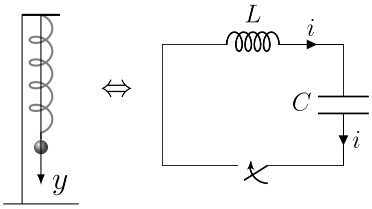
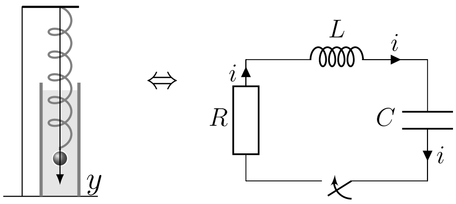
Chapitre 6 : Étude de l'oscillateur électrique amorti



Après avoir montré que le circuit LC donne lieu à des oscillations électriques de la même façon qu'un système masse-ressort sans frottements peut osciller indéfiniment en mécanique, nous allons nous intéresser au cas réel où les oscillations subissent un amortissement.



En mécanique ce sont les frottements qui sont responsables de l'amortissement des oscillations, en électricité il est dû au caractère résistif du circuit.

Plan du cours

À savoir	auto-éval.
Connaissances sur l'oscillateur électrique (chapitre 5).	☺ ☹

À savoir faire	auto-éval.
Écrire sous forme canonique l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.	☺ ☹
Identifier la nature de la réponselibre en fonction de la valeur du facteur de qualité.	☺ ☹
Déterminer la réponse dans le cas d'un régime libre ou indiciel en recherchant les racines du polynôme caractéristique et en tenant compte des conditions initiales.	☺ ☹
Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.	☺ ☹

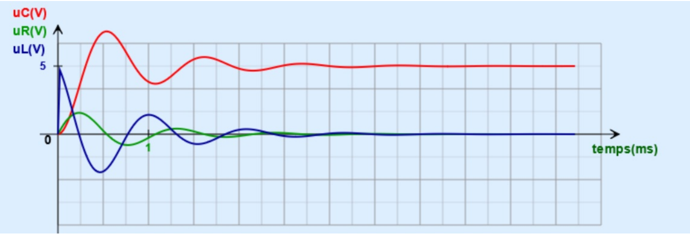
I Réponse indicielle du circuit RLC série

I.1 Observations : mise en évidence de 2 régimes transitoires

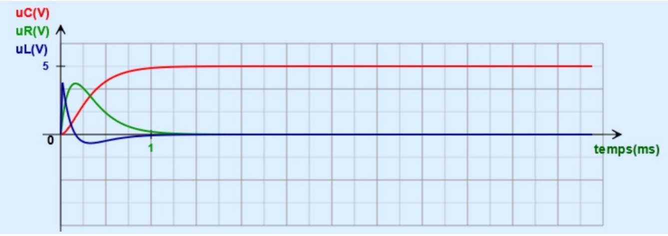
Simulation

Nous allons utiliser le simulateur de réponse indicielle d'un circuit RLC série disponible ici : `https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Transitoire/Condensateur1.php`.

Pour des valeurs de L et C fixes ($L = 0{,}40\,\mathrm{H}$ et $C = 70\,\mathrm{nF}$), on fait varier la valeur de R. Résultats des simulations :



$C = 70\,\mathrm{nF}$, $L = 0{,}40\,\mathrm{H}$, $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$



$C = 70\,\mathrm{nF}$, $L = 0{,}40\,\mathrm{H}$, $R = 5\,\mathrm{k\Omega}$

Q1. Quelle différence observe-t-on sur les signaux lorsque R prend les valeurs extrêmes du simulateur ($R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $R = 5\,\mathrm{k\Omega}$).

Q2. Comment évolue la durée du régime transitoire lorsque R augmente ?

Q1. Avec la plus faible valeur de R on observe des oscillations pour les grandeurs électriques, alors qu'avec la plus forte valeur de R le régime permanent est atteint sans oscillations.

Q2. Avec $R = 1\,k\Omega$ le régime permanent est atteint au bout de 3s.
Avec $R = 5\,k\Omega$ le régime permanent est atteint après 1s.

⇒ On voit qu'il y a 2 types de régimes transitoires qui rejoignent le même régime permanent : pseudo-per. et apériodique

I.2 État final

Avant de réaliser de longs calculs (équations différentielles et résolutions), il est tout à fait possible de déterminer complètement l'état final du circuit, c'est-à-dire les tensions et intensités dans le circuit une fois le nouveau régime permanent atteint.

☆ Méthode

❶ Reproduire le circuit électrique une fois le nouveau régime permanent atteint en remplaçant les condensateurs par un interrupteur ouvert et les bobines par un fil.

