TD du chapitre 5

Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Caractéristiques du mouvement harmonique

Q1. Donner l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale des signaux suivants :

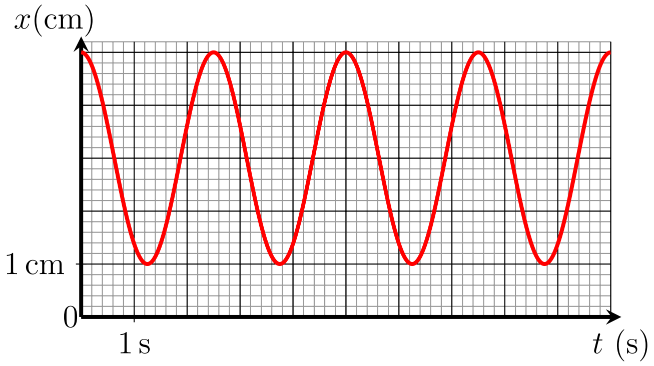
(a) $x(t) = 15\cos(100\pi\, t + 0,5)$;

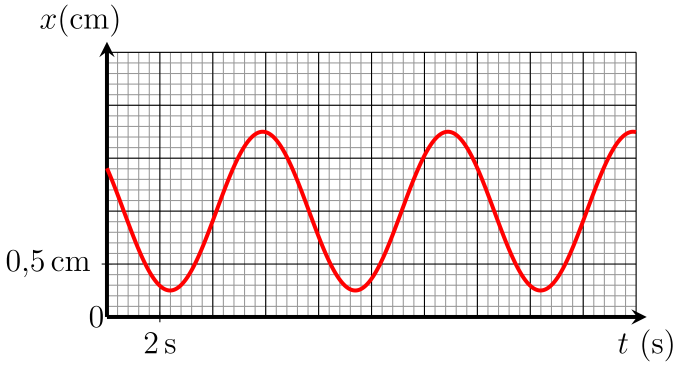
(b) $x(t) = 5\sin(7,854 \times 10^6\, t)$;

(c) $x(t) = 2\sin(120\pi\, t - \frac{\pi}{4})$;

(d) $x(t) = 15\cos(2,0\times 10^3\pi\, t) - 5\sin(2,0\times 10^3\pi\, t)$ (indication : utiliser la représentation de Fresnel).

Q2. On donne l'évolution temporelle de la position d'une masse en fonction du temps.
Déterminer l'amplitude, la période propre, la pulsation propre, la position d'équilibre et la phase à l'origine des temps dans les deux exemples ci-dessous.

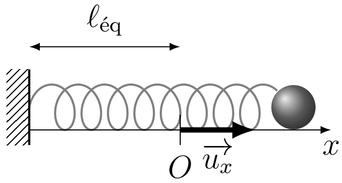




Q3. Quelle est la phase initiale d'un signal sinusoïdal qui vaut la moitié de sa valeur maximale et croît à l'instant $t = \frac{T}{4}$ où T est la période ?

Exercice n°2 Étude expérimentale d'un ressort horizontal

On étudie le mouvement d'une masse m accrochée à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Il est astreint à se déplacer horizontalement. La position de la masse m est repérée par x à partir de la position d'équilibre.



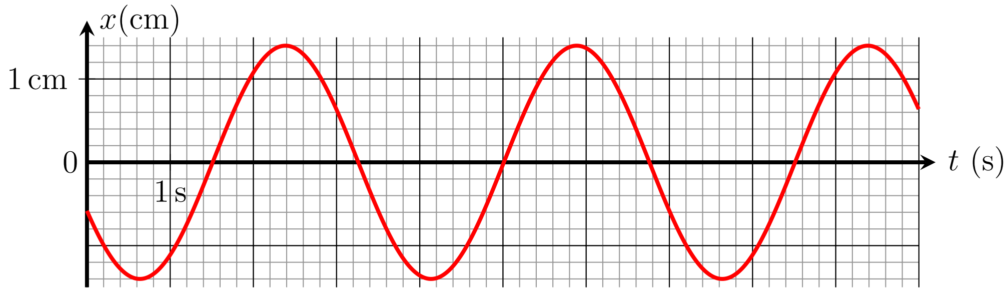
Q1. Déterminer l'expression de la longueur du ressort à l'équilibre $\ell_{éq}$.

Q2. Exprimer la force de rappel élastique en fonction de k, x et $\overrightarrow{u_x}$.

Q3. Établir l'équation différentielle vérifiée par x. Est-ce l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique ? Identifier l'expression de la pulsation propre ω_0.

Q4. Donner la solution de l'équation différentielle précédente sous la forme d'un cosinus.

On a mesuré x en fonction du temps, et on obtient le graphique ci-dessous.



Q5. Déterminer les caractéristiques de l'oscillation : amplitude, pulsation propre, phase à l'origine.

Q6. L'objet au bout du ressort possède une masse $m = 50\,\mathrm{g}$.
En déduire la valeur de la constante de raideur k du ressort.

Exercice n°3 Oscillations d'un circuit LC

Un condensateur de capacité $C = 10\,\mathrm{\mu F}$ est initialement chargé sous une tension $U_0 = 6\,\mathrm{V}$. On le connecte à l'instant $t = 0$ à une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 25\,\mathrm{mH}$.

Q1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur.

Q2. Déterminer $u(t)$. Exprimer la fréquence et l'amplitude des oscillations.

Q3. Déterminer $i(t)$. Quelle est alors l'amplitude de l'intensité ?

Q4. Exprimer l'énergie du condensateur et celle de la bobine au cours du temps. Vérifier que l'énergie totale reste constante.

