

# Correction du TD 13

## Exercice 1

Q1.

état	A	B	C
volume (L)	10	10	
pression (Pa)	$10^5$		$10^5$
température (K)	300	350	350

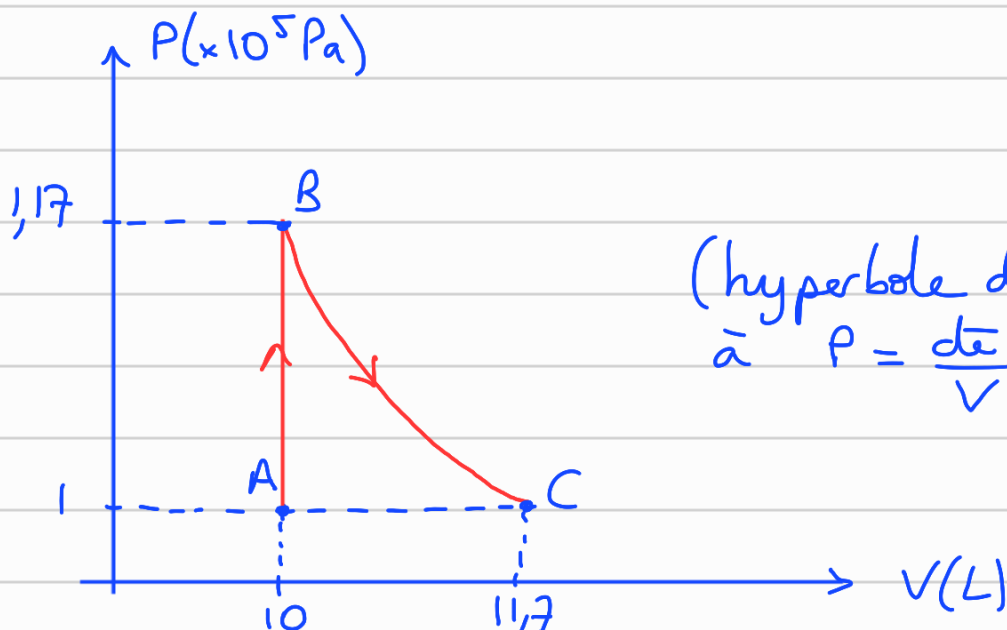
on détermine les valeurs manquantes avec la loi des GP :

$$nR = \frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B} = \frac{P_C V_C}{T_C}$$

$$\Rightarrow P_B = \frac{P_A V_A T_B}{T_A V_B} \quad \text{AN: } P_B = \frac{10^5 \cdot 10 \cdot 350}{300 \cdot 10} = \underline{1,17 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{P_A V_A \cdot T_C}{P_C \cdot T_A} \quad \text{AN: } V_C = \frac{10^5 \cdot 10 \cdot 350}{10^5 \cdot 300} = \underline{11,7 \text{ L}}$$

Q2.



(hyperbole de B à C  
à  $P = \frac{cte}{V}$ )

Q3. Premier principe appliqué au gaz entre A et B :

$$\Delta_{AB} U = W_{AB} + Q_{AB} = Q_{AB} \quad (AB \text{ est isochore})$$

$$\text{Or } \Delta_{AB} U = \frac{3}{2} nR(T_B - T_A)$$

$$= \frac{3}{2} (P_B V_B - P_A V_A) = Q_{AB}$$

$$\text{AN } Q_{AB} = \frac{3}{2} (1,17 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} - 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3})$$
$$= \underline{\underline{255 \text{ J}}}$$

Q4. D'après le 1<sup>er</sup> principe :  $\Delta_{BC} U = W_{BC} + Q_{BC}$

Or BC est une isotherme donc d'après la 1<sup>ère</sup> loi de Joule  $\Delta_{BC} U = 0$

$$\Rightarrow Q_{BC} = -W_{BC}$$

$$\text{Et } W_{BC} = \int_B^C -P_{ext} \cdot dV = \int_B^C -P dV \quad (\text{car transp. réversible})$$

$$\text{avec } P = \frac{nRT}{V}$$

$$W_{BC} = -nRT_B \int_B^C \frac{dV}{V} = -nRT_B \left[ \ln V \right]_{V_B}^{V_C}$$

$$W_{BC} = nRT_B \ln \left( \frac{V_B}{V_C} \right) = P_B V_B \ln \left( \frac{V_B}{V_C} \right)$$

$$\text{AN: } W_{BC} = 1,17 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \ln\left(\frac{10}{11,7}\right) = \underline{-184 \text{ J}}$$

Donc  $Q_{BC} = 184 \text{ J}$  (transfert thermique positif pour compenser l'énergie perdue par travail).

