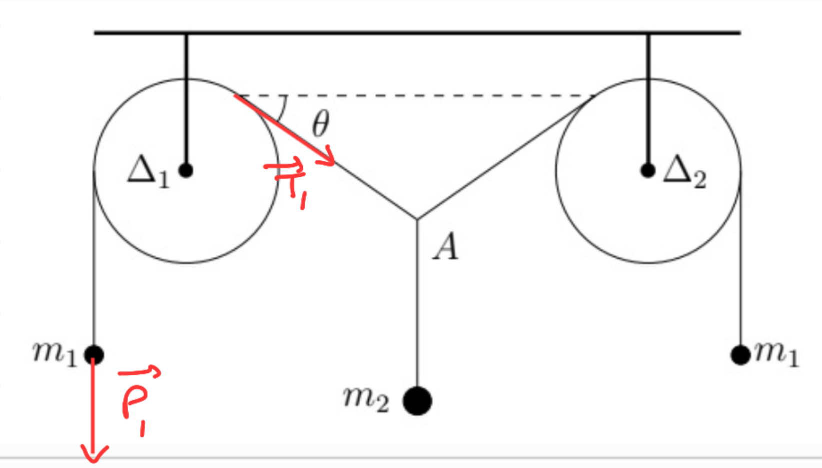
Exercices bonus du chapitre 16

Exercice 1 :



on pose les vecteurs unitaires $\odot_{\Delta_1}$ et $\odot_{\Delta_2}$

* Equilibre de la poulie de gauche : $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = 0$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_1) = \vec{0}$$

(l'action mécanique de liaison autour de l'axe Δ_1 est inconnue mais à un moment nul car on néglige les frottements d'axe).

$$m_1 g R - T_1 R = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1 g .$$

$\Rightarrow$ on démontre ici que lorsqu'un fil passe par une poulie, la force exercée sur ses extrémités change de direction mais pas de norme.

* Equilibre de la poulie de droite : le même raisonnement donne $T_2 = m_1 g$.

* Equilibre du point A :

$$\vec{P_2} + (-\vec{T_1}) + (-\vec{T_2}) = \vec{0}$$

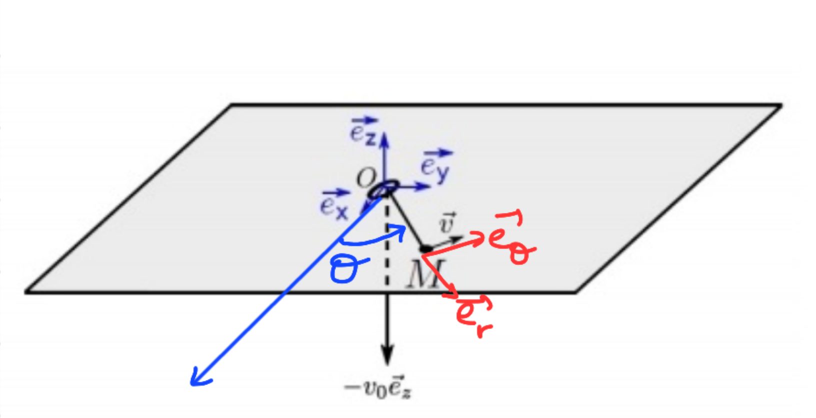
En projetant sur l'axe vertical :

$$m_2 g = 2 m_1 g \sin\theta \implies \boxed{\sin\theta = \frac{m_2}{2m_1}}$$

(Si $m_2 > 2m_1$ cette solution n'est pas définie, la masse m_2 entraîne les 2 masses m_1 et l'ensemble tombe !)

Exercice 2 :

Q1.