Exercices ★

Exercice n°4 Étude énergétique d'un oscillateur harmonique

Un ressort horizontal, modélisé par un oscillateur harmonique horizontal, a une fréquence angulaire ω et une amplitude A. Il est lâché sans vitesse initiale.

Q1. Quelle est la valeur absolue du déplacement et de la vitesse quand l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle élastique ?

Q2. Combien de fois cela se produit-il par cycle ? Quelle est la durée entre deux réalisations ?

Q3. Quelle fraction de l'énergie totale est sous forme d'énergie cinétique lorsque le déplacement vaut $\dfrac{A}{2}$?

Exercice n°5 Ressort vertical

On considère un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, fixé au plafond par son extrémité supérieure. Un panier, modélisé par un point matériel de masse m, est accroché à son extrémité inférieure.
L'axe (Oz) est choisi vertical descendant et son origine est située à la position d'équilibre de la masse.

Q1. Réaliser un schéma clair, complet et propre de la situation.

Q2. Déterminer l'expression de la longueur du ressort à l'équilibre $\ell_{éq}$ en fonction de k, m, ℓ_0 et g. Comparer $\ell_{éq}$ et ℓ_0.

Q3. Exprimer la force de rappel élastique en fonction de k, z, ℓ_{eq}, ℓ_0 et $\overrightarrow{u_z}$.

Q4. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par z et la mettre sous la forme $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$. Identifier la pulsation propre ω_0.

Q5. Résoudre l'équation du mouvement avec les conditions initiales suivantes : $z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = v_0 \neq 0$ et tracer $z(t)$.

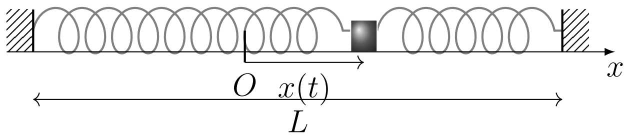
Q6. Établir l'expression de l'énergie cinétique pour le jeu de conditions initiales précédent.

Q7. Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur, puis de l'énergie potentille élastique. Écrire l'énergie potentielle de M pour le jeu de conditions initiales précédent.

Q8. Écrire l'énergie mécanique pour ces conditions initiales. Conclure.

Exercice n°6 Deux ressorts

Un point matériel M, de masse m, peut se déplacer sur une tige horizontale parallèle à l'axe Ox.
Il est relié à deux ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. La distance entre les deux points d'attache est L.
Quand M est à l'équilibre, il se situe à l'origine O.



Q1. Déterminer les longueurs des ressorts à l'équilibre.

Q2. Établir l'équation différentielle vérifiée par x et la mettre sous la forme canonique

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Q3. La résoudre avec $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$. Représenter l'allure de $x(t)$ et de $\dot{x}(t)$.

Exercices ⋆ ⋆

Exercice n°7 Vibration d'une molécule HCl

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est mesurée par spectroscopie comme valant $f = 8{,}5 \times 10^{13}$ Hz. On aborde dans cet exercice un premier modèle simple de la molécule, décrite comme un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe. L'interaction entre les deux atomes est modélisée par un pseudo-ressort de raideur k.
Données :

- masses molaires $M(\mathrm{H}) = 1{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et $M(\mathrm{Cl}) = 35{,}5\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$
- constante d'Avogadro $N_A = 6{,}0 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$

Q1. Pourquoi est-il raisonnable de supposer l'atome de chlore fixe ?

Q2. Donner l'expression puis calculer la valeur de la constante de raideur k.

Q3. On admet que l'énergie de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ est la constante de Planck. Calculer la vitesse maximale de l'atome d'hydrogène.

Q4. Calculer l'amplitude de son mouvement. Comparer le résultat à la longueur tabulée de la liaison H-Cl : $d_{\text{H-Cl}} = 127\,\mathrm{pm}$.

Exercice n°8 Oscillations d'une voiture

Une voiture, de masse $m = 850\,\mathrm{kg}$ est schématisée par une carrosserie de masse $m_1 = 700\,\mathrm{kg}$ reposant par l'intermédiaire de 4 ressorts de raideur $k = 6500\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ sur 4 roues, chacune de masse $m_2 = 37{,}5\,\mathrm{kg}$

Q1. Déterminer la hauteur dont il faut soulever la carrosserie pour que les roues décollent du sol.

Q2. Au moment où elle allait décoller du sol, on relâche la voiture. Déterminer la période des oscillations verticales de la carrosserie.

Exercice n°9 Oscillations d'un cube dans l'eau

Un cube de côté a, de masse volumique ρ_c , flotte en équilibre dans un liquide de masse volumique ρ_ℓ avec $\rho_\ell > \rho_c$. Les conditions sont telles que le cube ne bascule pas, gardant toujours sa face inférieure horizontale. On ne prend pas en compte la pression de l'air, ni les frottements visqueux avec le fluide. On choisit un repère dont l'origine se situe au niveau de la base du cube lorsqu'il est à l'équilibre dans le fluide. A l'instant $t = 0$ on enfonce le cube dans le fluide (hauteur de cube immergée h_0) et on le lâche sans vitesse initiale.

Q1. Établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas où $h_0 < a$.
Donnée : la poussée d'Archimède est une force verticale, dirigée vers le haut, de norme égale au poids du volume de fluide déplacé.

Q2. En déduire l'équation du mouvement du cube en fonction du temps. Préciser la période des oscillations.

Q3. Quelle doit être la valeur de h_0 pour que le cube puisse bondir hors du liquide ? Quelle condition doivent respecter les masses volumiques du fluide et du cube pour que cela soit possible ?