TD du chapitre 5

Exercice 1 :

$$x(t) = \underbrace{X_m}_{\text{amplitude}} \cos(\underbrace{\omega}_{\text{pulsation}} t + \underbrace{\varphi}_{\text{phase à l'origine}}) + \underbrace{x_{eq}}_{\text{position d'éq.} = \text{valeur moyenne}}$$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Q1. $X_m = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2\,cm$

$x_{eq} = \dfrac{x_{max} + x_{min}}{2} = \dfrac{5+1}{2} = 3\,cm$

$4T = 10{,}0\,s \Rightarrow T = 2{,}50\,s \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2{,}5\ rad.s^{-1}$

$\varphi = 0$ car $x(0) = x_{max}$

$$\boxed{x(t) = 2\cos(2{,}5t)}$$

Q2. $X_m = 0{,}75\,cm$ $\left(= \dfrac{x_{max} - x_{min}}{2} = \dfrac{1{,}75 - 0{,}25}{2} \right)$

$x_{eq} = 1\,cm$

$2T = 7 \times 2 = 14\,s \Rightarrow T = 7\,s \Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{7} = 0{,}90\ rad.s^{-1}$

à $t = 0$ $x(0) = 1{,}4\,cm$

$x(0) = X_m . \cos(0 + \varphi) + x_{eq} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{x(0) - x_{eq}}{X_m}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1{,}4 - 1}{0{,}75} = 0{,}53$

donc $\varphi = \pm 1{,}0\ rad$.

or à $t = 0$ x diminue donc $\dot{x}(0) < 0$

or $\dot{x}(t) = -X_m\omega . \sin(\omega t + \varphi)$

soit à $t = 0$ $\dot{x}(0) = -X_m \omega . \sin\varphi$ donc $-X_m\omega \sin\varphi < 0$

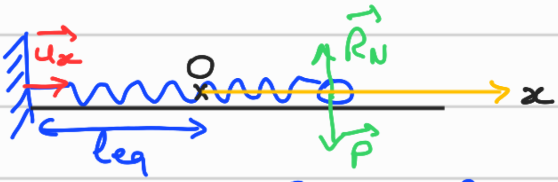
d'où $\sin\varphi > 0$ $\Rightarrow \varphi = +1\ rad$.

$$\boxed{x(t) = 0{,}75 . \cos(0{,}90t + 1)}$$

Méthode : pour $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

- si $\dot{x}(0) > 0$ (x est croissant, m se déplace selon $+x$)
  $\Rightarrow \varphi < 0$
- si $\dot{x}(0) < 0$ (x est décroissant, m se déplace selon $-x$)
  $\Rightarrow \varphi > 0$

Exercice 2 :



Q1. * On étudie le système {masse} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

* Bilan des actions mécaniques :
  - poids : $\vec{P}$ vertical vers le bas de norme $P = mg$
  - réaction normale : $\vec{R_N}$ verticale vers le haut, de norme égale à mg.
  - force de rappel élastique : $\vec{F_{el}}$ horizontale, de sens et norme dépendant de la position de la masse : $\vec{F_{el}} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u_x}$ avec $\vec{u_x}$ vect. unitaire dans le sens de l'allongement du ressort.

A l'équilibre, d'après le principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F_{el}} = \vec{0}$.

En projetant sur (Ox) on a $-k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u_x} \cdot \vec{u_x} = 0$
soit $-k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$
$\Rightarrow \ell_{eq} = \ell_0$.

