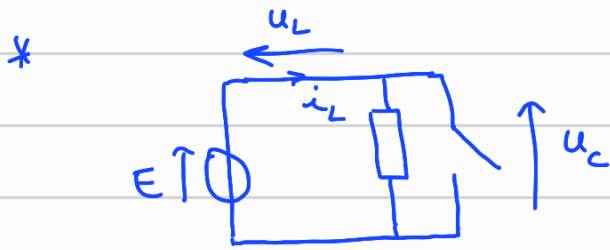


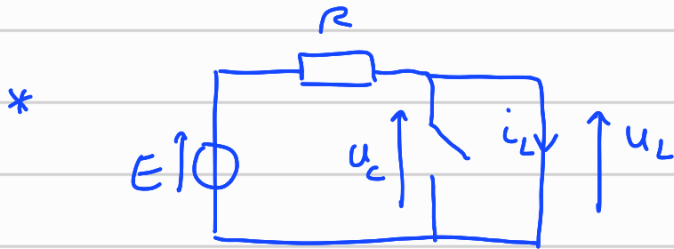
Correction du TD du chapitre 6

Exercice 1 En régime permanent :



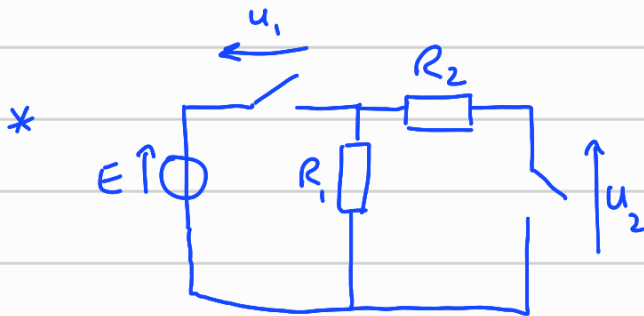
$$i_L(\infty) = \frac{E}{R}$$

$$u_C = u_R = E$$



$$i_L(\infty) = \frac{E}{R}$$

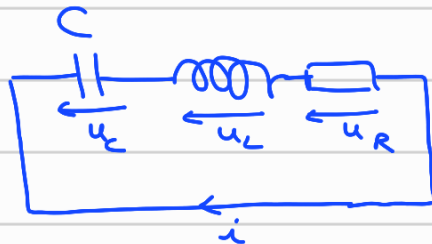
$$u_C(\infty) = 0$$



$$u_1(\infty) = E$$

$$u_2(\infty) = 0$$

Exercice 2:



Q1. $u_C + u_L + u_R = 0$

avec $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow u_L = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$

et $u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}$

$$\Rightarrow u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0$$

Q2. En régime critique $Q = \frac{1}{2}$, avec $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$

$$\text{et } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\Rightarrow R = \frac{L\omega_0}{Q} = \frac{L}{Q} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{AN : } R = \frac{1}{1/2} \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}}} = 100 \Omega$$

En régime critique le déterminant de l'équation caractéristique est nul et il y a 1 racine double $r = -\omega_0$

$$u_c(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

Conditions initiales : $u_c(0^+) = U_0$

$$\text{et } \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{0^+} = \frac{i(0^+)}{C} = 0 \text{ car le courant est}$$

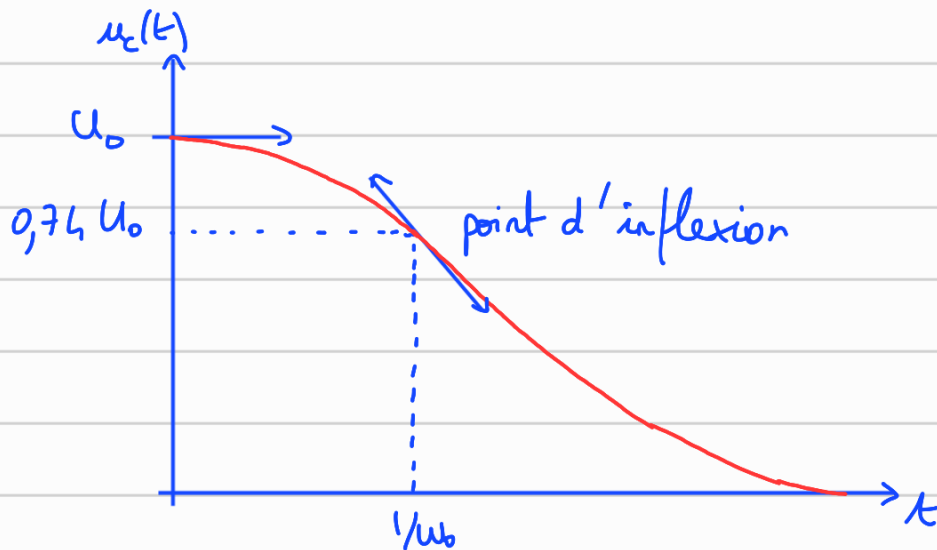
une fonction continue à cause de la bobine présente dans le circuit.

$$\text{on a donc } \begin{cases} U_0 = (A \cdot 0 + B) \cdot e^0 \\ 0 = A e^0 + (A \cdot 0 + B)(-\omega_0) e^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = U_0 \\ 0 = A - B\omega_0 \end{cases} \Rightarrow A = U_0\omega_0.$$

$$u_c(t) = (U_0\omega_0 \cdot t + U_0) e^{-\omega_0 t}$$

L'allure de la courbe est :



pour $t = \frac{1}{\omega_0}$ $u_c(t) = 2U_0 e^{-1} = 0,74 U_0$

$$\frac{du_c}{dt} = (U_0\omega_0) e^{-\omega_0 t} - (U_0\omega_0 t + U_0)\omega_0 e^{-\omega_0 t} = -U_0\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = -U_0\omega_0 (e^{-\omega_0 t} - t\omega_0 e^{-\omega_0 t}) = U_0\omega_0 e^{-\omega_0 t} (t\omega_0 - 1)$$

