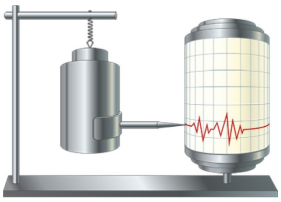
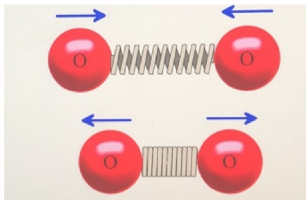
Chapitre 5 : Étude de l'oscillateur harmonique

De nombreux problèmes de physique, mais également de chimie ou de biologie peuvent être décrits par l'utilisation d'un modèle physique, c'est à dire un ensemble d'hypothèses et de lois « mathématiques » permettant de décrire simplement un problème réel. Ce chapitre s'intéresse à un modèles très utilisé en physique : l'oscillateur harmonique, utilisé pour étudier les systèmes qui ont un mouvement d'oscillations :



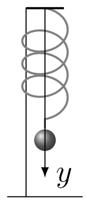




Expérience de cours

On accroche une masse à un ressort fixé à une potence. On écarte la masse de sa position d'équilibre, puis on la lâche. On étire le ressort.

1. Que se passe-t-il ?
2. Représenter la position y de la masse en fonction du temps.
3. Quelle fonction mathématique permettrait de modéliser cette évolution ?



Plan du cours

À savoir	
Connaître l'expression de la force de rappel élastique.	I.1
Connaître les définitions de : pulsation, fréquence, période propre d'oscillations, amplitude, phase.	II
Connaître les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle de pesanteur, de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie mécanique.	III

À savoir faire	
Schématiser et exprimer la force de rappel élastique sur un système.	Ⓐ **TD2,5,6,8**
Déterminer les caractéristiques du mouvement d'un oscillateur à partir de l'évolution temporelle d'une grandeur caractéristique du système.	II **TD1,7**
Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement d'un système masse-ressort sans frottement.	Ⓑ **TD2,4-6**
Exploiter l'analogie du système masse-ressort sans frottement et l'oscillateur harmonique électrique.	IV **TD3**
Établir le bilan énergétique d'un oscillateur non amorti.	II **TD3,4,5**

I Comment établir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique ?

I.1 Position du problème

Dans ce chapitre, nous allons étudier le système oscillant le plus simple : le système {masse-ressort}. Il est constitué d'une masse m, dont on étudie le mouvement, accrochée à un ressort de masse supposée négligeable. La masse est astreinte à se déplacer horizontalement sur un support sur lequel les frottements peuvent être négligés.

Définitions

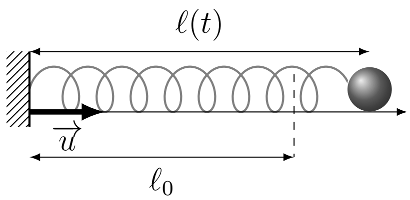
Ressort : dispositif mécanique pouvant se déformer, c'est-à-dire s'allonger et se raccourcir.

Longueur à vide : on la note ℓ_0, c'est la longueur prise par le ressort non contraint, lorsqu'il est posé sur une table horizontale.

Longueur instantanée : on la note $\ell(t)$, c'est la longueur du ressort hors de la position de repos (différente de sa longueur à vide).

Formule

Force de rappel élastique :
La force de rappel élastique exercée par un ressort de longueur à vide ℓ_0, de constante de raideur k et de longueur instantanée $\ell(t)$ s'écrit :



$$\overrightarrow{F_{\text{él}}} = -k\Big(\ell(t) - \ell_0\Big)\overrightarrow{u}$$

avec $\overrightarrow{u}$ = **vecteur unitaire dirigé dans le sens d'allongement du ressort**, c'est-à-dire que $\overrightarrow{u}$ **est dirigé du point d'attache du ressort vers la masse** m.

Méthode

Pour poser un problème de mécanique avec un ressort :

❶ Définir le système étudié (c'est-à-dire l'objet dont on étudie le mouvement).