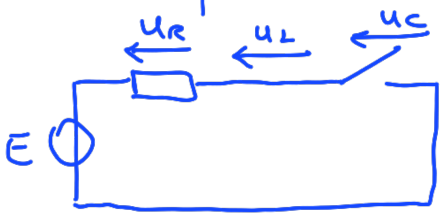
❷ Écrire que les tensions aux bornes des fils et les intensités à travers les interrupteurs ouverts sont nulles.

❸ Appliquer les lois des nœuds, les lois des mailles et les relations intensité-tension pour déterminer les autres grandeurs électriques.

Démonstration

Déterminer les grandeurs électriques à la fin du régime transitoire lors de la réponse à un échelon de tension du *RLC* série en suivant la méthode ci-dessus.

Une fois le régime permanent établi :



$i(\infty) = 0$

$u_L(\infty) = 0$

$u_R(\infty) = 0$

$u_C(\infty) = E$ → indep de R, L, C !

I.3 Mise en équation

Méthode

Pour établir l'équation différentielle vérifiée par une grandeur électrique s (u_c, i, q) d'un circuit *RLC* soumis à un échelon de tension ou en régime libre, il faut :

❶ Représenter le circuit électrique étudié, en nommant et fléchant SUR le circuit toutes les tensions et intensités.

❷ Lister les grandeurs électriques (tension, intensité) inconnues (qui ont du être représentées sur le circuit précédemment). Le nombre de grandeurs électriques inconnues vous donne le nombre d'équations indépendantes à écrire.

❸ Écrire toutes les relations indépendantes possibles :

- lois des mailles indépendantes
- lois des nœuds
- relations intensité-tension pour tous les dipôles

❹ Combiner ces relations entre elles pour ne conserver que la grandeur qui nous intéresse.

❺ Mettre l'équation différentielle sous forme canonique, c'est à dire avec un cœfficient 1 devant le terme de la dérivée d'ordre 2 (voir formule ci-dessous).

❻ Déterminer les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q en fonction des résistances, inductances et capacités présentes dans le circuit.

Formule

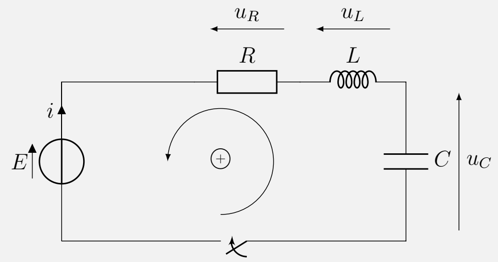
Forme canonique de l'équation différentielle pour un oscillateur électrique amorti :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)$$

avec :
$\omega_0 =$ pulsation propre en rad·s^{-1}
$Q =$ facteur de qualité (grandeur sans dimension)
$s(\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty} s$

Démonstration

Appliquer la méthode ci-dessus pour établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ pour le circuit RLC série soumis à un échelon de tension E. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier les expressions de la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.



Loi des mailles : $u_c + u_L + u_R - E = 0$

Lois intensité-tension : $u_R = Ri$ $\quad i = C\dfrac{du_c}{dt}$ $\quad u_L = L\dfrac{di}{dt}$

On obtient : $u_c + LC\dfrac{d^2u_c}{dt} + RC\dfrac{du_c}{dt} = E$

Forme canonique :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = \frac{E}{LC}$$

On a donc $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

et $\omega_0/Q = R/L$ soit

$Q = \dfrac{L}{R}\omega_0 = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Démonstration

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur $q(t)$ pour le circuit RLC série soumis à un échelon de tension E. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier les expressions de la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.

$u_c = \dfrac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^2}{dt}\left(\dfrac{q}{C}\right) + \dfrac{R}{L}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{q}{C}\right) + \dfrac{1}{LC}\dfrac{q}{C} = \dfrac{E}{LC}$

$$\frac{1}{C}\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{LC}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC^2}q = \frac{E}{LC}$$

Forme canonique : $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{LC}q = \dfrac{E}{L}$

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L} \Rightarrow Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Démonstration

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$ traversant le circuit RLC série soumis à un échelon de tension E. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique et identifier les expressions de la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.

$i = C\dfrac{du_c}{dt}$ On dérive l'équation différentielle obtenue

pour u_c : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d^2u_c}{dt^2}\right) + \dfrac{R}{L}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{du_c}{dt}\right) + \dfrac{1}{LC}\dfrac{du_c}{dt} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C}\frac{di}{dt}\right) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{C}i\right) + \frac{1}{LC}\cdot\frac{1}{C}i = 0$$

$$\frac{1}{C}\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{LC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC^2}i = 0 \iff \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

Remarque

ω_0 et Q ne dépendent pas de la grandeur étudiée (u_C, u_L, i, q), ils dépendent des valeurs des composants du circuit : R, L, C.

