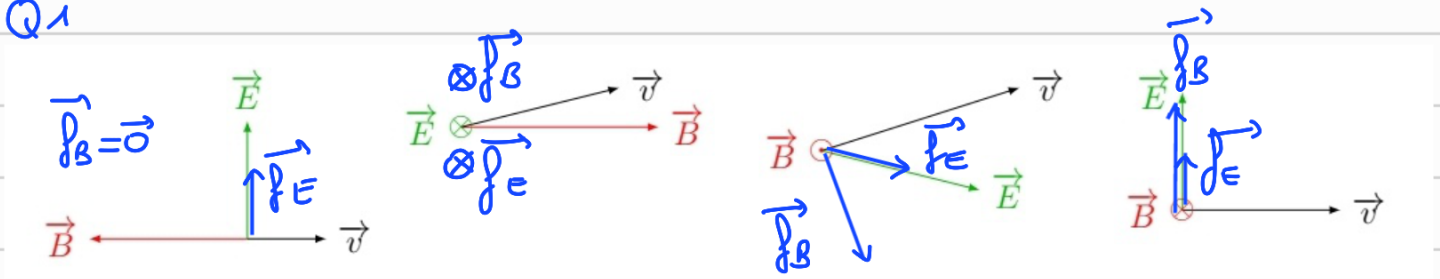


TD 10 Correction

Ex 1 :

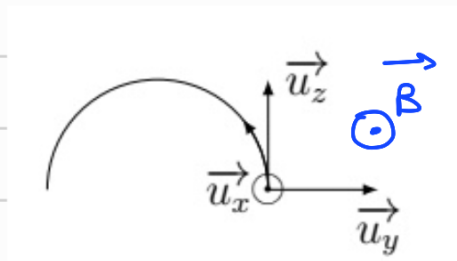
Q1



\vec{F}_E est colinéaire et de même sens que \vec{E}
car $q > 0$.

\vec{F}_B est colinéaire et de même sens que $\vec{v} \wedge \vec{B}$
car $q > 0$.

Q2



D'après le PFD appliqué à la particule :

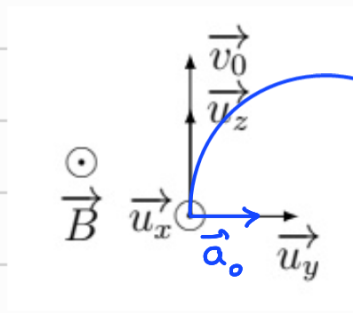
$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B}$$

Or le mouvement est circulaire, donc \vec{a} est centripète (= dirigée vers le centre du cercle)

Avec $q < 0$ on a donc $\vec{v} \times \vec{B}$ centrifuge
= dirigé vers l'extérieur de la trajectoire.

Avec la règle de la main droite on détermine que \vec{B} sort de la feuille.

Q3.



Avec $q > 0$ le produit scalaire $q\vec{v}_0 \times \vec{B}$ ($= \vec{a}_0$) est dirigé vers la droite dans le plan de la feuille.

La particule partira donc vers la droite et décrira le cercle dans le sens horaire

Exercice 2 :

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen, entre O et A :

$$\Delta E_c = W(\vec{F}_e) = -\Delta E_p \quad \text{avec } E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{et } E_p = qV$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2}_{=0} = qV_0 - qV_A = e \underbrace{(V_A - V_0)}_{=U}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$\text{AN: } v_A = \sqrt{\frac{2,16 \cdot 10^{-19} \cdot 500}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = \underline{1,3 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}}$$

Exercice 3 :

Q1. Un proton plongé dans un champ électrique uniforme subit la composante électrique de la force de Lorentz : $\vec{F}_e = e\vec{E}$

$$Q2. \frac{\|\vec{F}_e\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{eE}{mg}$$

$$AN. \frac{\|\vec{F}_e\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5}{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9,81} \approx 10^{12}$$

la norme du poids est donc 10^{12} fois plus petite que celle de la force électrique.