à $t = \frac{1}{\omega_0} : \left. \frac{d^2 u_c}{dt^2} \right|_{t=1/\omega_0} = U_0\omega_0 e^{-1} (1-1) = 0 \Rightarrow \text{point d'inflexion}$
à $t = 1/\omega_0$

$$Q3. \quad i(t) = C \frac{du_c}{dt} = -C u_0 \omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$$

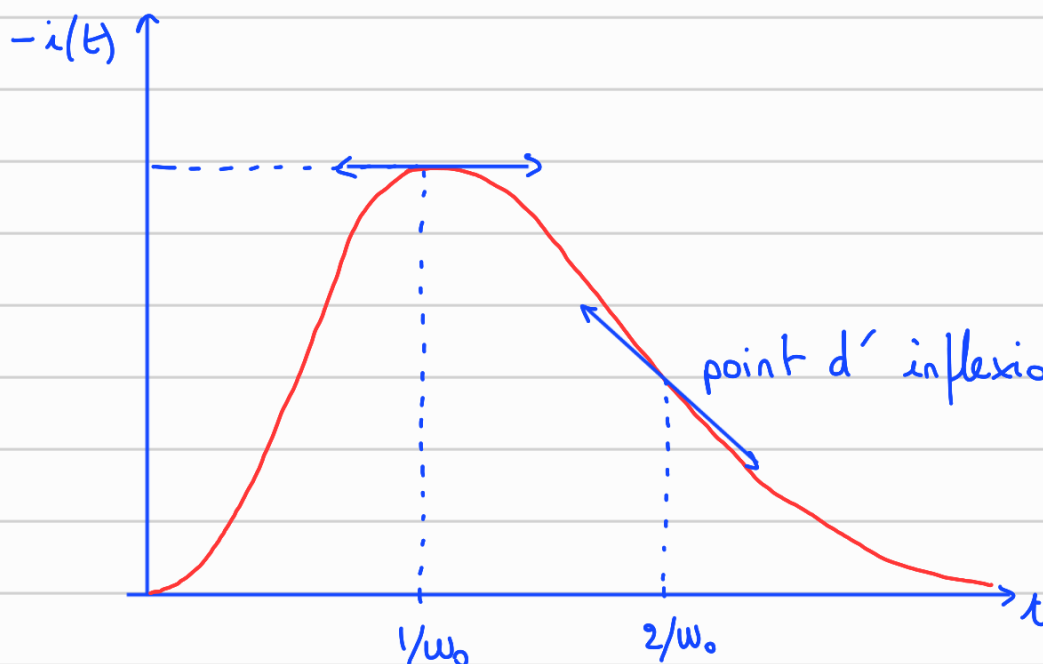
$$\text{or } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow i(t) = -\frac{u_0}{L} t e^{-\omega_0 t}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{u_0}{L} (e^{-\omega_0 t} - t \omega_0 e^{-\omega_0 t}) = \frac{u_0}{L} e^{-\omega_0 t} (t \omega_0 - 1)$$

$$\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow t = 1/\omega_0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\omega_0 \frac{u_0}{L} e^{-\omega_0 t} (t \omega_0 - 1) + \omega_0 \frac{u_0}{L} e^{-\omega_0 t} = 2\omega_0 \frac{u_0}{L} e^{-\omega_0 t} - t \omega_0^2 \frac{u_0}{L} e^{-\omega_0 t}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow 2e^{-\omega_0 t} - t \omega_0 e^{-\omega_0 t} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{\omega_0} \Rightarrow \text{point d'inflexion à } t = 2/\omega_0$$



$$i\left(\frac{1}{\omega_0}\right) = -\frac{u_0}{L} \cdot \frac{1}{\omega_0} e^{-1} = -\frac{u_0}{L} \sqrt{LC} e^{-1} = -u_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-1}$$

Q4. L'énergie dissipée dans la résistance est $\frac{1}{2} C u_0^2$ (toute l'énergie emmagasinée à l'état initial dans le condensateur).

Exercice 3 :

$$Q1. \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Et pour un circuit RLC série $\Delta = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right) < 0$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\text{et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R'} = \frac{1}{R'} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{4}{R'^2} \cdot \frac{L}{C}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R'^2 C}{4L}}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R'^2 C}{4L} \right) \Leftrightarrow \frac{4\pi^2 \cdot LC}{T^2} = 1 - \frac{R'^2 C}{4L}$$

$$\frac{R'^2 C}{4L} = 1 - \frac{4\pi^2 LC}{T^2}$$

$$R'^2 = \frac{4L}{C} \left(1 - \frac{4\pi^2 LC}{T^2} \right)$$

$$R' = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 LC}{T^2}}$$

$$\text{AN: } R' = 2\sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}}} \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-5}}{(5 \cdot 10^{-3})^2}}$$

$$R' = 100 \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 \cdot 25 \cdot 10^{-8}}{25 \cdot 10^{-6}}} = 100 \sqrt{1 - 4\pi^2 10^{-2}}$$

$$\underline{R' = 78 \Omega}$$

$$Q2. \quad u_c(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \right)$$

$$\text{avec} \quad r_{1,2}(t) = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4}Q^2}}_{=\Omega}$$