On utilise un système de coordonnées cylindriques d'axe Oz, tel que $\vec{OM} = r\vec{u_r}$ avec $r = \ell(t) = \ell_0 - v_0 t$

$$\vec{v}(M/R) = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\vec{L_O}(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M/R)$$

$$= r\vec{u_r} \wedge (m\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})$$

$$= mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}$$

Soit $\boxed{\vec{L_O}(M/R) = m(l_0 - v_0 t)^2 \dot{\theta}\vec{u_z}}$

Q2. On détermine la somme des moments des forces exercées sur M :

$$\Sigma \vec{\mathcal{M}_O}(F) = \vec{OM} \wedge \vec{P} + \vec{OM} \wedge \vec{R} + \vec{OM} \wedge \vec{T}$$

$$= \underbrace{\vec{OM} \wedge (\vec{P} + \vec{R})}_{\substack{=\vec{0} \\ \text{car absence} \\ \text{de frottements}}} + \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{T}}_{\substack{=\vec{0} \text{ car } \vec{T} \text{ est} \\ \text{colinéaire à } \vec{OM}.}}$$

D'après le TMC appliqué au point M dans R galiléen, on a $\frac{d\vec{L_O}(M/R)}{dt} = \vec{0}$

Soit $\vec{L_O}(M/R) = cte$.

$\Rightarrow \boxed{m(l_0 - v_0 t)^2 \dot{\theta} = cte}$

Q3. $\omega(t) = \dot{\theta} \Rightarrow m(l_0 - v_0 t)^2 \omega = m l_0^2 \omega_0$

$$\Rightarrow \boxed{\omega(t) = \frac{l_0^2 \omega_0}{(l_0 - v_0 t)^2}}$$

($\omega(t)$ augmente au cours du temps)

Q4. $E_c = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$

$$= \frac{1}{2} m \left[(-v_0)^2 + (l_0 - vt)^2 \left(\frac{l_0^2 \omega_0}{(l_0 - v_0 t)^2} \right)^2 \right]$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 + \frac{l_0^4 \omega_0^2}{(l_0 - v_0 t)^2} \right)}$$

L'énergie cinétique de la masse m augmente. Elle provient du travail de la force de tension du fil fourni par l'opérateur.

Cette expression est valable pour $t < \frac{l_0}{v_0}$

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \frac{m l_0^4 \omega_0^2}{(l_0 - v_0 t)^2} - \left(\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{l_0^4 \omega_0^2}{l_0^2} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} m l_0^4 \omega_0^2 \left[\frac{1}{(l_0 - v_0 t)^2} - \frac{1}{l_0^2} \right]$$

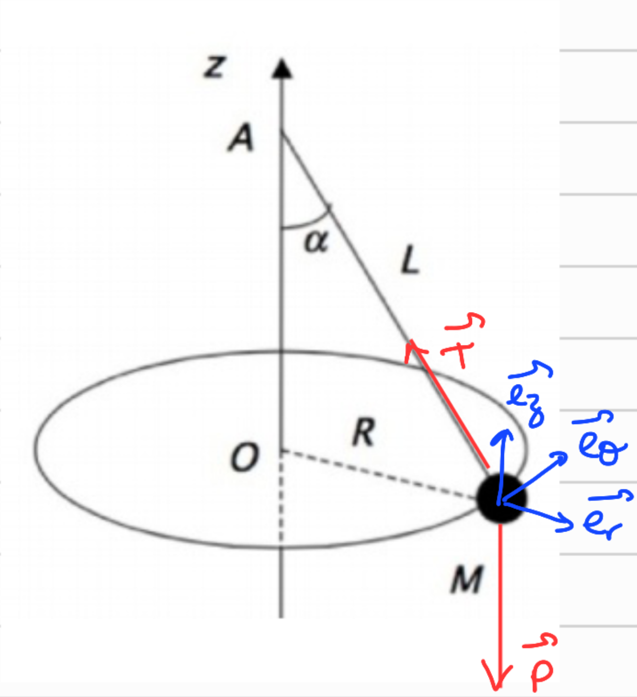
$$= \frac{1}{2} m l_0^4 \omega_0^2 \left(\frac{l_0^2 - (l_0 - v_0 t)^2}{l_0^2 (l_0 - v_0 t)^2} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} m l_0^2 \omega_0^2 \left(\frac{2 l_0 v_0 t - v_0^2 t^2}{(l_0 - v_0 t)^2} \right)$$

Exercice 3 :

Q1. Il est judicieux de calculer les moments des forces par rapport à A ($\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) = \vec{0}$).