Q3. le PFD appliqué à un proton dans le référentiel terrestre supposé galiléen donne :

$$m\vec{a} = e\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m}$$

le vecteur accélération est constant au cours du mouvement.

$$Q4. \delta W(\vec{F}_e) = q\vec{E} \cdot d\vec{ON} = d(q\vec{E} \cdot \vec{ON})$$

car \vec{E} est uniforme

$$\text{En posant } E_{pd} = -q\vec{E} \cdot \vec{ON} + cte$$

$$\text{on a bien } \delta W(\vec{F}_e) = -dE_{pd}$$

la force électrique est donc conservative, elle dérive de l'énergie potentielle

$$E_{pd} = -q\vec{E} \cdot \vec{ON} + cte$$

Q5. le théorème de l'énergie cinétique appliqué au proton entre $x=0$ et $x=L$ donne :

$$\Delta E_c = W(\vec{F}_{el}) = -\Delta E_p$$

$$\text{avec } E_p = qV$$

$$\Rightarrow E_{cL} - \underbrace{E_{c0}}_{=0} = -(qV_L - qV_0) = qU = eU$$

$$E_{cL} = eU$$

Q6. D'après Q5, un proton accéléré sous une différence de potentiel U_0 a l'énergie cinétique eU_0 .

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

Q7. Entre 2 tubes voisins on a d'après ce qui précède $\Delta E_c = eU_c$.

Q8. A la sortie du nième tube :

$$E_c(n) = e(U_0 + (n-1)U_c)$$

$$\text{D'où } v_n = \sqrt{\frac{2e(U_0 + (n-1)U_c)}{m}}$$

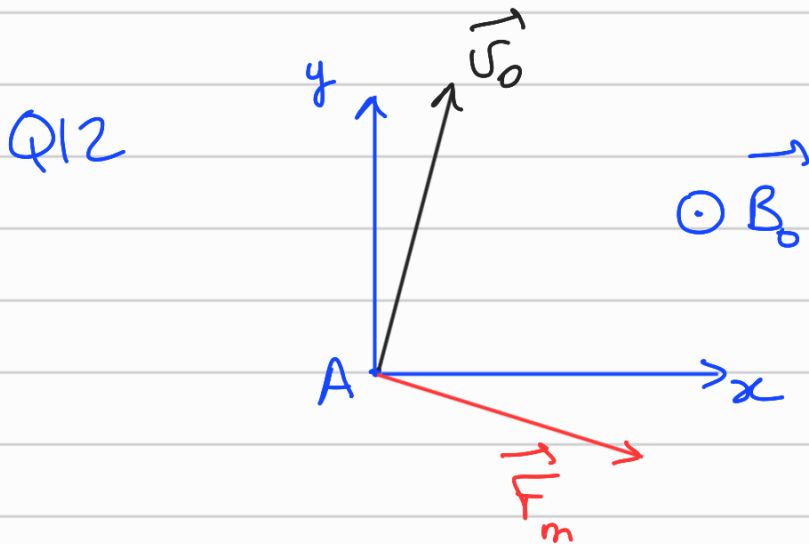
$$\text{Q9. Pour } n = 10 \quad v_{10} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{1.67 \cdot 10^{-27}} (200 \cdot 10^3 + 9 \cdot 2000 \cdot 10^3)}$$

$$v_{10} \approx 5,9 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

Q10. $\frac{v_{10}}{c} \times 100 \approx 20\% < 33\%$ donc ces protons ne sont pas relativistes.

Q11. Dans un champ magnétique \vec{B}_0 le proton subit la composante magnétique de la force de Lorentz :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$



$$\|\vec{F}_m\| = \|e\vec{v} \wedge \vec{B}_0\|$$

$$= evB_0$$

car \vec{v} et \vec{B}_0 sont orthogonaux.

Q13. AN avec $B_0 = 1\text{T}$:

$$F_m \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,9 \cdot 10^7 \cdot 1 \approx 94 \cdot 10^{-12} \text{ N}$$

$$\text{or } P = 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9P \approx 1,7 \cdot 10^{-28} \text{ N}$$

$\Rightarrow \vec{F}_m$ est $5,5 \cdot 10^{16}$ fois plus intense que \vec{P}

le poids n'agit donc pas sur le mouvement du proton dans un champ magnétique.

$$Q14. \delta W(\vec{F}_m) = (q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{ON}$$

$$\text{or } d\vec{ON} = \vec{v} dt$$

mais $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonal à \vec{v}

donc $\delta W(\vec{F}_m)$ est nul.