$$\text{Q5 } Q = Q_{AB} + Q_{BC}$$

$$\text{AN: } Q = 255 + 184 = \underline{439 \text{ J}}$$

Q6. On applique le 1<sup>er</sup> principe :

$$\Delta_{AC} U = Q' + W'$$

$$\Delta_{AC} U = \Delta_{AB} U + \underbrace{\Delta_{BC} U}_{BC \text{ isotherme}} = \Delta_{AB} U = \underbrace{Q_{AB}}_{AB \text{ isochore}}$$

$$W' = \int_A^C -P_{ext} dV = \int_A^C -P_A dV = -P_A (V_C - V_A)$$

$$\text{AN: } W' = -10^5 (11,7 - 10) \cdot 10^{-3} = -170 \text{ J}$$

$$Q' = \Delta_{AC} U - W'$$

$$\text{AN: } Q' = 255 + 170 = 425 \text{ J}$$

Q7. On remarque que  $Q' \neq Q$ , ce qui prouve que le transfert thermique dépend du chemin suivie.

## Exercice 2 :

Q1. On étudie le système composé du calorimètre, de l'eau liquide et du cuivre.

Etat initial	Etat final
* eau liquide $m_1 = 0,300 \text{ kg}$ $T_1 = 293 \text{ K}$	* eau liquide $m_1$ $T_3$
* cuivre $m_2 = 0,10 \text{ kg}$ $T_2 = 353 \text{ K}$	* cuivre $m_2$ $T_3$
* calorimètre $T_1 = 293 \text{ K}$	* calorimètre $T_3$

La transformation est isobare donc le 1<sup>er</sup> principe peut s'écrire sous la forme d'un bilan d'enthalpie :

$$\underline{\Delta H = Q = 0} \text{ car la transformation est adiabatique}$$

$$\text{Q2. } \Delta H = \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{cuivre}} + \Delta H_{\text{cal.}} = 0$$

$$0 = m_1 c_e (T_3 - T_1) + m_2 c_{\text{Cu}} (T_3 - T_2) + C (T_3 - T_1)$$

Q3. Les températures, les masses et les capacités thermiques de l'eau et du calorimètre étant connues, on peut déterminer  $c_{\text{Cu}}$ .

$$c_{cu} = \frac{m_1 c_e (T_3 - T_1) + C (T_3 - T_1)}{m_2 (T_2 - T_3)}$$

$$\Rightarrow c_{cu} = \frac{(m_1 c_e + C) (T_3 - T_1)}{m_2 (T_2 - T_3)}$$

$$Q4. \text{ AN : } c_{cu} = \frac{(0,240 \cdot 4180 + 130)(22 - 20)}{0,100(80 - 22)}$$

$$\underline{c_{cu} = 391 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

### Exercice 3 :

Q1. On considère le système fermé constitué par l'ensemble du contenu des 2 enceintes (soit: gaz + vide).

Ce système subit une transformation adiabatique et isochore puisque l'enceinte est calorifugée et indéformable.

Q2. En appliquant le 1<sup>er</sup> principe à ce système, on a :

$$\Delta U = W + Q = 0$$

L'énergie interne étant une grandeur additive :  $\Delta U = \Delta U_{\text{gaz}} + \Delta U_{\text{vide}}$

$$\text{Or } \Delta U_{\text{vide}} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta U_{\text{gaz}} = 0}$$

La variation d'énergie interne du gaz est donc nulle.

Q3. Pour un gaz parfait, l'énergie interne ne dépend que de la température. L'énergie interne du gaz étant constante au cours d'une transformation de Joule Gay-Lussac, sa température est également constante.  
 $\Rightarrow$  les gaz parfaits vérifient la 1<sup>ère</sup> loi de Joule.

Etat initial : volume  $V_1$   
température  $T_i$   
pression :  $P_i = \frac{nRT_i}{V_1}$

Etat final : volume :  $V_1 + V_2$   
température  $T_i$

pression

$$\boxed{P_f = \frac{nRT_i}{V_1 + V_2}}$$

$$Q4. [a] = \left[ \frac{P \cdot V^2}{n^2} \right]$$

$$\text{avec } P = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^{-2} = M L^{-1} T^{-2}$$

$$V = L^3$$

$$n = N$$

$$\text{d'où } [a] = \frac{\pi \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} \cdot L^6}{N^2}$$

$$\text{soit } [a] = \pi \cdot L^5 \cdot T^{-2} \cdot N^{-2}$$

$$(\text{unité : } \text{kg} \cdot \text{m}^5 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-2})$$

$$[b] = \left[ \frac{V}{n} \right] = L^3 \cdot N^{-1}$$

$$(\text{unité : } \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1})$$

Q5. D'après le premier principe, l'énergie interne est constante au cours d'une transformation de Joule-Gay-Lussac donc on a :

$$nC_{vm}T_i - \frac{n^2 a}{V_1} + \cancel{dU} = nC_{vm}T_2 - \frac{n^2 a}{V_1+V_2} + \cancel{dU}$$

$$nC_{vm}(T_2 - T_i) = n^2 a \left( \frac{1}{V_1+V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = n^2 a \left( \frac{V_1 - V_1 - V_2}{V_1(V_1+V_2)} \right)$$