Q2. D'après le schéma : $\ell(t) = \ell_{eq} + x(t)$
donc $\vec{F_{el}} = -k(\ell_{eq} + x(t) - \ell_0)\vec{u_x}$
$= -k(\ell_0 + x(t) - \ell_0)\vec{u_x} = -kx(t)\vec{u_x}$

$$\boxed{\vec{F_{el}} = -kx(t)\vec{u_x}}$$

Q3. On applique le principe fondamental de la dynamique au système {masse} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F_{el}} = m\vec{a}$

En projetant sur (Ox) on a : $-kx(t) = m\ddot{x}(t)$

On met sous forme canonique : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique :
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. avec ω_0 = pulsation propre $= \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Q4. $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Q5. Amplitude : $A = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = \frac{1{,}4-(-1{,}4)}{2} = 1{,}4$ cm

$2T = 7s \Rightarrow T = 3{,}5s \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{3{,}5} = 1{,}8 \text{ rad.s}^{-1}$

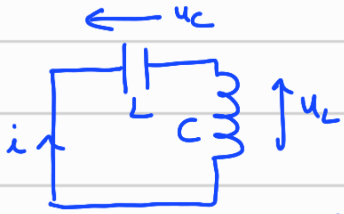
A $t=0$ $x(0) = -0{,}6$ cm et x est décroissante.
$-0{,}6 = 1{,}4\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = -0{,}43$
$\varphi = \pm 2{,}0$ rad.
or $\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$ d'où $\dot{x}(0) = -A\omega\sin\varphi$
$\dot{x} < 0$ donc $\sin\varphi > 0 \Rightarrow \varphi = +2{,}0$ rad.

$$\boxed{x(t) = 1{,}4\cos(1{,}8t + 2{,}0)}$$

Q6 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow \boxed{m\omega_0^2 = k}$.

AN : $k = 0{,}050 \times 1{,}8^2 = \underline{0{,}162 \text{ N.m}^{-1}}$

Exercice 3 :



Q1. $u_C + u_L = 0$ d'après la loi des mailles :

$$u_C + L\frac{di}{dt} = 0$$

or $i = C\frac{du_C}{dt}$ d'après la loi intensité-tension du condensateur :

$$u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0}$$

Q2. $u_C(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

On détermine les constantes A et B avec les conditions initiales :

* à $t = 0^+$ $u_C = U_0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur
donc $U_0 = A$
* à $t = 0^+$ $\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i(0^+) = 0$ par continuité de l'intensité traversant la bobine :
donc $0 = B\omega_0 \Rightarrow B = 0$

on a donc $\boxed{u_C(t) = U_0\cos(\omega_0 t)}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

* fréquence des oscillations : $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

AN : $f = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{25.10^{-3} \cdot 10.10^{-6}}} = 318,3\ Hz = \underline{3,2.10^2\ Hz}$ avec 2 c.s.

* amplitude des oscillations : $\underline{U_m = U_0 = 6\ V}$

Q3. $i(t) = C\dfrac{du_C}{dt} = -CU_0\,\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

Amplitude : $I_m = CU_0\omega_0$

AN : $I_m = 10.10^{-6} . 6 . 3{,}2.10^{2} = 0{,}192\ A = \underline{192\ mA}$.

Exercice 4 :

Oscillateur harmonique horizontal : $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

or à $t=0$ $\dot{x} = 0$ $\Rightarrow$ $\varphi = 0$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t)$.

$$E_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$E_{p,el} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

$$E_c = E_{p,el} \iff \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t)$$

$$\iff \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{k}{m}\cos^2(\omega_0 t)$$

or $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ donc $E_c = E_{p,el}$ pour $\sin^2(\omega_0 t) = \cos^2(\omega_0 t)$

soit $|\sin(\omega_0 t)| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(= |\cos(\omega_0 t)|)$

soit $\boxed{|x(t)| = \dfrac{A}{\sqrt{2}}}$

Q2. $E_c = E_{p,el}$ pour $\sin(\omega_0 t) = \pm\cos(\omega_0 t)$

$\Rightarrow \omega_0 t = \dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{3\pi}{4}\ ;\ \dfrac{5\pi}{4}\ ;\ \dfrac{7\pi}{4}$

donc 4 fois par cycle

Soit $t_1 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{\pi}{4}$ et $t_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{3\pi}{4}$