❷ Définir le référentiel d'étude (c'est-à-dire l'objet de référence par rapport auquel on va étudier le mouvement du système)

❸ Faire un schéma sur lequel apparaissent :

- le ressort, avec le symbole : 
- l'axe orienté qui va du point d'attache vers la masse m
- le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ imposé par le sens de l'axe
- l'origine de l'axe
- la longueur ℓ du ressort (représentée par une double flèche avec « ℓ » dessus)

❹ Faire un bilan des actions mécaniques s'exerçant sur le système étudié, et représenter les forces correspondantes sur le schéma.

❺ Écrire la force de façon générale $\overrightarrow{F_{\text{él}}} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u}$.

❻ En s'aidant du dessin, relier la longueur du ressort ℓ à la position de la masse sur l'axe, notée x si l'axe s'appelle (Ox).

❼ Vérifier la validité physique de la formule.

Démonstration

Appliquer la méthode ci-dessus pour étudier le mouvement du système constitué d'une masse m accrochée à un ressort de masse supposée négligeable astreint à se déplacer horizontalement sur un support sur lequel les frottements peuvent être négligés.

I.2 Étude des positions d'équilibre

Définition et propriété

Position d'équilibre : c'est une position telle que si on y pose le système sans vitesse initiale alors il y reste. On la note $x_{\text{éq}}$.

En une position d'équilibre, la somme des forces s'exerçant sur un système est nulle : $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}$

La réciproque est fausse → principe d'inertie.

Méthode

Pour déterminer la/les position(s) d'équilibre d'un système :

❶ Écrire qu'à l'équilibre : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}$.
❷ Isoler la longueur du ressort à l'équilibre $\ell_{\text{éq}}$ et l'exprimer en fonction de ℓ_0, m, g et k.
❸ Vérifier la cohérence physique :

- vérifier l'homogénéité de la formule (penser au fait que $[k\ell_{\text{éq}}] = [mg]$;
- comparer $\ell_{\text{éq}}$ à ℓ_0, en lien avec l'effet de la masse.

Démonstration

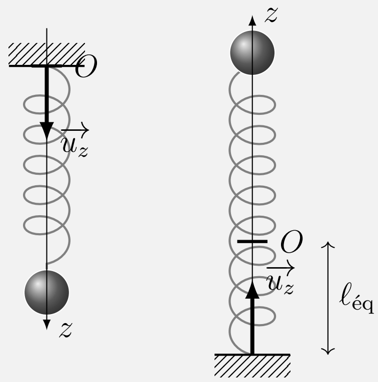
Appliquer la méthode ci-dessus pour démontrer que pour le ressort horizontal étudié au I.1, la longueur du ressort à l'équilibre est égale à sa longueur à vide.

Exercice de cours (A)

Une masse m est attachée à l'extrémité d'un ressort **vertical** de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k.

Q1. Déterminer dans les deux cas ci-dessous l'expression de la longueur du ressort à l'équilibre. Comparer à la longueur à vide.

Q2. Déterminer l'expression de la force de rappel élastique en faisant intervenir la position z.



I.3 Équation différentielle de l'oscillateur harmonique

Méthode

Pour établir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

❶ Énoncer le Principe Fondamental de la Dynamique (2ème loi de Newton) en référentiel galiléen.

❷ L'appliquer au système étudié.

❸ Projeter l'équation précédente selon l'axe sur lequel se fait le mouvement. On obtient une équation qui relie la position x (si la direction du mouvement est notée (Ox)) et sa dérivée seconde $\ddot{x}$: c'est une équation différentielle d'ordre 2.

❹ Mettre l'équation différentielle sous forme canonique, c'est à dire avec un cœfficient 1 devant le terme de la dérivée d'ordre 2 (voir formule ci-dessous).

❺ Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction des caractéristiques de l'oscillateur k et m.

Formule

Forme canonique de l'équation différentielle pour un oscillateur non amorti :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$$

avec : ω_0 = pulsation propre en rad·s^{-1}

$x_{\text{éq}} = \lim\limits_{t \to +\infty} x$

Démonstration

Appliquer la méthode précédente pour établir l'équation différentielle régissant le mouvement de la masse accrochée à un ressort horizontal (situation du I.1).