$$T_2 = -\frac{n^2 a V_2}{V_1(V_1+V_2) \cdot nC_{vm}} + T_i$$

$$T_2 = T_i - \frac{naV_2}{C_{vm}V_1(V_1+V_2)}$$

Q6. Pour  $V_1 = V_2$  l'expression se simplifie :

$$T_2 - T_i = \frac{-na}{2C_{v,m}V_1}$$

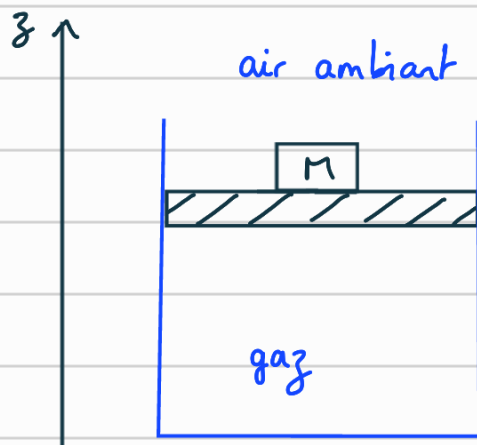
$$\text{AN: } T_2 - T_i = \frac{-98.1,32}{2.21.50.10^{-3}} = \underline{\underline{-5,0^\circ\text{C}}}$$

### Exercice 4:

Q1. On étudie le système composé des  $n$  moles de gaz parfait contenues dans l'enceinte.

Etat initial	Etat final.
$n$ moles	$n$ moles
$P_1 = 1,0 \text{ bar}$	$P_2$
$V_1 = 5,0 \text{ L}$	$V_2$
$T_1 = 293 \text{ K}$	$T_2$

Etude mécanique du système {piston + masse} :





\* le poids :  $\vec{P} = \Pi \vec{g}$

\* la réaction de l'enceinte ( $\perp$  aux parois en absence de frottements)

\* la force de pression exercée par l'air extérieur:  
 $\vec{F}_1 = P_{\text{atm}} \cdot S(-\vec{u}_z) = P_1 \cdot S(-\vec{u}_z)$

\* la force de pression exercée par le gaz contenu dans l'enceinte :  $\vec{F}_2 = P_2 \cdot S \vec{u}_z$

A l'équilibre, d'après la 1<sup>ère</sup> loi de Newton, on a :  $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Soit, en projetant suivant l'axe  $Oz$  :

$$-\Pi g - P_1 \cdot S + P_2 S = 0$$

$$P_2 = P_1 + \frac{\Pi g}{S}$$

$$Q2 \quad W_{12} = \int_{\text{état1}}^{\text{état2}} -P_{\text{ext}} \cdot dV$$

or la compression est monobare à la pression  $P_2$ , donc

$$W_{12} = -P_2 (V_2 - V_1)$$

La compression est supposée adiabatique donc  $Q_{12} = 0$

Q3. Le 1<sup>er</sup> principe appliqué au système  
{ n mole de gaz parfait } donne :

$$\Delta_{12} U = W_{12} + Q_{12} = -P_2(V_2 - V_1)$$

Or pour un gaz parfait monoatomique

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(T_f - T_i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) = -P_2(V_2 - V_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} nRT_2 - \frac{3}{2} nRT_1 = P_2V_1 - P_2V_2$$

Or d'après la loi des gaz parfaits :

$$nRT_2 = P_2V_2 \quad \text{et} \quad nRT_1 = P_1V_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} P_2V_2 - \frac{3}{2} P_1V_1 = P_2V_1 - P_2V_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} P_2V_2 = \left(P_2 + \frac{3}{2} P_1\right) V_1$$

$$\Leftrightarrow V_2 = \frac{2V_1}{5P_2} \left(P_2 + \frac{3}{2} P_1\right)$$

$$\Leftrightarrow V_2 = \frac{2}{5} V_1 + \frac{3V_1}{5} \frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1}{5} \left(2 + 3 \frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$\text{Or } P_2 = P_1 + \frac{nq}{S}$$

$$\Leftrightarrow V_2 = \frac{V_1}{5} \left( 2 + 3 \frac{P_1}{P_1 + \frac{\rho g}{s}} \right)$$

$$\text{AN: } V_2 = \frac{5,0 \cdot 10^{-3}}{5} \left( 2 + 3 \frac{1,0 \cdot 10^5}{1,0 \cdot 10^5 + \frac{1,0 \cdot 9,8}{20 \cdot 10^{-4}}} \right)$$

$$V_2 = 4,86 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = \underline{4,9 \text{ L}}$$