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2\omega_0}$$

Entre 2 réalisations il s'écoule $\Delta t = \frac{\pi}{2\omega_0}$

Q3. Pour $x = \frac{A}{2}$ on a $\frac{A}{2} = A\cos(\omega_0 t)$

$\Rightarrow \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{4} = 1 - \sin^2\left(\frac{\omega_0}{t}\right)$

$\Rightarrow \sin(\omega_0 t) = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$E_c = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$ AN : $E_c = \frac{1}{2} m (A\omega_0)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} m A^2 \omega_0^2$

$E_{pel} = \frac{1}{2} k . A^2 \cos^2(\omega_0 t)$ AN: $E_{p,el} = \frac{1}{2} k A^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{kA^2}{8}$.

$E_{tot} = \frac{k}{2} A^2$

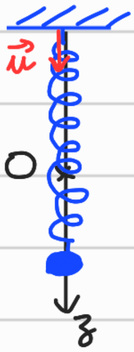
$\% E_c = \frac{3/8\, m A^2 \omega_0^2}{\frac{k}{2} A^2}$ avec $\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\% E_c = \frac{3 . 2 m A^2 k}{8 k m A^2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Pour un déplacement de $\frac{A}{2}$, 75% de l'énergie est sous forme d'énergie cinétique.

Exercice 5 :

Q1.



système {masse} ; référentiel terrestre supposé galiléen.

Q2. A l'équilibre : $\vec{F_{el}} + \vec{P} = \vec{0}$

$$-k(l_{eq}-l_0)\vec{u} + m\vec{g} = \vec{0}$$

Projection sur l'axe vertical (Oz) :

$-k(l_{eq}-l_0) + mg = 0$

$$\boxed{l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}}$$

On vérifie bien qu'à l'équilibre $l_{eq} > l_0$ (la masse étire le ressort).

Q3. D'après le schéma : $l(t) = l_{eq} + z$.

soit $\vec{F_{el}} = -k(l_{eq} + z - l_0)\vec{u}$

$$\Rightarrow \vec{F_{el}} = -k\left(l_0 + \frac{mg}{k} + z - l_0\right)\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{F_{el}} = -k\left(\frac{mg}{k} + z\right)\vec{u}}.$$

Q4 : D'après le principe fondamental de la dynamique :

$\vec{P} + \vec{F_{el}} = m\vec{a}$

On projette sur l'axe (Oz) :

$$mg - k\left(\frac{mg}{k} + z\right) = m\ddot{z}$$

$$m\ddot{z} + kz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0}$$

$\Rightarrow$ équation de l'oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre.

Q5. $z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. On détermine A et B avec les conditions initiales :

$z(0) = A = 0$.

et $\dot{z}(0) = B\omega_0 = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$.

$$\boxed{z(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

Q6. $E_c(t) = \frac{1}{2} m\dot{z}^2$ or $\dot{z}(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$$\boxed{E_c(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}$$

Q7. $E_{pp} = -mgz = -mg\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}k\left(\ell(t) - \ell_0\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(\ell_{eq} + z(t) - \ell_0\right)^2$$

or $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k} \Rightarrow E_{p,el} = \frac{1}{2}k\left(z(t) + \frac{mg}{k}\right)^2$

$$E_{p,él} = \frac{1}{2}k\left(\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \frac{mg}{k}\right)^2$$

$$\boxed{E_p = -mg\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{1}{2}k\left(\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \frac{mg}{k}\right)^2}$$

Q8. $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2(\omega_0 t) - mg\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k\left(\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \frac{mg}{k}\right)^2$$

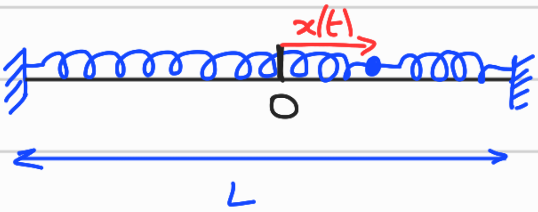
$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k\frac{v_0^2}{\omega_0^2}\sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{k v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) . \frac{mg}{k}$$

$$- \frac{mg v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{(mg)^2}{2k}}$$

l'énergie mécanique est une constante $\Rightarrow$ elle se conserve.