Q2.



avec $AO = L\cos\alpha$ et $R = L\sin\alpha$

Bilan des forces sur la masse : $\vec{T}$ et $\vec{P}$.

TMC appliqué à M dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{d\vec{L_A}(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}_A}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}_A}(\vec{T})$$

avec $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) = \vec{AM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ car $\vec{AM}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires.

et $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{P}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{P} = \underbrace{\overrightarrow{AO} \wedge \vec{P}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$

car $\overrightarrow{AO}$ et $\vec{P}$ sont colinéaires

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{P}) = R\vec{u_r} \wedge (-mg\vec{u_z}) = mgR\vec{u_\theta}$$

$$= mgL\sin\alpha\,\vec{u_\theta}$$

et $\overrightarrow{L_A}(M) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(M/R)$

$$= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \wedge mR\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$= -L\cos\alpha\,\vec{u_z} \wedge mR\dot{\theta}\vec{e_\theta} + L\sin\alpha\,\vec{u_r} \wedge mR\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$= mL^2\sin\alpha.\cos\alpha\,\dot{\theta}\,\vec{u_r} + L^2\sin^2\alpha\, m\dot{\theta}\vec{u_z}$$

$$= \frac{1}{2}mL^2\sin\alpha.\cos\alpha.\omega\,\vec{u_r} + \underbrace{L^2\sin^2\alpha\, m\omega\,\vec{u_z}}_{=\text{cte}}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_A}(M)}{dt} = mL^2\sin\alpha.\cos\alpha.\omega^2\,\vec{u_\theta}$$

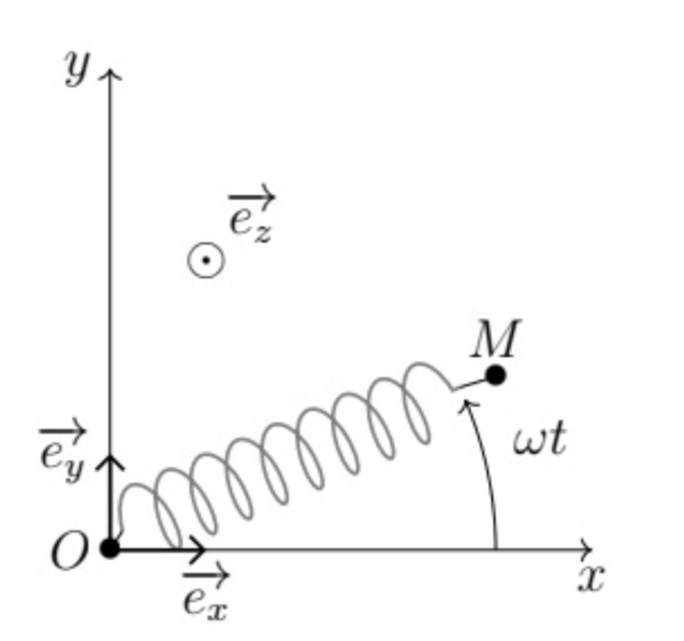
$$\Rightarrow \quad mL^2\sin\alpha.\cos\alpha.\omega^2 = mgL\sin\alpha.$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}}$$

Si $\omega \to +\infty$ $\cos\alpha \to 0$ donc $\alpha \to \pi/2$

Si $\frac{g}{\omega^2 L} > 1$ pas de solution $\left(\omega < \sqrt{g/L}\right)$

Exercice 4 :



Q1 . Bilan des forces : $\vec{P}$
$\vec{R}$
$\vec{T}$

En projetant le PFD dans le plan vertical
on a $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a_z}$

Or le mouvement est plan. On a donc
$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

On peut donc appliquer le TMC avec seulement le moment de $\vec{T}$:

$$\frac{d\vec{L_O}(M/R)}{dt} = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$$ car

$\vec{OM}$ et $\vec{T}$ sont colinéaires.