On détermine  $T_2$  avec  $\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_1 V_1}{T_1}$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = T_1 \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{2}{5 P_2} \left( P_2 + \frac{3}{2} P_1 \right)$$

$$T_2 = T_1 \frac{2}{5 P_1} \left( P_2 + \frac{3}{2} P_1 \right)$$

$$T_2 = \frac{T_1}{5} \left( 3 + 2 \frac{P_2}{P_1} \right) = \frac{T_1}{5} \left( 3 + 2 \frac{P_1 + \rho g / s}{P_1} \right)$$

$$\text{AN: } T_2 = \frac{293}{5} \left( 3 + 2 \frac{10^5 + 9,8 / 20 \cdot 10^{-4}}{10^5} \right) = \underline{299 \text{ K}}$$

$$\Rightarrow \Delta_{12} U = n C_{vm} (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} n R T_2 - \frac{3}{2} n R T_1$$

$$= \frac{3}{2} (P_2 V_2 - P_1 V_1)$$

$$\text{AN: } \Delta_{12} U = \frac{3}{2} \left[ \left( 1,0 \cdot 10^5 \cdot 10^5 + \frac{9,8}{20 \cdot 10^{-4}} \right) 4,86 \cdot 10^{-3} - 1,0 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \right]$$

$$\underline{\Delta_{12} U = 14,7 \text{ J}}$$

$$(= W_{12})$$

Q4. le système est au contact du milieu extérieur à  $T_1 = \text{cte}$  avec des parois diathermanes.  
 $\Rightarrow$  transformation monotherme.

Elle est aussi monobare ( $P_{\text{ext}} = \text{cte}$ )

Etat 2	<small>transfo.</small> monotherme + monobare	Etat 3
$n$ moles $P_2 = 1,1 \text{ bar}$ $V_2 = 4,9 \text{ L}$ $T_2 = 293 \text{ K}$	$\rightarrow$	$n$ moles $P_3 = P_2$ $V_3$ $T_3 = T_1$

La paroi est soumise aux mêmes forces que précédemment (forces de normes constantes) donc  $P_3 = P_2 = P_1 + \frac{\rho g h}{5}$

A la fin de la transformation, l'équilibre thermique est atteint donc la température du système est égale à celle du thermostat (l'air extérieur) donc  $T_3 = T_1 = 293 \text{ K}$

D'après la loi des gaz parfaits :

$$\frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \quad \Rightarrow \quad V_3 = \frac{T_3}{T_1} \frac{P_1}{P_3} V_1 = \frac{P_1}{P_2} V_1$$

$$\text{AN: } V_3 = \frac{1,0 \cdot 10^5}{1,0 \cdot 10^5 + \frac{9,8}{20 \cdot 10^{-4}}} \times 5 = \underline{\underline{4,77 \text{ L}}}$$

On a donc  $V_3 < V_2$ , ce qui est en accord avec la loi des GP : la pression et la quantité de matière restent constantes donc  $\frac{T}{V} = \text{cte}$

$\Rightarrow$  si  $T$  diminue  $V$  diminue

Calcul de  $\Delta_{23} U$  :

$$\Delta_{23} U = \frac{3}{2} nR (T_3 - T_2) = \frac{3}{2} nR (T_1 - T_2)$$

$$= \frac{3}{2} P_1 V_1 - \frac{3}{2} P_2 V_2$$

$$= \frac{3}{2} (P_1 V_1 - P_2 V_2) (= -\Delta_{12} U)$$

$$\text{AN: } \Delta_{23} U = \frac{3}{2} \left( 1,0 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-3} - \left( 1,0 \cdot 10^5 + \frac{9,8}{20 \cdot 10^{-4}} \right) \times 4,76 \cdot 10^{-3} \right)$$

$$\Delta_{23} U = -14,7 \text{ J} < 0$$

Calcul de  $W_{23}$  :

$$W_{23} = \int_{\text{état 2}}^{\text{état 3}} -P_{\text{ext}} dV = -P_2 (V_3 - V_2)$$

$$\text{AN: } W_{23} = - \left( 1,0 \cdot 10^5 + \frac{9,8}{20 \cdot 10^{-4}} \right) (4,77 - 4,86) \cdot 10^{-3}$$

$$W_{23} = 9,8 \text{ J} > 0 \quad \left( \text{AN avec valeur non arrondies} \right)$$

Calcul de  $Q_{23}$ :

D'après le 1<sup>er</sup> principe:  $Q_{23} = \Delta_{23}U - W_{23}$

$$\text{AN: } Q_{23} = -14,7 - 9,8 = -24,5 \text{ J}$$

Remarque: on peut aussi appliquer le 1<sup>er</sup> principe enthalpique:

$\Delta_{23}H = Q_{23}$  car la transformation 2 $\rightarrow$ 3 est monobare avec équilibre mécanique à l'état initial et à l'état final.

$$\Delta_{23}H = n C_{pm} (T_3 - T_2) = n \gamma C_{vm} (T_3 - T_2)$$

$$\text{or } C_v = \frac{3}{2} R = \frac{R}{\gamma - 1} \Rightarrow \gamma - 1 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$$