Exercice 6 :



Q1. On étudie le système {masse} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques :

- poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
- réaction du support $\vec{R_N}$
- force de rappel élastique 1 : $\vec{f_1} = -k(\ell_1 - \ell_0)\vec{u}$
- force de rappel élastique 2 : $\vec{f_2} = -k(\ell_2 - \ell_0)(-\vec{u})$

$$\vec{f_2} = k(\ell_2 - \ell_0)\vec{u}$$

A l'équilibre $m\vec{g} + \vec{R_N} + \vec{f_1} + \vec{f_2} = \vec{0}$

On projette suivant la direction horizontale :

$$-k(\ell_{1eq} - \ell_0) + k(\ell_{2eq} - \ell_0) = 0$$

Or $\ell_1 + \ell_2 = L \Rightarrow \ell_1 = L - \ell_2$

$$\Rightarrow -k(L - \ell_{2eq} - \ell_0) + k(\ell_{2eq} - \ell_0) = 0$$

$$-kL + 2k\ell_{2eq} = 0 \Rightarrow \boxed{\ell_{2eq} = \frac{L}{2}}$$

Q2. On applique le principe fondamental de la dynamique au système :

$$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{f_1} + \vec{f_2} = m\vec{a}$$

En projetant suivant $\vec{u_x}$ on obtient :

$$-k(\ell_1 - \ell_0) + k(\ell_2 - \ell_0) = m\ddot{x}$$

or $\ell_1(t) = \ell_{eq} + x(t)$ et $\ell_2(t) = \ell_{eq} - x(t)$

$$\Rightarrow -k(\ell_{eq} + x - \ell_0) + k(\ell_{eq} - x - \ell_0) = m\ddot{x}$$

$$-2kx = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0}$$

$\Rightarrow$ équation de l'oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

Q3. Solution générale : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$

$x_0 = A$ et $B\omega_0 = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) + v_0 \cos(\omega_0 t).$$

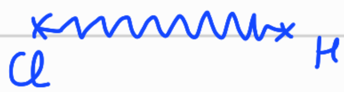
$\dot{x}$ change de signe à chaque extrémum de x.

$|\dot{x}|$ est maximale à chaque passage par la position d'équilibre.

Exercice 7 :

Q1. L'atome de chlore étant beaucoup plus lourd que l'atome d'hydrogène on peut considérer que c'est l'atome d'hydrogène qui bouge.

Q2. On utilise le modèle de l'O.H : où la liaison est représentée par un ressort.



On a $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \boxed{k = m\omega_0^2}$ avec $m = m(H) = \frac{M(H)}{\mathcal{N}_A}$ et $\omega_0 = 2\pi \times f$.

AN : $k = \frac{10^{-3}}{6{,}02.10^{23}} \times (2\pi)^2 \times (8{,}5.10^{13})^2$

$\underline{k = 4{,}7.10^2 \text{ N.m}^{-1}}$

⚠ m en kg dans l'AN.

Q3. L'énergie mécanique de l'OH étant constante, elle vaut l'énergie cinétique lorsque l'énergie potentielle élastique est nulle (l'énergie cinétique est alors maximale).

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{max}^2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2E_m}{m}} \quad \text{soit} \quad \boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{h.f}{m}}}$$

AN : $v_{max} = \sqrt{\dfrac{6{,}63.10^{-34} . 8{,}5.10^{13}}{10^{-3}/6{,}02.10^{23}}}$

$$v_{max} = 5{,}8.10^{3}\ m.s^{-1}$$

Q4. Lorsque la vitesse de l'atome H est nulle, son énergie mécanique est égale à son énergie potentielle élastique d'où $E_m = \frac{1}{2} k A^2$

$$A = \sqrt{\frac{2E_m}{k}} \quad \text{soit} \quad \boxed{A = \sqrt{\frac{h.f}{k}}}$$