$\Rightarrow$ le moment cinétique est constant.

Q2. $\overrightarrow{L_O}(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)$

$\vec{v}(t=0) = \vec{0}$ donc $\vec{L_O} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ le mouvement est rectiligne suivant (Ox) (la vitesse reste colinéaire à $\vec{e_x}$)

Q3. PFD projeté sur (Ox) :
$m\ddot{x} = -k(\ell - \ell_i)$

or $x = \ell \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_i$

Solution : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \ell_i$

à $t=0$ $x(0) = 1{,}2\ell_i \Rightarrow A = 0{,}2\ell_i$

et $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow \boxed{\ell(t) = 0{,}2\ell_i\cos(\omega_0 t) + \ell_i}$

On a donc $0{,}8\ell_i < \ell(t) < 1{,}2\ell_i$

Q4. $\overrightarrow{L_O}(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{e_r} \wedge m(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta})$

$\boxed{\overrightarrow{L_O}(M/R) = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}}$

Et à $t=0$ $\vec{L_o}(\Pi/R) = m\ell_1^2\omega\,\vec{e_z}$

Q5. $E_p = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2$

Ici $\vec{P}$ ne travaille pas donc l'énergie potentiel de pesanteur reste constante.

La réaction du support est orthoogonale au déplacement $\Rightarrow$ ne travaille pas.

Or $\Delta E_m = W(\vec{R}) = 0$

donc l'énergie mécanique est constante.

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\ell_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}k(\ell_1-\ell_0)^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{2}(r-\ell_0)^2}$$

Q6. On a donc :

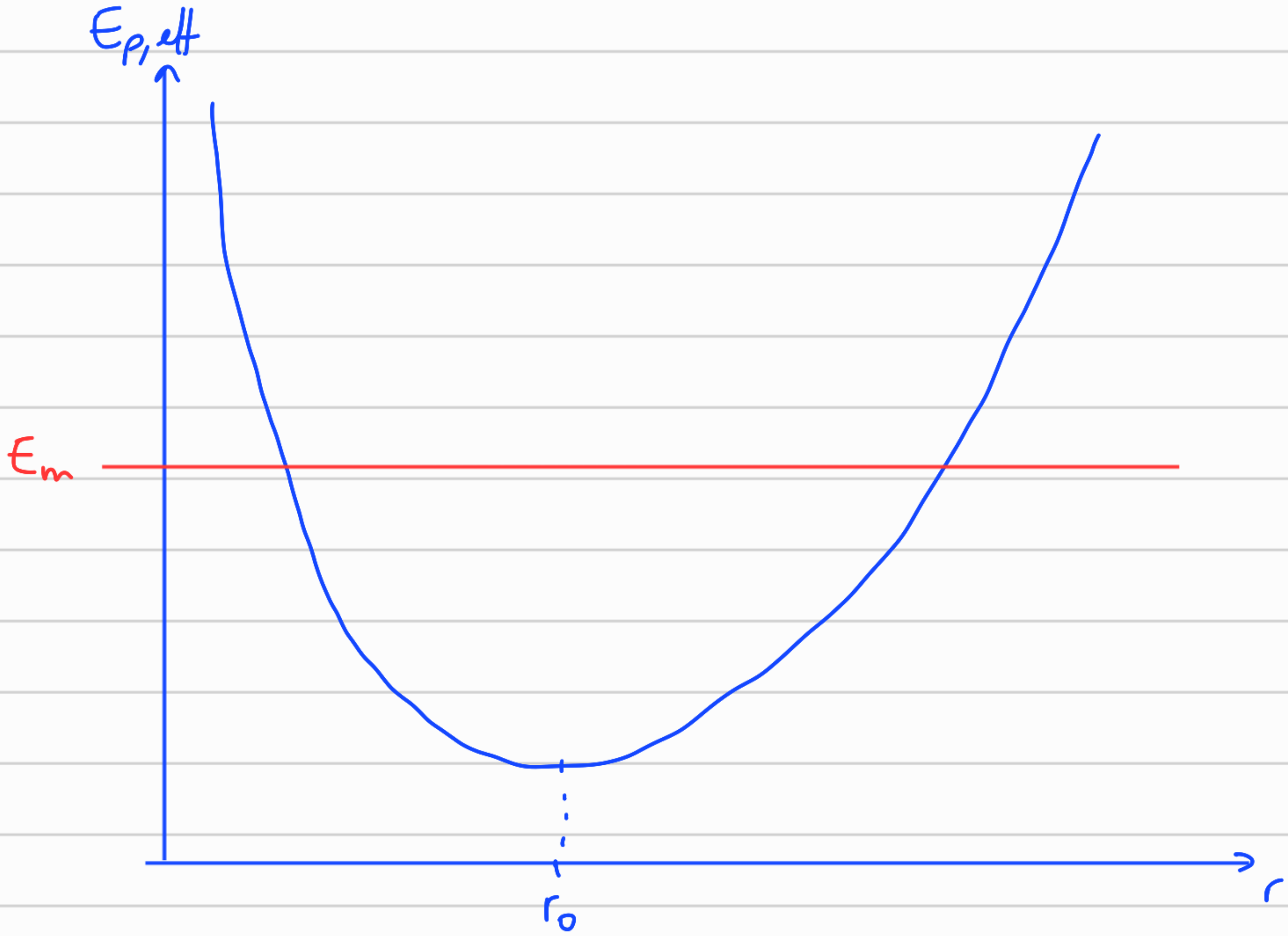
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2$$