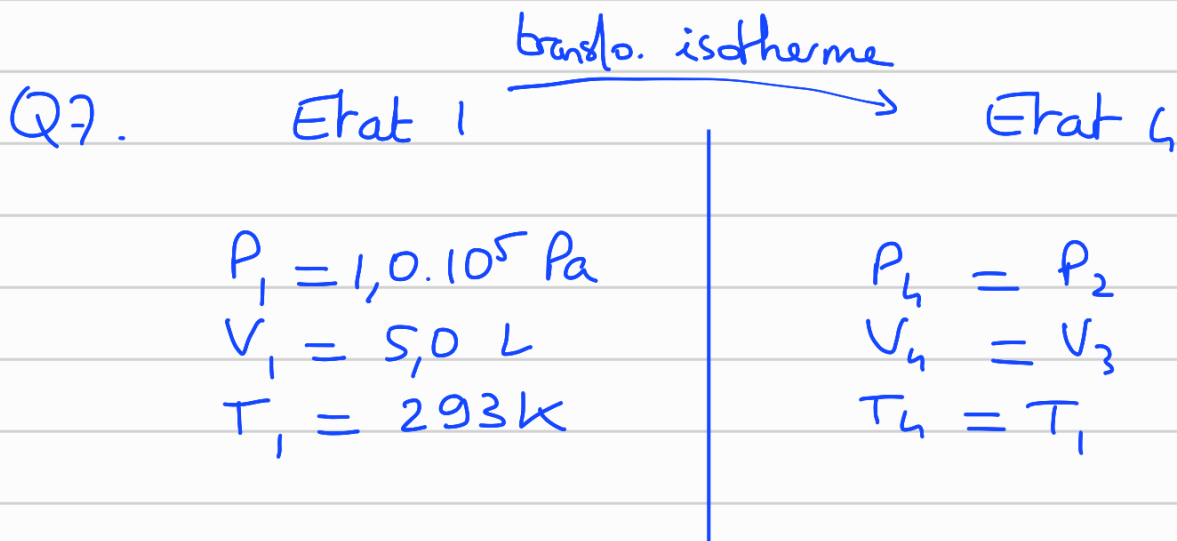
$$\text{et } n = \frac{P_1 V_1}{RT_1} \quad \text{AN: } n = \frac{1,0 \cdot 10^5 \cdot 5,0 \cdot 10^{-3}}{8,314 \cdot 293}$$

$$n = 0,21 \text{ mol}$$

$$\Delta_{23} H = 0,21 \times \frac{5}{3} \times \frac{3}{2} \cdot 8,314 (293 - 299)$$

$$= -24,5 \text{ J} \quad (\text{AN avec valeurs non arrondies})$$

Q6. Cette transformation s'effectue au contact d'un thermostat et elle est quasi-statique  $\Rightarrow$  transformation isotherme.



La transformation étant isotherme :  
 $T_4 = T_1$ .

La masse finale ajoutée est la même que précédemment donc  $P_4 = P_2 = P_1 + \frac{\Delta m g}{S}$

On a donc le même état que l'état 3 (même quantité de matière, même température, même pression) donc le volume est le même :  $V_4 = V_3$

Q8. L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température donc  $\Delta_{14}U = 0$ .

Travail des forces de pression :

$$W_{14} = \int_{\text{état}_1}^{\text{état}_4} -P_{\text{ext}} dV = \int_{\text{①}}^{\text{④}} -PdV \quad (\text{car isotherme})$$

$$W_{14} = \int_{\text{①}}^{\text{④}} -nRT \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right) \\ = P_1 V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right)$$

$$\text{AN: } W_{14} = 1,0 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \ln\left(\frac{5,0}{4,77}\right)$$

$$W_{14} = 23,9 \text{ J} \quad (\text{AN avec valeurs non arrondies})$$

Le premier principe donne  $Q_{14} = -W_{14}$

$$\text{soit } Q_{14} = -23,9 \text{ J}$$

$$\Delta_{13}U = \Delta_{12}U + \Delta_{23}U = 14,7 + (-14,7) = 0$$

$\Rightarrow \Delta_{14}U = \Delta_{13}U$  (normal car  $U$  est une fonction d'état qui ne dépend que de l'état du système).



$$W_{13} = W_{12} + W_{23} = \Delta_{12}u + W_{23} = 14,7 + 9,8$$

$$W_{13} = 24,5 \text{ J} \neq W_{14}$$

(normal car le travail des forces de pression dépend de la transformation)

### Exercice 5:

Q1. On applique le 1<sup>er</sup> principe au système {local + mur} sur une durée infinitésimale  $dt$ :

$$du = CdT = -P_{th} dt + P dt$$

$$\Leftrightarrow CdT = -\frac{1}{R} (T(t) - T_0) dt + P dt$$

$$\Leftrightarrow CdT + \frac{T(t)}{R} dt = \frac{T_0}{R} dt + P dt$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{T(t)}{RC} = \frac{T_0}{RC} + \frac{P}{C}}$$

c'est une équation différentielle d'ordre 1 :