Avec les conditions initiales $u_c(0^+) = u_0$ et $\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{0^+} = 0$

$$\text{on a :} \quad u_0 = e^0 (A + B \cdot 0) \Rightarrow A = u_0.$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \frac{du_c}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \right) \\ &\quad + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(-A \Omega \sin \Omega t + B \Omega \cos \Omega t \right) \end{aligned}$$

$$\text{à } t=0^+ \quad \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0^+} = -\frac{\omega_0}{2Q} \cdot A + B \Omega = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{\omega_0}{2Q} u_0 = \frac{1}{2\Omega} \frac{R'}{L} u_0$$

$$u_c(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(u_0 \cos \Omega t + \frac{R' u_0}{2\Omega L} \sin \Omega t \right)$$

Numériquement :

$$\frac{\omega_0}{2Q} = \frac{1/\sqrt{LC}}{\frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{2L}$$

$$\text{AN : } \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{77,8}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 1556 \text{ s}^{-1}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{77,8} \cdot \sqrt{\frac{0,025}{10^{-5}}} = 0,64 > \frac{1}{2}$$

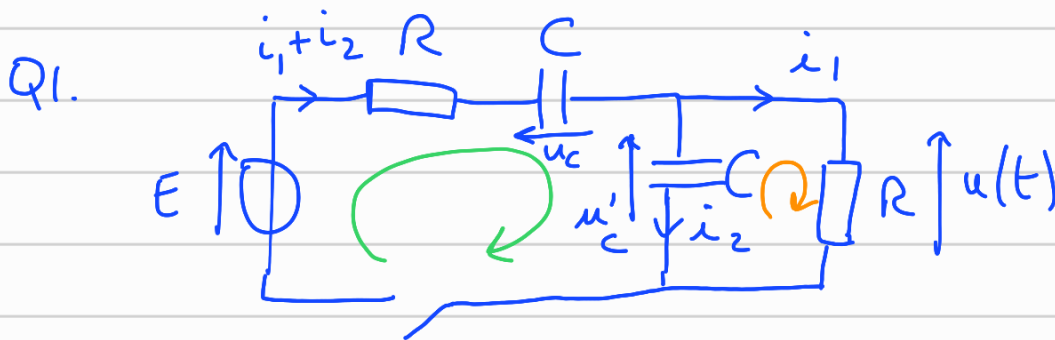
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,025 \cdot 10^{-5}}} = 2000 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\Omega = 2000 \sqrt{1 - \frac{1}{4.064^2}} = 1248 \text{ rad.s}^{-1} \quad (1257 \text{ avec la valeur exacte de } Q)$$

$$\frac{R' u_0}{2\Omega L} = \frac{77,8.6}{2.1248.25.10^{-3}} = 7,48$$

$$u_c(t) = e^{-1556t} \left(6 \cos(1248t) + 7,48 \sin(1248t) \right)$$

Exercice 4 :



* loi des mailles : maille verte pour $t > 0$:

$$E - R(i_1 + i_2) - u_c - u'_c = 0 \quad (1)$$

* loi des mailles : maille orange pour $t > 0$:

$$u'_c - u = 0 \quad (2)$$

* loi d'Ohm : $i_1 = \frac{u}{R} \quad (3)$

* loi intensité-tension : $i_2 = C \frac{du'_c}{dt} = C \frac{du}{dt} \quad (4)$

$$i_1 + i_2 = C \frac{du}{dt} \quad (5)$$

On injecte (2) ; (3) ; (4) dans (1) :

$$E - R \left(\frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} \right) - u_c - u = 0$$

On dérive pour faire disparaître u_c :

$$0 - \frac{du}{dt} - RC \frac{d^2 u}{dt^2} - \left(\frac{i_1 + i_2}{C} \right) - \frac{du}{dt} = 0$$

On réinjecte (3) et (4) :

$$RC \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{u}{RC} + 3 \frac{du}{dt} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} u = 0}$$

Q2. Conditions initiales :

* $u(0^+) = 0$ car le condensateur qui est en parallèle est initialement déchargé et la tension à ses bornes est continue.

$$* \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} (i_1(0^+) + i_2(0^+))$$

$$\text{Or } i_1(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = 0$$

$$\text{et } i_2(0^+) = \frac{E}{R} \quad (\text{loi des mailles à } t=0^+ :$$

$$E = u'_c(0^+) + u_c(0^+) + R(i_1(0^+) + i_2(0^+))$$

$$E = 0 + 0 + R(0 + i_2(0^+)) \Rightarrow i_2(0^+) = \frac{E}{R}$$

$$\text{Donc } \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{E}{RC}$$

$$\text{Q3. } \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} u = 0$$

$$\text{Polynôme caractéristique: } r^2 + \left(\frac{3}{RC}\right)r + \left(\frac{1}{RC}\right)^2 = 0$$

$$\text{Discriminant: } \Delta = \left(\frac{3}{RC}\right)^2 - \left(\frac{2}{RC}\right)^2 = \frac{9-4}{(RC)^2} = \frac{5}{(RC)^2}$$

$\Delta > 0$ donc 2 racines réelles :

$$r_1 = \frac{-3}{2RC} - \frac{\sqrt{5}}{2RC} = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2RC}$$

$$r_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2RC}$$

$$\text{Donc } u(t) = A e^{\frac{-3 - \sqrt{5}}{2RC} t} + B e^{\frac{-3 + \sqrt{5}}{2RC} t}$$

On utilise les conditions initiales pour déterminer A et B :