Or $mr^2\dot{\theta} = \text{cte} = m\ell_1^2\omega \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{\ell_1^4\omega^2}{r^4}$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{\ell_1^4\omega^2}{r^4} + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{\ell_1^4\omega^2}{r^2} + \frac{1}{2}k(r-\ell_0)^2}_{E_{p\,\text{eff}}(r)}$$

Allure de $E_{p,eff}(r)$: pour $r \to 0$ branche d'hyperbole en $1/r^2$
pour $r \to +\infty$ branche de parabole $\frac{kr^2}{2}$



Q7. Il faudrait une énergie mécanique infinie pour s'éloigner à l'infini de O.

Q8. $\dot{r}$ s'annule au cours du mouvement lors $E_{p,eff} = E_m$ (en 2 positions).

$\dot{\theta}$ ne peut pas s'annuler car $L = mr^2\dot{\theta} = cte$

donc il faudrait $r \to +\infty$ ce qui est impossible.

Q9. Il faudrait E_m infinie pour atteindre 0.

Q10. Pour un mouvement circulaire $r = cte = R$
$\dot{r} = 0$
On a donc $\dot{\theta} = cte$ (car $mr^2\dot{\theta} = cte$)

Soit $$\dot{\theta} = \frac{m\ell_1^2 \omega}{mR^2} = \left(\frac{\ell_1}{R}\right)^2 \omega.$$

Donc le mouvement est uniforme

Q11. La seule possibilité correspond à avoir
$E_m = E_{p,eff\,min}$

$$\frac{dE_{p,eff}}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2} m \ell_1^4 \omega^2 r^{-2} + \frac{1}{2} k (r-\ell_0)^2\right)$$

$$= -m\ell_1^4 \omega^2 r^{-3} + m\omega_0^2 (r-\ell_0)$$
car $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\Rightarrow$ Pour $r = \ell_1$ on a :

$$-m\ell_1^4 \omega^2 \ell_1^{-3} + m\omega_0^2(\ell_1 - \ell_0) = -m\ell_1\omega^2 + m\omega_0^2(\ell_1 - \ell_0)$$

qui est nul lorsque $\ell_1 \omega^2 = \omega_0^2 (\ell_1 - \ell_0)$

$$\ell_1(\omega_0^2 - \omega^2) = \omega_0^2 \ell_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell_1 = \frac{\ell_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad (\text{possible si } \omega < \omega_0)$$