\* Solution particulière :  $T_p(t) = T_0 + RP$

\* Solution générale de l'E.H :  $T_H(t) = A e^{-t/\tau}$

avec  $\tau = RC$

⇒ Solution complète :

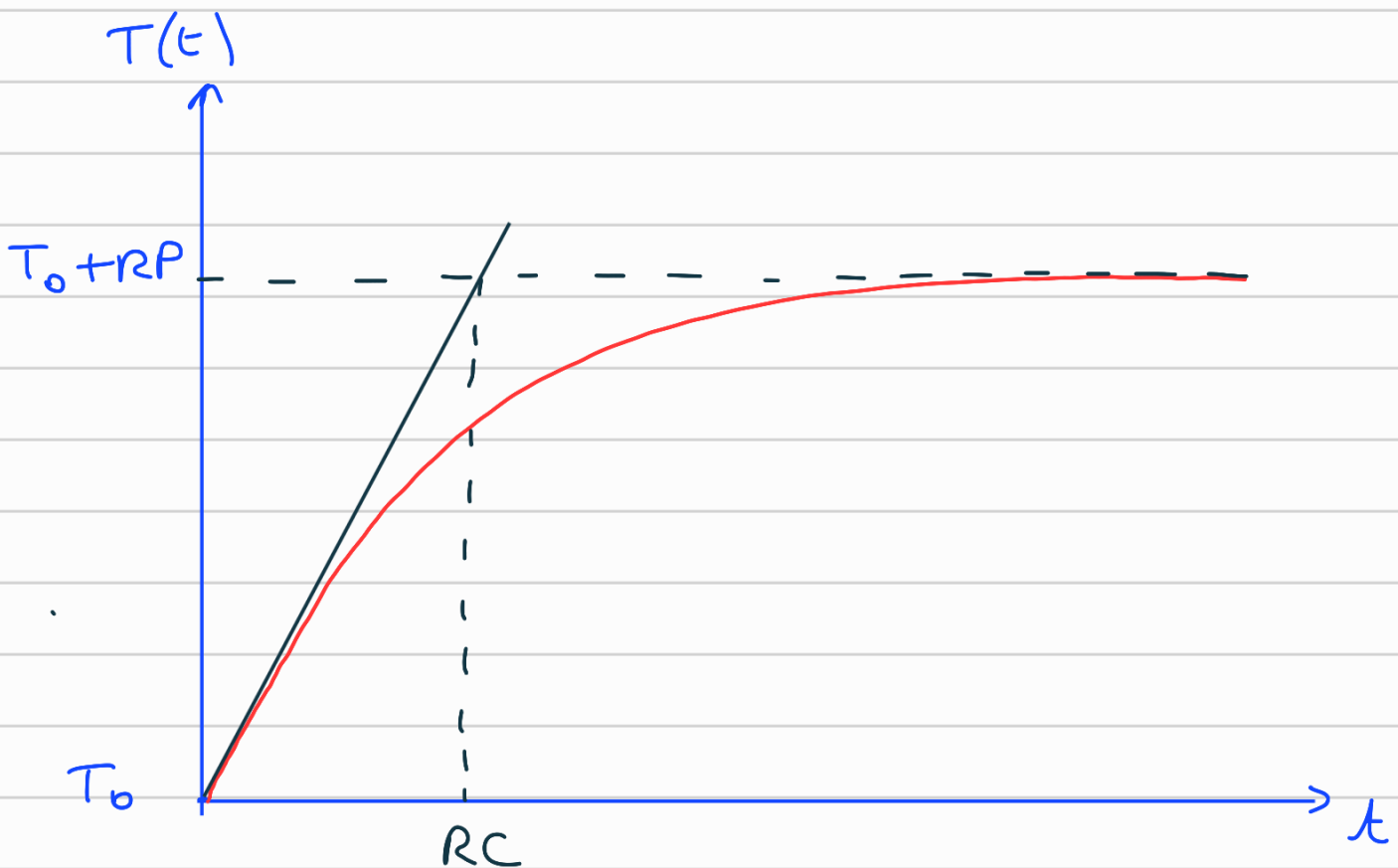
$$T(t) = A e^{-t/\tau} + T_0 + RP$$

Conditions initiales  $T(0) = T_0$

$$T_0 = A e^{-t/\tau} + T_0 + RP$$

$$\Rightarrow A = -RP$$

$$\Rightarrow \boxed{T(t) = RP(1 - e^{-t/\tau}) + T_0} \quad \text{avec } \tau = RC$$



Q2.  $T(\infty) = T_0 + RP$

AN:  $T(\infty) = 280 + 2,00 \cdot 10^{-2} \cdot 2,00 \cdot 10^3$

Soit  $T(\infty) = 320 \text{ K} \approx 47^\circ \text{C} !$

$\Rightarrow$  il faut diminuer la puissance du radiateur.