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ \frac{E}{RC} = -A \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2RC} \right) e^0 + B \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2RC} \right) e^0 \end{cases}$$

$$B = -A$$

$$\frac{E}{RC} = B \left(\frac{3 + \sqrt{5} - 3 + \sqrt{5}}{2RC} \right) = B \frac{\sqrt{5}}{RC}$$

$$B = \frac{E}{\sqrt{5}}$$

$$\text{et } A = -\frac{E}{\sqrt{5}}$$

$$u(t) = -\frac{E}{\sqrt{5}} e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2RC} t} + \frac{E}{\sqrt{5}} e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2RC} t}$$

$$\left(\text{que l'on peut \acute{e}crire : } u(t) = \frac{E}{\sqrt{5}} e^{-\frac{3t}{2RC}} \left(e^{\frac{\sqrt{5}t}{2RC}} - e^{-\frac{\sqrt{5}t}{2RC}} \right) \right)$$

$2 \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC} t\right)$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{25}{\sqrt{5}} e^{-\frac{3t}{2RC}} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC} t\right)$$

$$\text{maximum de la fonction : } \frac{du}{dt} = 0$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{25}{\sqrt{5}} \cdot -\frac{3}{2RC} e^{-\frac{3t}{2RC}} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC} t\right) + \frac{25}{\sqrt{5}} e^{-\frac{3t}{2RC}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2RC} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC} t\right)$$

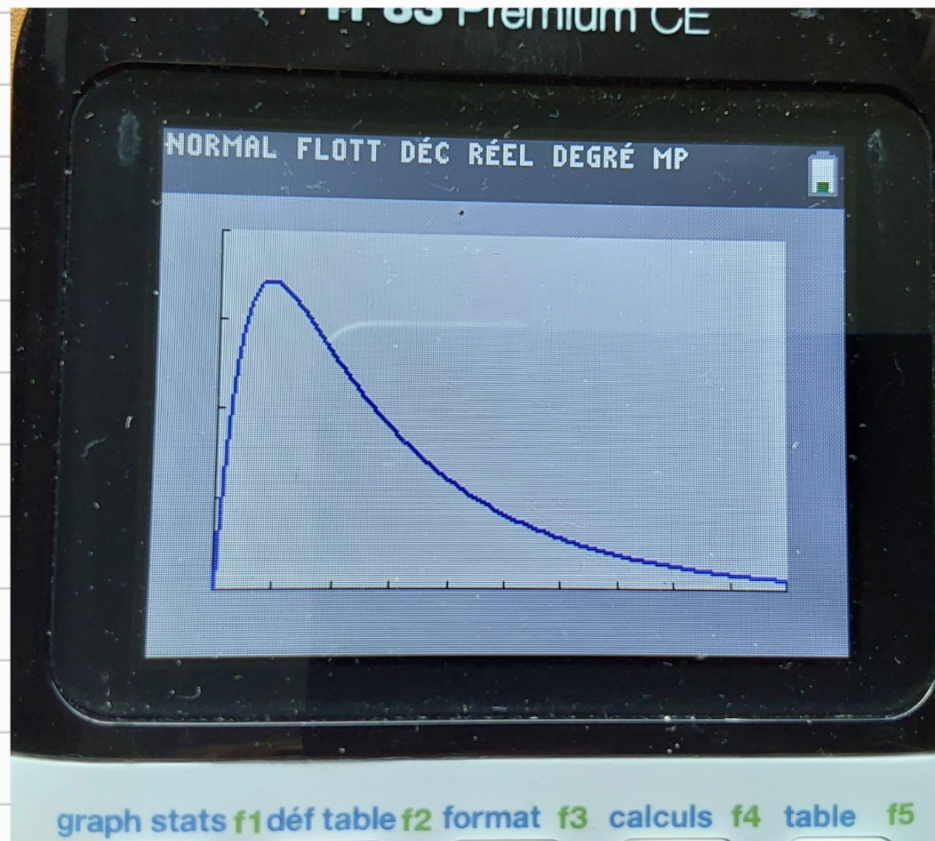
$$\frac{du}{dt} = \frac{25}{2RC\sqrt{5}} e^{-\frac{3t}{2RC}} \left(-3 \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC} t\right) + \sqrt{5} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC} t\right) \right)$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5} \operatorname{ch}(X) = 3 \operatorname{sh}(X) \text{ avec } X = \frac{\sqrt{5}}{2RC} t$$

$$\Rightarrow \text{th } x = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

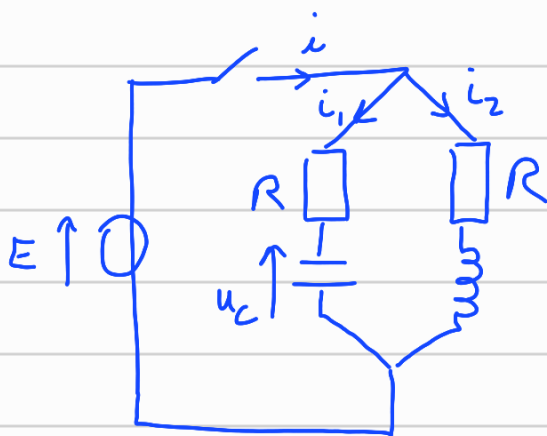
$$x = \arg \text{th} \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right) = 0,96$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2RC} t = 0,96 \Rightarrow t = \frac{2RC \cdot 0,96}{\sqrt{5}} \approx 0,86 \tau$$



Exercice 5 :

Q1.