Exercice de cours (B)

Établir l'équation différentielle régissant le mouvement d'une masse m accrochée à un ressort vertical de constante de raideur k (situation de gauche de l'exercice (A)).

II Comment résoudre l'équation différentielle de l'OH ?

II.1 Expression de la solution

Formule

Un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 oscillant autour de la position $x_{\text{éq}}$ régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$$

a pour solution générale :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}} \qquad \text{avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes réelles}$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme :

$$x(t) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{\text{éq}} \qquad \text{avec } A \text{ une constante réelle et } \varphi \in [-\pi, \pi]$$

Signification des termes :

- **Amplitude X_m :** c'est la valeur maximale du déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre, c'est-à-dire la valeur maximale de $|x - x_{\text{éq}}|$
- **Phase à l'origine φ :** c'est la valeur de la phase à l'origine des temps (pour $t = 0$), elle donne la valeur initiale du signal : $x(0) = X_m\cos(\varphi) + x_{\text{éq}}$
- **Pulsation propre ω_0 :** $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, avec k = constante de raideur du ressort en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, et m = masse de l'objet en kg.
  La pulsation propre ω_0 est reliée à la fréquence f par la relation $\omega_0 = 2\pi \times f$, où f représente le nombre d'oscillations par unité de temps (rappel : $f = \dfrac{1}{T}$ où T est la période = durée d'une oscillation).
- **$x_{\text{éq}}$:** position d'équilibre de la masse.
- **Couples de valeurs (X_m, φ) et (A, B) :** ce sont les constantes d'intégration, leurs valeurs dépendent de 2 conditions initiales : la position initiale $x(t = 0)$ et la vitesse initiale $\dot{x}(t = 0)$.

II.2 Méthode de résolution

Méthode

Méthode pour résoudre l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$:

❶ Écrire la solution générale : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}$

❷ Déterminer les deux constantes d'intégration à l'aide des deux conditions initiales : la position initiale $x(t = 0)$ et la vitesse initiale $\dot{x}(t = 0)$. Pour cela il faut :

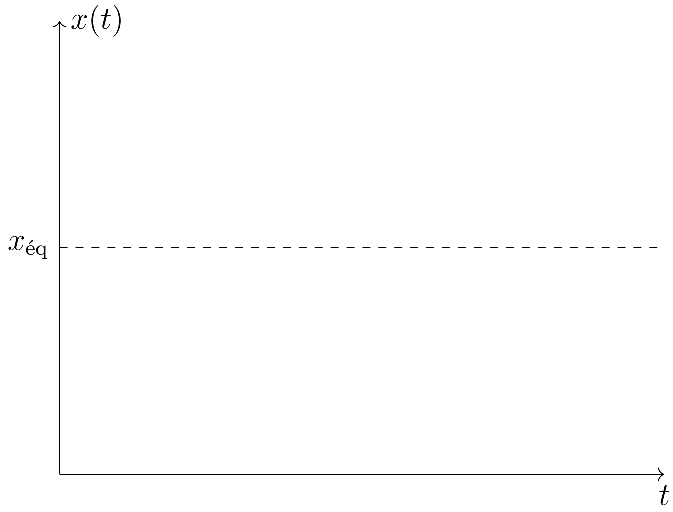
1. Exprimer la position initiale : $x(t = 0) = A + x_{\text{éq}}$ et égaliser avec la valeur de $x(t = 0)$ fournie par l'énoncé. On en déduit la valeur de A.
2. Dériver x par rapport au temps : $\dot{x}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$
3. Exprimer la vitesse initiale : $\dot{x}(t = 0) = B\omega_0$ et égaliser avec la valeur de $\dot{x}(t = 0)$ fournie par l'énoncé. On en déduit la valeur de B.

Remarques

- C'est une équation différentielle d'ordre 2 **donc** 2 constantes à déterminer **donc** 2 conditions initiales à établir.
- Les calculs sont souvent plus simples avec la forme en $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{\text{éq}}$ du fait de $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$.
- On peut passer d'une forme de la solution à l'autre avec la formule trigonométrique : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- On peut utiliser l'autre expression de la solution : $x(t) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{\text{éq}}$ pour déterminer les constantes, en suivant la même méthode.