I.4 Résolution de l'équation différentielle

Méthode

Pour résoudre $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)$ **, il faut :**

❶ **Résoudre l'équation homogène sans second membre** : $\dfrac{\mathrm{d}^2 s_H}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}s_H}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s_H = 0$ (EH)

a) Écrire l'équation caractéristique (EC) : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

b) Calculer le discriminant de (EC) : $\Delta = 4\omega_0^2\left(\dfrac{1}{4Q^2} - 1\right)$

c) Déterminer le signe de Δ grâce aux valeurs numériques fournies.

d) En déduire les racines r de l'équation caractéristique (EC) :

- Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \dfrac{1}{2}$: 2 racines complexes conjuguées : $r_{1,2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$
- Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \dfrac{1}{2}$: 2 racines réelles : $r_{1,2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$
- Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \dfrac{1}{2}$: 1 racine double : $r = -\omega_0$

e) En déduire les solutions générales $s_H(t)$ de l'équation homogène (EH), en introduisant deux constantes d'intégration A et B :

- Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \dfrac{1}{2}$: $s_H(t) = e^{\mathrm{Re}(r)t}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big)$ avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} = |\mathrm{Im}(r)|$
- Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \dfrac{1}{2}$: $s_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
- Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \dfrac{1}{2}$: $s_H(t) = (At + B)e^{rt}$

❷ **Déterminer la solution particulière s_P recherchée sous la même forme que le second membre**, c'est-à-dire sous la forme d'une constante dans ce chapitre : $s_P = s_\infty$

❸ La solution générale recherchée est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$s(t) = s_H(t) + s_P$$

❹ Déterminer les **constantes d'intégration** A et B à l'aide des conditions initiales : $s(0)$ et sa dérivée première $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0)$.

I.5 Conditions initiales

On a obtenu une équation différentielle du 2e ordre vérifiée par s (tension, intensité, charge...), dont la résolution fait intervenir 2 constantes d'intégration, que l'on détermine avec les deux conditions initiales $s(0^+)$ et $\frac{ds}{dt}(0^+)$.

☆ Méthode

Pour déterminer les conditions initiales du circuit RLC série :

❶ Déterminer les valeurs des intensités et tensions AVANT la fermeture de l'interrupteur.

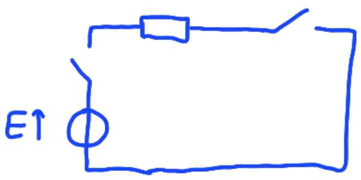
❷ Utiliser la continuité de la charge du condensateur (ou de la tension aux bornes du condensateur) et de l'intensité du courant à travers une bobine, pour déterminer ces valeurs JUSTE APRÈS la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).

❸ Les autres grandeurs électriques à $t = 0^+$ se déterminent en appliquant les relations intensité/tension à $t = 0^+$ et les lois des mailles et des nœuds à $t = 0^+$. On en déduit les valeurs de $s(0^+)$ et $\frac{ds}{dt}(0^+)$.

Démonstration

Appliquer la méthode précédente pour déterminer les valeurs des grandeurs électriques u_C, q, i et u_L et leurs dérivées premières à $t = 0^+$.

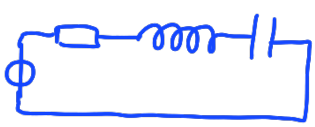
A $t = 0^-$ le régime permanent était établi depuis longtemps et le condensateur était déchargé :



$u_L(0^-) = 0$
$u_C(0^-) = 0$
$i(0^-) = 0$
$q(0^-) = 0$

Par continuité on obtient :
$u_C(0^+) = 0$
$q(0^+) = 0$
$i(0^+) = 0 \Rightarrow \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0^+} = \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0^+} = 0$

A $t = 0^+$



$u_C(0^+) + u_L(0^+) + u_R(0^+) = E \Rightarrow u_L(0^+) = E$

$L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0^+} = E \Leftrightarrow \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{E}{L}$

et $\frac{d}{dt}\left(u_C + u_L + u_R\right) = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0^+} + \left.\frac{du_L}{dt}\right|_{t=0^+} + \left.\frac{du_R}{dt}\right|_{t=0^+} = 0$

$\left.\frac{du_L}{dt}\right|_{t=0^+} + R\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0^+} = 0 \Rightarrow \left.\frac{du_L}{dt}\right|_{t=0^+} = -\frac{RE}{L}$

I.6 Cas $Q > \frac{1}{2}$ Régime pseudo-périodique

On s'intéresse à la grandeur u_C dans le circuit RLC série, dont on a montré qu'elle vérifie l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$, avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Exercice de cours (A)

Q1. Calculer la valeur de ω_0 et Q dans la 1re simulation (C =70 nF, L =0,40 H, R =1 kΩ) et vérifier qu'on avait bien $Q > \frac{1}{2}$.