2 lois des mailles :

$$* E = u_c + Ri_1 \Leftrightarrow 0 = \frac{du_c}{dt} + R \frac{di_1}{dt}$$

$$C \frac{du_c}{dt} + RC \frac{di_1}{dt} = 0$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{RC} i_1 = 0 \Rightarrow i_1(t) = A e^{-t/\tau}$$

avec $\tau = RC$

Conditions initiales : $i_1(0^+) = \frac{E}{R}$ car $u_c(0^+) = 0$

(continuité de la tension aux bornes du condensateur, initialement déchargé).

$$\Rightarrow i_1(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}, \text{ d'où on tire } u_c(t) = -\frac{\tau E}{RC} e^{-t/\tau} + cte$$

$$\text{avec } u_c(0) = 0 \Leftrightarrow cte = E \Rightarrow u_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

$$* E = Ri_2 + u_L \Leftrightarrow E = Ri_2 + L \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{R}{L} i_2 = \frac{E}{L}$$

$$i_{2H} = B e^{-t/\tau'} \left(\text{avec } \tau' = \frac{L}{R} \right) \text{ et } i_{2,p} = \frac{E}{R}$$

Conditions initiales : $i_2(0^+) = 0$ (continuité du courant traversant la bobine).

$$i_2(t) = \frac{E}{R} + B e^{-t/\tau}$$

$$i_2(0^+) = \frac{E}{R} + B = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{E}{R}$$

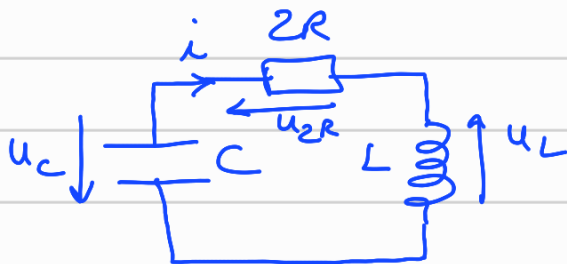
$$i_2(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau'})$$

* loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$

$$\text{Soit } i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/RC} + \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$\text{Or } RC = \frac{L}{R} \Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R} = \text{cte}}$$

Q2. Une fois le régime permanent établi κ est ouvert, on a le circuit



$$\text{loi des mailles : } u_C + u_{2R} + u_L = 0$$

$$\text{avec } u_C = \frac{q}{C} \Rightarrow q = C u_C$$

$$u_R = 2Ri = 2R \frac{dq}{dt} = 2RC \frac{du_C}{dt}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2} = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$u_c + 2RC \frac{du_c}{dt} + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} = 0$$

Forme canonique : $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{2R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0$

Polynôme caractéristique : $r^2 + \frac{2R}{L} r + \frac{1}{LC} = 0$

$$\Delta = \left(\frac{2R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} \quad \text{avec} \quad RC = \frac{L}{R} \Rightarrow R^2 = \frac{L}{C}$$

d'où $\frac{4L}{LC} - \frac{4}{LC} = 0$

1 racine double : $r = -\frac{2R}{2L} = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$

$$u_c = (At + B) e^{-t/\tau}$$

Conditions initiales : à $t = 0$ $u_c(0^+) = E$

Et $\frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C}$ soit $\frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0^+} = \frac{i(0^+)}{C}$

or $i(0^+) = \text{courant permanent } i_2 = -\frac{E}{R}$

$$\frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0^+} = -\frac{E}{RC}$$

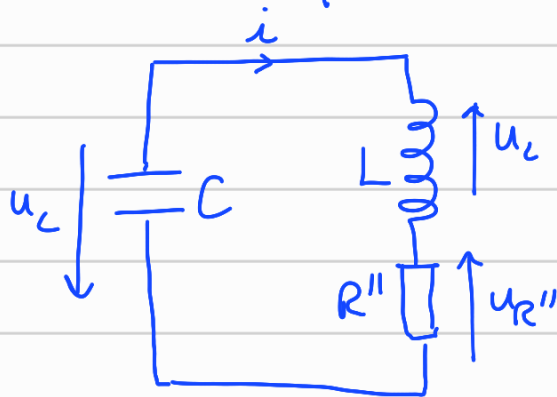
$$\begin{cases} E = (A \cdot 0 + B) e^0 = B \\ -\frac{E}{RC} = A e^0 + (A \cdot 0 + B) \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^0 = A - \frac{B}{\tau} \end{cases}$$

$$B = E \quad \text{et} \quad A = -\frac{E}{RC} + \frac{B}{\tau} = -\frac{E}{RC} + \frac{E}{RC} = 0$$

$$u_c(t) = E e^{-t/\tau}$$

Exercice 6 :

le schéma électrique du circuit est :



$$\begin{aligned} C &= 10 \mu\text{F} \\ L &= 25 \text{ mH} \end{aligned}$$

Equation différentielle qui régit l'évolution $u_{R''}$:

* loi des mailles : $u_{R''} + u_L + u_c = 0$

* lois intensités-tension :

$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di}{dt} \Rightarrow u_L = \frac{L}{R''} \frac{du_{R''}}{dt} \\ i &= C \frac{du_c}{dt} \\ u_{R''} &= R'' i \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} u_L &= L \frac{di}{dt} \\ i &= C \frac{du_c}{dt} \\ u_{R''} &= R'' i \end{aligned}} \right\} \frac{du_c}{dt} = \frac{u_{R''}}{R'' C}$$

On dérive toute la ligne : $\frac{du_R''}{dt} + \frac{du_L}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$

$$\frac{du_R''}{dt} + \frac{L}{R''} \frac{d^2 u_R''}{dt^2} + \frac{u_R''}{R''C} = 0$$

Sous forme canonique : $\frac{d^2 u_R''}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_R''}{dt} + \frac{1}{LC} u_R'' = 0$

Equation caractéristique $r^2 + \frac{R}{L} r + \frac{1}{LC} = 0$

$$\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4/LC$$

Régime aperiodique donc $\Delta > 0$.