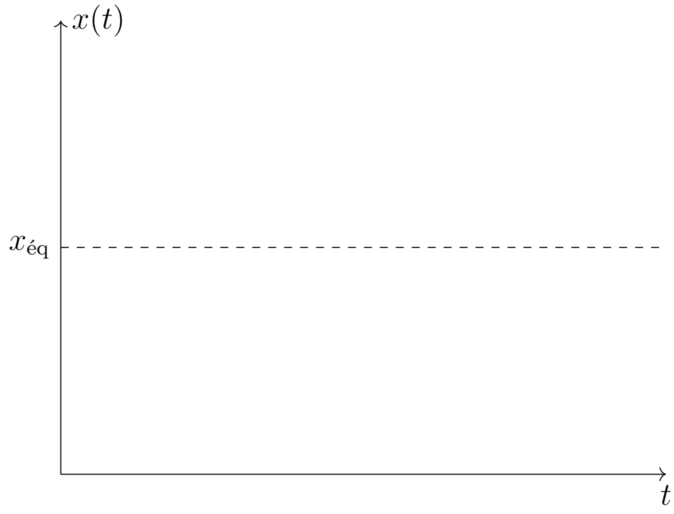
Application directe

Résoudre l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$ en tenant compte des conditions initiales suivantes et représenter l'allure de $x(t)$: $x(0) = x_{\text{éq}} + a$ et $\dot{x}(0) = 0$



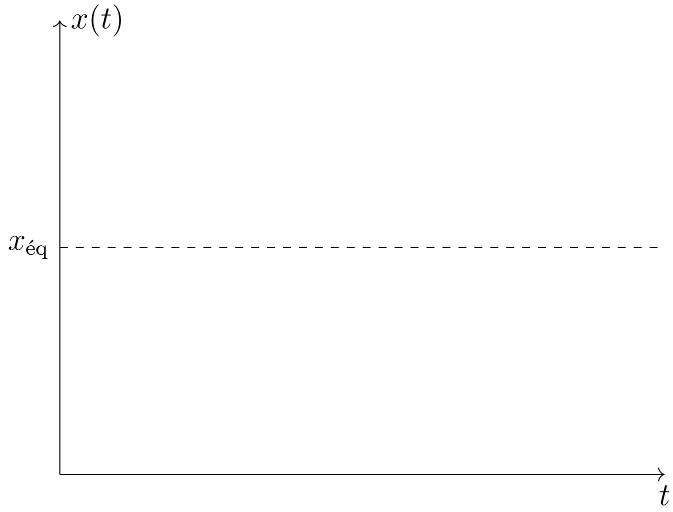
Application directe

Même question pour $x(0) = x_{\text{éq}}$ et $\dot{x}(0) = v_0$



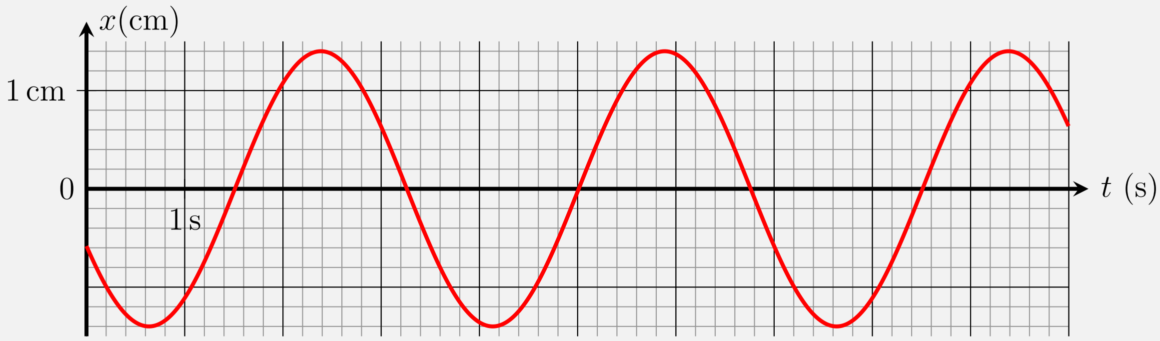
Application directe

Même question pour $x(0) = x_{\text{éq}} + a$ et $\dot{x}(0) = v_0$



Application directe

On a mesuré x en fonction du temps pour une masse m accrochée à l'extrémité d'un ressort horizontal, qui se déplace sans frottements. On obtient le graphique ci-dessous :