La force de Lorentz magnétique ne travaille pas.

D'après le théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_c = 0$ donc la norme de la vitesse du proton est constante, le mouvement est uniforme.

Q15. Le PFD appliqué au proton dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$$m_p \vec{a} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Le mouvement étant circulaire, on utilise les coordonnées polaires et

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r$$

(mouvement circulaire uniforme)

$$-m_p \frac{v_0^2}{R} \vec{u}_r = e R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \wedge B_0 \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow m_p \frac{v_0^2}{R} = e v_0 B_0 \quad \text{car } \vec{v}_0 \perp \vec{B}_0$$

$$R = \frac{m_p v_0}{e B_0}$$

Or la quantité de mouvement du proton vaut $p = m_p v_0$

$$\Rightarrow R = \frac{p}{e B_0}$$

Q16. Après la sortie de la zone de champ magnétique le proton n'est soumis à aucune force il est en mouvement rectiligne uniforme.

$$Q17. E = m_p c^2 + E_c = \gamma m_p c^2 \Rightarrow \gamma = 1 + \frac{E_c}{m_p c^2}$$

$$\text{Or } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$$

On a montré que $R = \frac{p}{eB_0}$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{\gamma m_p v_0}{eB_0}}$$

Q18. l'énergie cinétique des protons du LHC vaut 7 TeV soit $7 \cdot 10^{12}$ eV

$$\text{or } 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_c = 7 \cdot 10^{12} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,12 \cdot 10^{-6} \text{ J.}$$

$$\text{donc } \gamma = 1 + \frac{1,12 \cdot 10^{-6}}{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = 7320 \gg 1$$

$$\text{D'où } \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{7320^2}} \approx 1 \Rightarrow v \approx c$$

le rayon du LHC vaut $\frac{27 \text{ km}}{2\pi}$

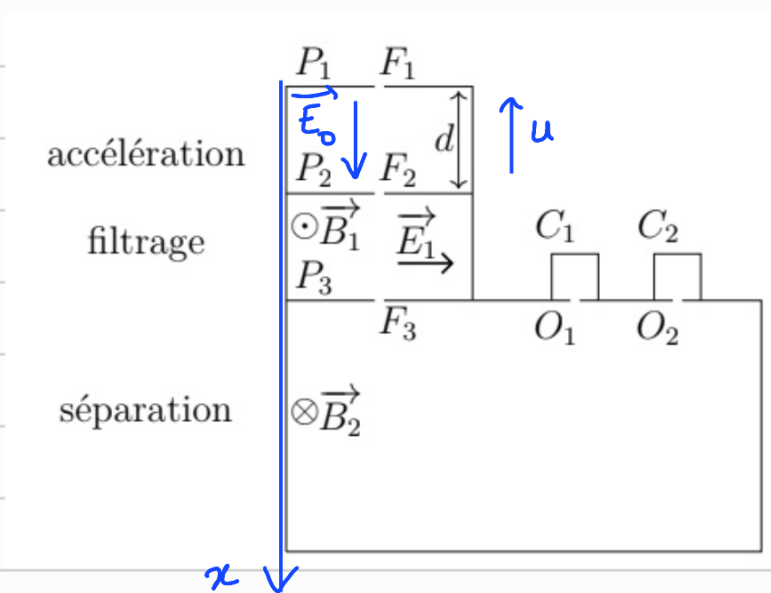
$$\Rightarrow R = 4,297 \text{ m}$$

$$\text{Or } B_0 = \frac{\gamma m_p v}{Re}$$

$$\text{AN: } B_0 = \frac{7320 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^8}{4297 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,3 \text{ T}$$

Exercice 4:

Q1. Les ions mercure sont chargés positivement. Pour les accélérer, il faut donc un champ électrique \vec{E}_0 dirigé de P_1 vers P_2 soit $V_{(1)} > V_{(2)}$



$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \boxed{E_0 = \frac{U}{d}}$$

$$\text{AN: } E_0 = \frac{1,00 \cdot 10^4}{1,00} = \underline{\underline{1,00 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}}}$$