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} > 0 \Rightarrow 2 \text{ racines positives}$$

$$r_{1,2} = -\frac{R''}{2L} \pm \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$u_{R''}(t) = A e^{-t/\tau_1} + B e^{-t/\tau_2}$$

$$\text{avec } -\frac{1}{\tau_1} = r_1 = -\frac{R''}{2L} - \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$-\frac{1}{\tau_2} = r_2 = -\frac{R''}{2L} + \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

* Détermination des constantes avec les conditions initiales :

$$u_R''(0^+) = R''i(0^+) = 0 \quad \text{car} \quad i(0^+) = i(0^-) = 0$$

par continuité de l'intensité du courant dans la bobine.

$$\left. \frac{du_R''}{dt} \right|_{t=0^+} = R'' \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{R''}{L} u_L(0^+)$$

$$\text{Or à } t=0^+ \quad u_R''(0^+) + u_L(0^+) + u_C(0^+) = 0$$
$$0 + u_L(0^+) + u_0 = 0$$

(par continuité de la tension aux bornes du condensateur)

$$\text{d'où} \quad u_L(0^+) = -u_0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{du_R''}{dt} \right|_{t=0^+} = -\frac{R''}{L} u_0$$

On a donc le système :

$$\begin{cases} 0 = A e^0 + B e^0 \\ -\frac{R'' u_0}{L} = -\frac{A}{\tau_1} e^0 - \frac{B}{\tau_2} e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ -\frac{R'' u_0}{L} = -\frac{A}{\tau_1} - \frac{B}{\tau_2} \end{cases}$$

$$-\frac{R'' u_0}{L} = -\frac{A}{\tau_1} + \frac{A}{\tau_2} = -A \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right)$$

$$A = -\frac{R''u_0}{L} \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}} \quad \text{et} \quad B = \frac{R''u_0}{L} \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2} \right)$$

$$\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2} = r_2 - r_1$$

$$A = -\frac{R''u_0}{L(r_2 - r_1)} \quad \text{et} \quad B = \frac{R''u_0}{L(r_2 - r_1)}$$

$$u_{R''}(t) = -\frac{R''u_0}{L(r_2 - r_1)} e^{r_1 t} + \frac{R''u_0}{L(r_2 - r_1)} e^{r_2 t}$$

$$u_{R''}(t) = \frac{R''u_0}{L(r_2 - r_1)} (e^{r_2 t} - e^{r_1 t})$$

$u_{R''}$ est maximale lorsque $\frac{du_{R''}}{dt} = 0$

$$\frac{du_{R''}}{dt} = \frac{R''u_0}{L(r_2 - r_1)} (r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t})$$

$$\left. \frac{du_{R''}}{dt} \right|_{t=t_0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_2 e^{r_2 t_0} = r_1 e^{r_1 t_0}$$

on pose $r_1 = -\lambda + w$ et $r_2 = -\lambda - w$

$$-(\lambda + w)e^{-\lambda t_0} e^{-wt_0} = (-\lambda + w)e^{-\lambda t_0} e^{wt_0}$$

$$-(\lambda + w)e^{-wt_0} = (-\lambda + w)e^{wt_0}$$

$$\lambda \underbrace{(e^{wt_0} - e^{-wt_0})}_{= 2\text{sh}(wt_0)} = w \underbrace{(e^{wt_0} + e^{-wt_0})}_{2\text{ch}(wt_0)}$$

$$\frac{w}{\lambda} = \tanh(wt_0)$$

Or on a $\lambda = \frac{R''}{2L}$ et $w = \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$

soit $w = \sqrt{\lambda^2 - w_0^2}$ avec $w_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$\Rightarrow w^2 = \lambda^2 - w_0^2 \Rightarrow \lambda = \sqrt{w_0^2 + w^2} = w \sqrt{1 + \left(\frac{w_0}{w}\right)^2}$$

et $\frac{w}{\lambda} = \frac{w}{w \sqrt{1 + \frac{w_0^2}{w^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{w_0^2}{w^2}}}$

L'équation à résoudre est donc

$$H_h(\omega t_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

Graphiquement on lit $t_0 = 0,36 \text{ ms}$

$$\text{Et } \omega_0^2 = \frac{1}{25 \cdot 10^{-3}} \times \frac{1}{10 \cdot 10^{-6}} = 4 \cdot 10^6 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$H_h(0,36 \cdot 10^{-3} \omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4 \cdot 10^6}{\omega^2}}}$$

On trace les 2 courbes d'équation

$$Y_1 = H_h(0,36 \cdot 10^{-3} X)$$

$$\text{et } Y_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4 \cdot 10^6}{X^2}}}$$

et on cherche leur intersection :

$$X = 4\,027 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Soit $\omega = \underline{4027 \text{ rad.s}^{-1}}$

Et $\boxed{\lambda = \omega \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 L}{\omega}\right)^2}}$

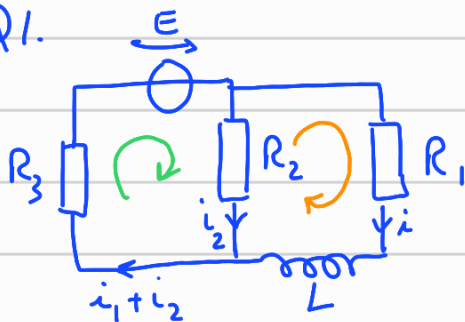
AN: $\lambda = 4027 \sqrt{1 + \left(\frac{2000}{4027}\right)^2} = 4496 \text{ } \Omega.\text{H}^{-1}$

Or $\lambda = \frac{R''}{2L} \Rightarrow \boxed{R'' = 2L.\lambda}$

AN: $R'' = 2.25.10^{-3} . 4496 = \underline{225 \text{ } \Omega}$

Exercice 7 :

Q1.