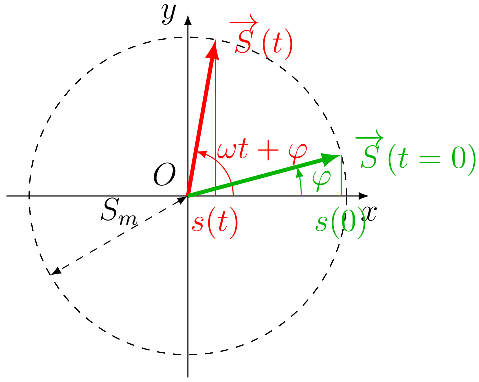
1. Donner la solution de l'équation différentielle qui régit ce mouvement sous la forme d'un cosinus.
2. Déterminer les caractéristiques de l'oscillation : amplitude, pulsation propre, phase à l'origine.

II.3 Introduction à la représentation de Fresnel

☆ Représentation de Fresnel

La **représentation de Fresnel** est la représentation graphique de signaux dépendant du temps de façon sinusoïdale → animation ici

À tout signal sinusoïdal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe un vecteur $\overrightarrow{S}$ dans le plan cartésien (Oxy) :



- de norme $\left\|\overrightarrow{S}\right\|$ égale à l'amplitude du signal sinusoïdal S_m :

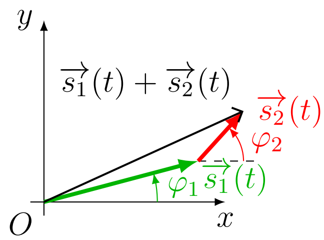
$$\left\|\overrightarrow{S}\right\| = S_m$$

- et faisant un angle de $\omega t + \varphi$ avec l'axe (Ox) :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{S}\right)} = \omega t + \varphi$$

Le vecteur $\overrightarrow{S}$ tourne dans le plan (Oxy), autour de l'axe (Oz), à la vitesse angulaire ω, il fait un tour en $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Utilisation pour sommer des signaux sinusoïdaux :



En notant $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s_1} + \overrightarrow{s_2}$, on a : $s^2 = s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

III Aspects énergétiques

☆ Formules

— **Énergie cinétique E_c d'un point matériel de masse m, ayant la vitesse v :**

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \text{avec : } v^2 = \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2$$

— **Énergie potentielle de pesanteur E_{pp} d'un point matériel de masse m, repéré par son altitude z :**

$$E_{\text{pp}} = \pm mgz + K \qquad \text{avec } K \text{ une constante}$$

avec « + » si (Oz) est ascendant ; « − » si (Oz) est descendant

— **Énergie potentielle élastique d'un point matériel accrochée à un ressort :**

$$E_{\text{p,él}} = \frac{1}{2} k \left(\ell - \ell_0\right)^2 + K' \qquad \text{avec } K' \text{ une constante}$$

Plus la longueur ℓ du ressort est différente de la longueur à vide ℓ_0, plus l'énergie emmagasinée par le système est importante.

— **Énergie mécanique E_m :** c'est la somme de ses énergies cinétique E_c et potentielles E_p :

$$E_m = E_c + E_p$$

Toutes les énergies s'expriment en Joule (J), avec $1\,\text{J} = 1\,\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$.