### Exercice 6 :

Q1. On applique le 1<sup>er</sup> principe au système {conducteur ohmique} :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

\* Le transfert thermique élémentaire reçu par le système au contact de l'atmosphère est  $\delta Q = a(T_0 - T) dt$

\* Le courant électrique fournit le travail élémentaire :  $\delta W = RI^2 dt$

\* Pour le conducteur ohmique de capacité thermique  $C$  :  $dU = C dT$

$$\Rightarrow C dT = a(T_0 - T) dt + RI^2 dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dT}{T} + \frac{a}{C} T = \frac{aT_0}{C} + \frac{RI^2}{C}}$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1

avec la constante de temps  $\tau = \frac{C}{a}$

Q2. Pour  $t \rightarrow +\infty$  la température tend vers  $T_{\text{lim}} = T_0 + \frac{RI^2}{a}$

$$\text{Soit } T_1 = T_0 + \frac{RI^2}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{RI^2}{T_1 - T_0}}$$

$$\text{AN : } a = \frac{10^3 \cdot 0,1^2}{313 - 293} = \underline{\underline{0,5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}}}$$

### Exercice 7 :

Q1.

\* la transformation est très lente, donc il y a équilibre à chaque instant.  
On a donc  $\delta W = -PdV$

\* le gaz est parfait donc  $dU = nC_{v,m}dT$

\* les parois sont adiabatiques donc  $\delta Q = 0$ .

Le premier principe appliqué au gaz contenu dans l'enceinte donne :

$$dU = \delta W = -PdV$$

\* le gaz étant parfait  $PV = nRT$

$$\text{donc } V = nR \frac{T}{P} \Rightarrow \ln V = \ln \left( nR \frac{T}{P} \right)$$

$$\text{soit } \ln V = \ln(nR) + \ln T - \ln P$$

On fait une différentielle logarithmique

$$d(\ln V) = \frac{dV}{V} = \underbrace{\frac{d(nR)}{nR}}_{=0 \text{ car constante}} + \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P}$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \Rightarrow dV = \frac{V}{T} dT - \frac{V}{P} dP$$

$$\text{On a donc } nC_{vm} dT = -\frac{PV}{T} dT + \frac{PV}{P} dP$$

$$\Rightarrow nC_{vm} dT = -nR dT + V dP$$

$$\text{or } V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow nC_{vm} dT = -nR dT + nRT \frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow C_{vm} \frac{dT}{T} + R \frac{dT}{T} = R \frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow (C_{vm} + R) \frac{dT}{T} = R \frac{dP}{P}$$

$$\text{Or } C_{pm} - C_{vm} = R \Rightarrow C_{vm} + R = C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} = R \frac{dP}{P}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} = \frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{dT}{T} = (\gamma - 1) \frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{dT}{T} + (1 - \gamma) \frac{dP}{P} = 0$$

$$\Rightarrow d(\ln T^\gamma) + d(\ln P^{1-\gamma}) = 0$$

$$\Rightarrow d(\ln(T^\gamma \cdot P^{1-\gamma})) = 0$$

En intégrant :  $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}$

Q2. On applique la relation précédente :

$$T_0^\gamma P_0^{1-\gamma} = T_1^\gamma P_1^{1-\gamma}$$

or  $PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{PV}{nR}\right)^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}$$

$$\Leftrightarrow PV^\gamma = \text{cte}$$

donc  $P_0 V_0^\gamma = P_1 V_1^\gamma$

De même on exprime la relation en fonction des variables  $T$  et  $V$  en éliminant  $P$ :

$$P = \frac{nRT}{V} \Rightarrow \left(\frac{nRT}{V}\right) V^\gamma = \text{cte}$$

$$\Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{cte}$$

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

Remarque : ces 3 relations  $\left\{ \begin{array}{l} PV^\gamma = \text{cte} \\ TV^{\gamma-1} = \text{cte} \\ T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte} \end{array} \right.$

sont appelées lois de Laplace, elles s'appliquent aux transformations adiabatiques et lentes des gaz parfaits sur une plage de températures où  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  est constant.

$$Q3. \delta W = -PdV \quad \text{or} \quad PV^\gamma = \text{cte} = P_0 V_0^\gamma$$

donc  $P = \frac{P_0 V_0^\gamma}{V^\gamma}$

$$\Rightarrow \delta W = -P_0 V_0^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = -P_0 V_0^\gamma d\left(\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

$$W = \int_{\text{état}_0}^{\text{état}_1} -P_0 V_0^\gamma d\left(\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

$$W = -\frac{P_0 V_0^\gamma}{1-\gamma} (V_1^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}) \quad \text{or } P_0 V_0^\gamma = P_1 V_1^\gamma$$

$$W = \frac{P_1 V_1^\gamma \cdot V_1^{1-\gamma} - P_0 V_0^\gamma \cdot V_0^{1-\gamma}}{\gamma-1}$$

$$W = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma-1}$$

Q4. D'après le 1<sup>er</sup> principe on a :