* D'après la loi des nœuds le courant traversant R_3 est $i + i_2$ (1)

* loi des mailles pour la maille verte :
 $E - R_2 i_2 - R_3 (i + i_2) = 0$ (2)

* loi des mailles pour la maille orange :

$$-R_1 i - L \frac{di}{dt} + R_2 i_2 = 0$$

D'après (2) : $i_2 (R_3 + R_2) = E - R_3 i$

$$i_2 = \frac{E - R_3 i}{R_2 + R_3}$$

On reporte dans (3) : $-R_1 i - L \frac{di}{dt} + R_2 \frac{E - R_3 i}{R_2 + R_3} = 0$

$$\frac{di}{dt} + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{R_3 R_2}{L(R_2 + R_3)} \right) i = \frac{R_2 E}{(R_2 + R_3) L}$$

$$\frac{di}{dt} + \left(\frac{R_1(R_2 + R_3) + R_3 R_2}{L(R_2 + R_3)} \right) i = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \frac{E}{L}$$

$$\frac{di}{dt} + \left(\frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{L(R_2 + R_3)} \right) i = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \frac{E}{L}$$

On identifie la constante de temps du circuit :

$$\tau = \frac{L(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

* Solution particulière en régime permanent :

$$i_p = \frac{E R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

* Solution de l'équation homogène : $i_h = A e^{-t/\tau}$

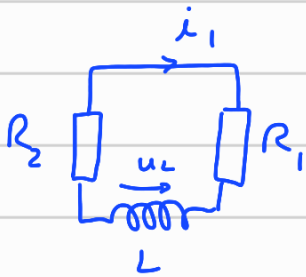
* Solution complète : $i(t) = \frac{E R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + A e^{-t/\tau}$

* Conditions initiales : $i(0^+) = 0$

$$0 = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} + A \Rightarrow A = \frac{-ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$i(t) = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec } \tau = \frac{L/(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

Q2. Nouvelle origine des temps : à $t=0$ le courant dans la bobine vaut $i = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$



loi des mailles :

$$u_L + R_1 i + R_2 i = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + i(R_1 + R_2) = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{L} i = 0$$

$$\text{on identifie } \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$$

$$i(t) = A e^{-t/\tau}$$

$$\text{Avec } i(0) = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$\text{Soit } 0 = A = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$i(t) = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} e^{-t/\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$$

Initialement la bobine a l'énergie $E_L = \frac{1}{2} L i(0)^2$

$$E_L = \frac{1}{2} L \left(\frac{E R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \right)^2$$

Cette énergie est entièrement dissipée dans les résistances (sous forme de chaleur).

Rq: On pourrait calculer $\int_{t=0}^{\infty} (R_1 + R_2) i^2 dt = (R_1 + R_2) \frac{E^2 R_2^2}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2} \left[-\frac{E}{2} e^{-24t} \right]_0^{\infty}$

$$= \frac{L}{R_1 + R_2} \frac{R_1 + R_2}{2} \frac{E^2 R_2^2}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2}$$

$$= \frac{L E^2 R_2^2}{2 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2}$$

$$= \frac{1}{2} L \left(\frac{E R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \right)^2$$

Exercice 8 :

Q1. Système : bille de masse m .
Référentiel : terrestre supposé galiléen
à l'échelle de l'expérience
Bilan des forces :



* poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_x$

* poussée d'Archimède $\vec{\pi}_A = -\rho_e \cdot V \cdot \vec{g} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e \vec{g}$
$$= -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e g \vec{u}_x$$

* force de rappel élastique $\vec{F}_e = -k(l - l_0)\vec{u}_x$

* force de frottement fluide $\vec{f} = -6\pi\eta R \dot{x} \vec{u}_x$
$$= -6\pi\eta R \dot{x} \vec{u}_x$$

A l'équilibre $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ d'après la 1^{ère} loi de Newton

$$\vec{P} + \vec{\pi}_A + \vec{F}_e + \vec{f} = \vec{0} \quad ; \quad \text{et} \quad \dot{x} = 0 \quad (\text{masse immobile})$$

On projette sur l'axe (Ox), avec $l = l_e$ à l'équilibre :

$$mg - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e g - k(l_e - l_0) = 0$$

$$k(l_e - l_0) = mg - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e g$$

$$l_e = \frac{mg - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e g}{k} + l_0$$

Q2. On applique la 2^{ème} loi de Newton au système {bille} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi}_A + \vec{F}_\ell + \vec{f} = m \vec{a}$$

Toutes les forces sont dirigées sur l'axe (Ox) donc on projette sur cet axe :

$$mg - \frac{4}{3} \pi \rho R^3 g - k(x - l_0) - 6\pi \eta R \dot{x} = m\ddot{x}$$

avec $l = x$ car l'origine du repère est située au point d'attache du ressort :

$$\text{D'après Q1, on a : } mg - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g = k(x_e - l_0)$$

$$\Rightarrow k(x_e - l_0) - k(x - l_0) - 6\pi \eta R \dot{x} = m\ddot{x}$$

$$-k(x - x_e) - 6\pi \eta R \dot{x} = m\ddot{x}$$

On met cette équation différentielle sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{6\pi \eta R}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} (x - x_e) = 0$$

On fait le changement de variable $X = x - x_e$

$$\ddot{X} + \frac{6\pi \eta R}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = 0$$