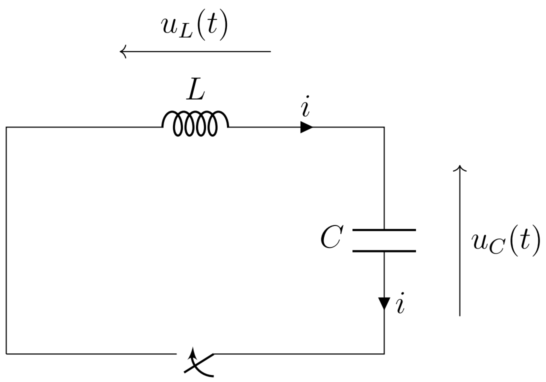
Démonstration

Que peut-on dire de l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique ?

IV Analogie avec le circuit LC en électricité

IV.1 Circuit étudié et mise en équation

On étudie le circuit composé d'une inductance L en série avec un condensateur de capacité C, initialement chargé (à $t < 0$ la tension à ses bornes vaut U_0).
À $t = 0$ on ferme l'interrupteur.
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur, et le générateur débite alors dans l'ensemble RC série.



Démonstration

Établir l'équation qui régit l'évolution de $u_C(t)$ dans le circuit en suivant les étapes suivantes :

1. Écrire la loi des mailles et les relation intensité-tension des dipôles.
2. Combiner ces relations pour établir l'équation différentielle d'ordre 2 en u_C.
3. Mettre l'équation différentielle obtenue sous la forme $\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$, en donnant l'expression de ω_0.

IV.2 Conditions initiales

La résolution de l'équation différentielle obtenue nécessite la connaissance de deux conditions initiales pour déterminer les constantes d'intégration.

Méthode

Pour déterminer les conditions initiales :

1. Déterminer les valeurs de l'intensité i et de la tension $u_C(t)$ juste AVANT la fermeture de l'interrupteur ($t < 0$).
2. Pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$), utiliser :
   — la continuité de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur
   — la continuité de l'intensité $i(t)$ du courant qui traverse la bobine
3. Utiliser la relation courant-tension du condensateur pour déterminer la condition initiale sur $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

Application directe

Déterminer les conditions initiales sur u_C et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ pour le circuit représenté au IV.1.

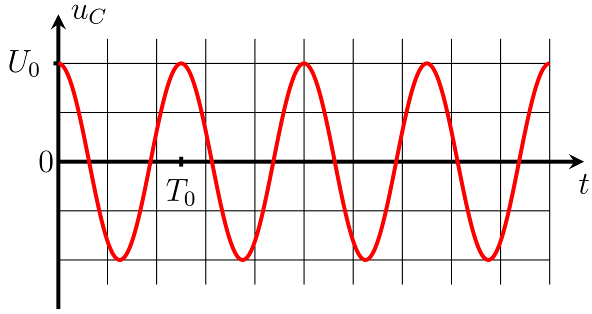
IV.3 Résolution de l'équation différentielle

La méthode donnée au II permet de déterminer la solution de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 s(t) = 0$ avec les conditions initiales définies pour le circuit LC.

Formule

La solution générale de l'équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$ avec les conditions initiales $u_C(0) = U_0$ et i_0=0 est :

$$u_C(t) = U_0 \cos(\omega_0 t) \qquad \text{avec } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$



Démonstration

Retrouver l'expression de $u_C(t)$ pour le circuit LC série à partir de la méthode donnée au II.2.

IV.4 Bilans de puissance et d'énergie

Méthode

Bilans de puissance et d'énergie pour le circuit LC série

1. Écrire la loi des mailles, en la mettant sous la forme $E = ...$
2. Multiplier l'équation obtenue par l'intensité i du courant dans le circuit.
3. Identifier et interpréter chaque terme de la relation obtenue : puissance reçue par le condensateur et puissance reçue par la bobine (les 2 dipôles étant représentés en convention récepteur).
4. Vérifier qu'il y a conservation de la puissance, donc de l'énergie.
5. Intégrer par rapport au temps pour obtenir un bilan énergétique, dans lequel apparaissent les énergies stockées dans le condensateur et la bobine.
6. Déterminer la valeur de l'énergie totale (constante) en utilisant les conditions initiales.

Démonstration

Effectuer le bilan de puissance et d'énergie pour le circuit LC.

Propriété

L'énergie d'un système électrique, dépourvu de résistance, donc sans effet Joule, se conserve au cours du temps.