$\Delta U = W + Q \Rightarrow W = \Delta U$  car la transformation est adiabatique.

avec  $\Delta U = n C_{vm} (T_1 - T_0) = n \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_0)$

Soit  $W = \frac{nRT_1 - nRT_0}{\gamma-1}$

or  $P_1 V_1 = nRT_1$  et  $P_0 V_0 = nRT_0$

$$\Rightarrow W = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma-1}$$



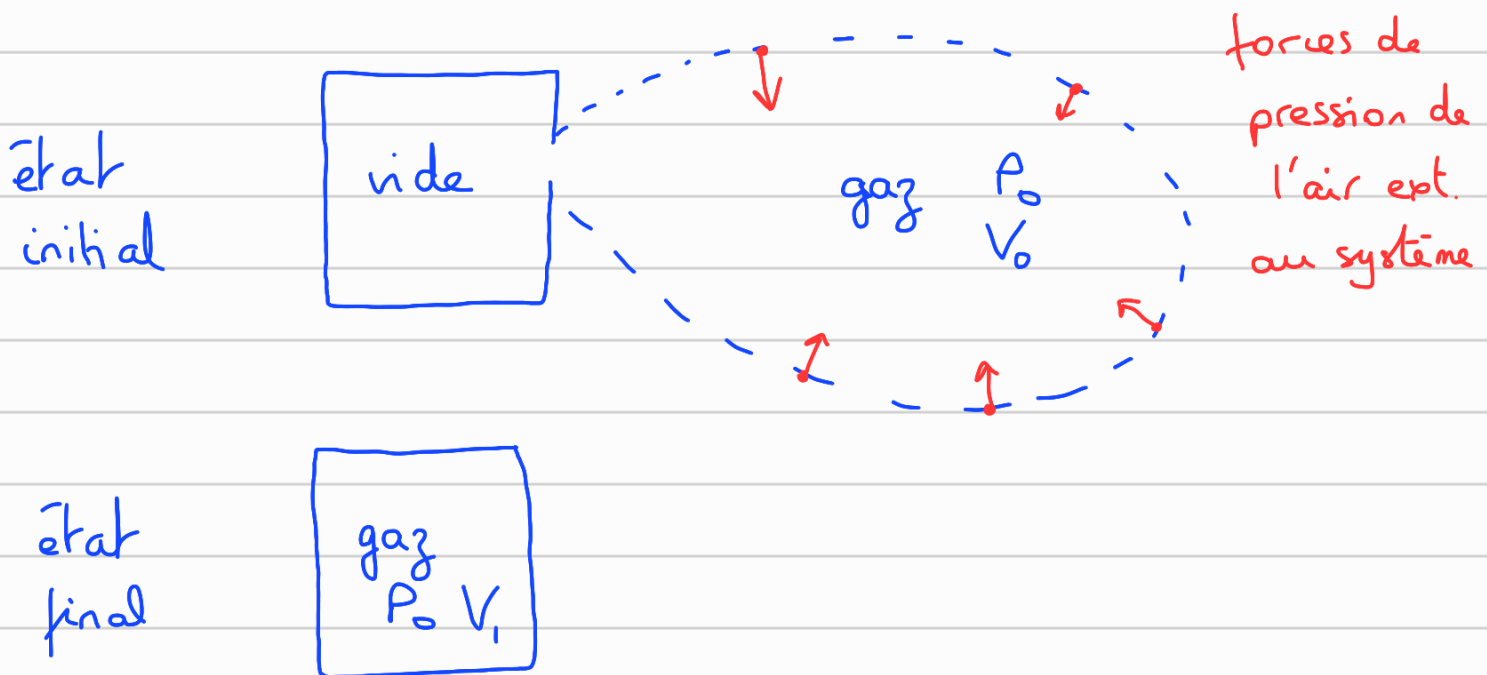
## Exercice 8 :

Les transferts thermiques sont assez longs par rapport à la durée de la transformation, on peut la considérer adiabatique.

On considère le système fermé composé du gaz qui sera contenu dans l'enceinte à la fin de la transformation.

Le 1<sup>er</sup> principe appliqué au système entre l'ouverture du petit trou et le moment où la pression dans l'enceinte est égale à la pression atmosphérique donne :

$\Delta U = W + Q = W$  car la transformation est adiabatique.



$$\delta W = -P_0 dV \Rightarrow W = -P_0 \Delta V$$

avec  $\Delta V = 0 - V_0$

On ne considère que le volume à l'extérieur de l'enceinte car c'est là que s'appliquent les forces de pression.

$$\Rightarrow \Delta U = P_0 V_0 = \frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_0)$$

or  $P_0 V_0 = nRT_0$

$$\Rightarrow nRT_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma-1}\right) = \frac{nRT_1}{\gamma-1}$$

$$\boxed{T_1 = \gamma T_0}$$