Q2. D'après le TEP appliqué à l'ion mercure entre P_1 et P_2 dans $\mathcal{R}_{\text{galiléen}}$:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = -(qV_2 - qV_1) = -q(V_2 - V_1) = qU$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \quad \text{avec} \quad q = 2 \cdot e$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{4eU}{m}}$$

Q3. Pour l'ion ${}_{80}^{200}\text{Hg}^{2+}$

$$m = 200 \mu \Rightarrow v_{01} = \sqrt{\frac{eU}{50\mu}}$$

$$\text{AN: } v_{01} = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100 \cdot 10^4}{50 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}} = \underline{1,384 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Pour l'ion ${}_{80}^{202}\text{Hg}^{2+}$

$$m = 202 \mu \Rightarrow v_{02} = \sqrt{\frac{eU}{50,5 \cdot \mu}}$$

$$\text{AN: } v_{02} = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100 \cdot 10^4}{50,5 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}} = \underline{1,377 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Q4. Les ions ont une trajectoire rectiligne si la résultante des forces qu'ils subissent est nulle:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$$

(Principe d'inertie : les ions sont pseudo-isolés donc en mouvement rectiligne uniforme)

Q5. La condition précédente se traduit par :

$$q\vec{E}_1 + q\vec{v}_0 \times \vec{B}_1 = \vec{0}$$

avec \vec{v}_0 et \vec{E}_1 orthogonaux à \vec{B}_1 , on a :

$$qE_1 = qv_0 B_1 \quad \text{soit} \quad \boxed{v_0 = \frac{E_1}{B_1}}$$

Q6. AN: $v_0 = \frac{5,30 \cdot 10^4}{0,383} = 1,384 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$

Ce sont donc les ions ${}_{80}^{200}\text{Hg}^{2+}$ qui

parviennent en F_3 .

Remarque: l'isotope 202 étant moins rapide, la force électrique l'emportera sur la force magnétique, il sera dévié vers la droite et ne pourra pas arriver dans la chambre de séparation (passage par F_3)

$$Q7. \text{ TPC} : \frac{dE_c}{dt} = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

donc $E_c = \text{cte}$, donc $\|\vec{v}\| = \text{cte}$

\Rightarrow mouvement uniforme.

Q8. Voir démonstration dans l'ex3 Q2.

$$R = \frac{mv_0}{qB_2}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{200u v_{01}}{2e B_2}$$

$$\text{AN: } R_1 = \frac{200 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 1,384 \cdot 10^5}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,200} = \underline{0,722 \text{ m}}$$

$$\text{et } R_2 = \frac{202u v_{02}}{2e B_2}$$

$$\text{AN: } R_2 = \frac{202 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 1,377 \cdot 10^5}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,200} = \underline{0,726 \text{ m}}$$

Q9. le collecteur C_1 est placé à $2R_1 = 1,444 \text{ m}$

et reçoit les ions ${}_{80}^{200}\text{Hg}^{2+}$.

le collecteur C_2 est placé à $2R_2 = 1,452 \text{ m}$

et reçoit les ions ${}_{80}^{202}\text{Hg}^{2+}$.

$$Q10. \quad \delta = 2R_2 - 2R_1 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 8 \text{ mm}$$

\Rightarrow distance suffisante pour installer des détecteurs de particules et permettre les mesures.

Q11. Proportion d'ions ${}^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$:

$$\frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \times 100 = \frac{1,2 \cdot 10^{-7}}{1,2 \cdot 10^{-7} + 3,5 \cdot 10^{-8}} \times 100 = 77,4 \%$$

Proportions d'ions ${}^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$:

$$\frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \times 100 = 22,6 \%$$

La masse molaire du mercure se calcule en faisant une moyenne pondérée :

$$\Pi(\text{Hg}) = \left(\frac{77,4}{100} \times 200 \text{ u} + \frac{22,6}{100} \times 202 \text{ u} \right) \times \text{u}$$

$$\Pi(\text{Hg}) = \left(0,774 \times 200 + 0,226 \times 202 \right) \times \text{u} \times \text{u}^{-1} = 200,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Pi(\text{Hg}) = 200,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$