Q3. On identifie les termes de l'équation différentielle avec la forme canonique :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{6\pi\eta R}{m} \text{ soit } Q = \frac{m\omega_0}{6\pi\eta R} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\text{soit } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{6\pi\eta R}}$$

Q4. D'après l'enregistrement la masse est en régime pseudo-périodique (on observe des oscillations de x en fonction du temps)

$$\Rightarrow Q > \frac{1}{2}$$

L'équation différentielle est homogène, on détermine les racines de son polynôme caractéristique :

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$$

$$\text{On pose } \frac{1}{\zeta} = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$$

La solution générale de l'équation différentielle est :

$$X(t) = e^{-\frac{t}{\zeta}} \left[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \right]$$

$$\text{La période des oscillations est } T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}}$$

Q5. On détermine A et B avec les conditions initiales par lecture graphique : $\begin{cases} X(0) = X_0 = 5 \text{ cm} \\ \dot{X}(0) = 0 \text{ cm.s}^{-1} \end{cases}$

$$X(0) = e^0 (A + 0) = X_0 \Rightarrow A = X_0$$

$$\dot{X}(t) = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) + e^{-t/\tau} (-A \Omega \sin(\Omega t) + B \Omega \cos(\Omega t))$$

$$\dot{X}(0) = -\frac{A}{\tau} - B \Omega = 0 \Rightarrow B = -\frac{A}{\Omega \tau} = -\frac{X_0}{\Omega \tau}$$

$$X(t) = X_0 e^{-t/\tau} \left(\cos(\Omega t) - \frac{1}{\Omega \tau} \sin(\Omega t) \right)$$

Q6. D'après l'expression fournie $\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}$ on a :

$$\delta = \frac{\omega_0}{2Q} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}} = \frac{2\pi}{2Q \sqrt{1 - 1/4Q^2}}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Remarque : on peut établir l'expression de δ :

$$\delta = \ln \frac{X(t)}{X(t+T)}$$

$$\text{avec } X(t+T) = X_0 e^{-\frac{(t+T)}{\tau}} \left[\underbrace{\cos(\Omega(t+T))}_{=\cos(\Omega t)} - \frac{1}{\Omega \tau} \underbrace{\sin(\Omega(t+T))}_{=\sin(\Omega t)} \right]$$

$$X(t+T) = X_0 e^{-\frac{t+T}{\delta}} \left(\cos(\Omega t) - \frac{1}{\Omega \delta} \sin(\Omega t) \right)$$

$$\delta = \ln \left(\frac{X_0 e^{-t/\delta} \left(\cos(\Omega t) - 1/\Omega \delta \sin(\Omega t) \right)}{X_0 e^{-\frac{t+T}{\delta}} \left(\cos(\Omega t) - 1/\Omega \delta \sin(\Omega t) \right)} \right)$$

$$\delta = \ln \left(e^{-t/\delta + \frac{t+T}{\delta}} \right) = \ln e^{T/\delta} = \frac{T}{\delta}$$

avec $\frac{1}{\delta} = \frac{\omega_0}{2Q}$ soit $\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}$

Q7. Graphiquement on détermine $X(t+T)$ et $X(t)$:

$$\left. \begin{array}{l} X(0+T) = 2,5 \text{ cm} \\ X(0) = 5 \text{ cm} \end{array} \right\} \delta = \ln \left(\frac{5}{2,5} \right) = \underline{0,69}$$

or $\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \Rightarrow \delta^2 (4Q^2 - 1) = 4\pi^2$

$$Q^2 = \left(\frac{4\pi^2}{\delta^2} + 1 \right) \times \frac{1}{4}$$

soit $Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2}{\delta^2} + 1}$

AN: $Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi^2}{0,69^2} + 1} = \underline{4,6}$

et on peut déterminer ω_0 avec la formule

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T \sqrt{1 - 1/4Q^2}}$$

Graphiquement on lit $5T = 28s \Rightarrow T = 0,56s$.

AN: $\omega_0 = \frac{2\pi}{0,56 \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot 4,6^2}}} = 11,3 \text{ rad.s}^{-1}$

Q8. On avait posé $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}}$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho} \quad \text{soit} \quad \rho = \frac{k}{\omega_0^2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}$$

AN: $\rho = \frac{5,0}{11,3^2 \cdot \frac{4}{3}\pi (10^{-2})^3} = \underline{9,3 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}}$

Remarque: c'est du même ordre de grandeur que la masse volumique des métaux:

aluminium: $\rho_{Al} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

fer: $7,8 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

plomb: $11,4 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{6\pi\eta R}{m} \Rightarrow \eta = \frac{\omega_0 \cdot m}{6\pi R Q} = \frac{\omega_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho}{6\pi R Q}$

$$\eta = \frac{2\omega_0 R^2 \rho}{9Q}$$

AN: $\eta = \frac{2 \cdot 11,3 \cdot (10^{-2})^2 \cdot 9,3 \cdot 10^3}{9 \cdot 4,6}$

$\eta = 0,51 \text{ kg.m}^{-1}\text{s}^{-1} \text{ (ou Pa.s)}$

Remarque : On détermine l'unité de η par analyse dimensionnelle :

$$f = 6\pi\eta Rv$$

$$N.L.T^{-2} = [\eta] L^2 T^{-1}$$

$$[\eta] = N L^{-1} T^{-1}$$

Remarque : ordre de grandeurs de viscosités :

$$\eta_{\text{air}} \sim 10^{-5} \text{ Pa.s}$$

$$\eta_{\text{eau}} \sim 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

$$\eta_{\text{huile}} \sim 10^{-1} \text{ Pa.s}$$

$$\eta_{\text{miel}} \sim 100 \text{ Pa.s}$$