AN : $A = \sqrt{\dfrac{6{,}63.10^{-34} . 8{,}5.10^{13}}{4{,}7.10^{2}}}$

$$\underline{A = 1{,}1.10^{-11}\ m} \qquad (= 110\ pm)$$

Comparaison avec la valeur tabulée de la liaison : d_{H-Cl}

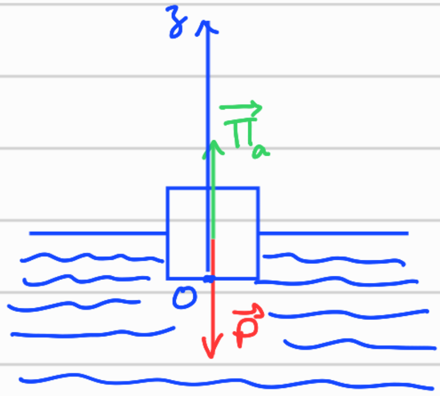
$\frac{A}{d_{H-Cl}} \times 100 = 9\%$.

L'amplitude des oscillations correspond donc à environ 9% de la longueur de la liaison.

(on a aussi $v_{max} = \omega_0 X_{max}$)

Exercice 8 :

Q1. Schéma :



On étudie le système {cube} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$
$\vec{\Pi_a} = \rho_e . h . S\,\vec{u_z}$

avec h = hauteur de cube sous le niveau de l'eau

La 2ème loi de Newton appliquée au système masse dans le référentiel terrestre donne :

$$-mg\vec{u_z} + \rho_e . h . Sg = m\ddot{z}$$

Or d'après l'énoncé, à l'équilibre

$$-mg\vec{u_z} + \rho_e . h_{eq} . Sg\,\vec{u_z} = \vec{0}$$

Soit $h_{eq} = \frac{mg}{\rho_e S . g} = \frac{m}{\rho_e . a^2}$ et $m = \rho_c a^3$

$$\Rightarrow h_{eq} = \frac{\rho_c a}{\rho_e}$$

Or $h = h_{eq} - z$ (d'après le choix du repère)

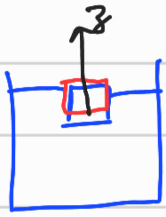
Soit $-\rho_c a^3 g\,\vec{u_z} + \rho_e (h_{eq} - z) a^2 g = \rho_c a^3 \ddot{z}$

$$\ddot{z} + \frac{\rho_l . g}{\rho_c \, a} z = -g + \frac{\rho_l . \rho_c . a . a^2}{\rho_l \cdot \rho_c a^3} g = 0 .$$

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\rho_l . g}{a \rho_c} z = 0}$$

Q2. $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{\rho_l . g}{a \rho_c}$

Solution générale : $z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$



Conditions initiales : $z(0) = h_{eq} - h_0$

$\dot{z}(0) = 0$

$h_{eq} - h_0 = A$

$-B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

$$\boxed{z(t) = (h_{eq} - h_0) \cos(\omega_0 t)}$$

Période propre des oscillations : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi a \rho_c}{\rho_l g}$

Q3. le cube bondit hors de l'eau si $z > h_{eq}$

Soit $h_{eq} < (h_{eq} - h_0) \cos(\omega_0 t)$

or $(h_{eq} - h_0) \cos(\omega_0 t)$ a pour valeur minimale $h_0 - h_{eq}$
(pour $\cos(\omega_0 t) = -1$)

D'où $h_{eq} < h_0 - h_{eq} \iff \boxed{h_0 > 2 h_{eq}}$

Or on a la condition $h_0 < a$, il faut donc

$2h_{eq} < h_0 < a$

$\Rightarrow \quad h_{eq} < \frac{a}{2} \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho_c a}{\rho_l} < \frac{a}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\rho_c < \frac{\rho_l}{2}}$$