Q2. En suivant scrupuleusement la méthode donnée au I.4 , déterminer la solution générale $u_C(t)$ et la mettre sous la forme $u_C(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\Big(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big) + E$. Identifier les expressions de τ et Ω en fonction de Q et ω_0. Quelles sont les dimensions de ces deux grandeurs ? À quoi correspondent-elles ? Faire les AN pour déterminer leurs valeurs.

Q3. Déterminer les constantes d'intégration en utilisant les conditions initiales déterminées au I.5 .

Q4. Tracer l'allure de $u_C(t)$ avec votre calculatrice, décrire l'évolution de la courbe obtenue et vérifier la cohérence avec la simulation du I.1 .

Remarque

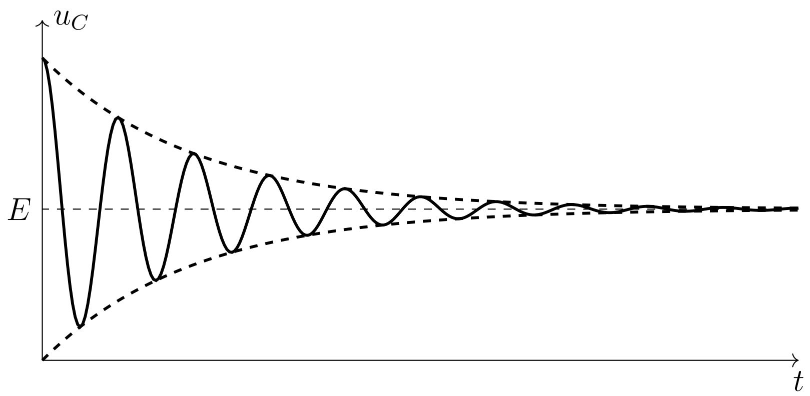
Avec la formule trigo : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, on peut mettre u_C sous la forme :

$$u_C(t) = E + Ke^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \varphi)$$

Propriétés du régime pseudo-périodique $Q > \frac{1}{2}$

$$u_C(t) = E + Ke^{-t/\tau}\cos(\Omega t + \varphi)$$

donc $u_C(t) - E$ est le produit d'une fonction sinusoïdale de pulsation Ω et d'une fonction exponentielle décroissante $e^{-\frac{t}{\tau}}$, qui décroit sur une durée caractéristique τ.
⇒ La tension u_C oscille avant de se stabiliser à sa valeur imposée par le générateur :



- La période des oscillations vaut $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.
- L'amortissement des oscillations est caractérisée par la constante de temps $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

  Durée caractéristique du régime transitoire pseudo-périodique : quelques $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$
  ⇒ il est d'autant plus long que le facteur de qualité Q est élevé (et donc que la valeur de la résistance R est faible à L et C fixés)

Systèmes peu amortis $Q \gg 1$

Pour $Q \gg 1$, la pseudo-période vaut $T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}} \approx \dfrac{2\pi}{\omega_0} = T_0$.

$\Rightarrow$ Pour $Q \gg 1$, la pseudo-pulsation est quasiment égale à la pulsation propre : $\Omega \approx \omega_0$ (et la pseudo-période est quasiment égale à la période propre : $T \approx T_0$).

Nombre d'oscillations pendant le régime transitoire $N = \dfrac{\text{durée du régime transitoire}}{\text{durée d'1 oscillation}}$

avec : durée du régime transitoire = quelques τ ($\approx 4\tau$) et durée d'une oscillation = T

$$N \approx \frac{4\tau}{T} \approx \frac{4 \times 2Q}{\omega_0} \times \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 1,3Q$$

Un système peu amorti effectue environ Q oscillations durant le régime transitoire.

En régime pseudo-périodique le facteur de qualité Q donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations de l'oscillateur avant qu'il atteigne le régime permanent.

Application directe

Déterminer le nombre d'oscillations observées pendant le régime pseudo-périodique de la 1re simulation et vérifier avec le critère donné ci-dessus.

$N = \dfrac{4\tau}{T}$ avec $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$ et $T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-1/4Q^2}}$

$N = \dfrac{4.2Q}{\omega_0} \cdot \dfrac{\omega_0\sqrt{1-1/4Q^2}}{2\pi} = \dfrac{4Q}{\pi}\sqrt{1-1/4Q^2} = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{4Q^2-1}$

AN : $N \simeq \frac{2}{\pi}\sqrt{4.2,4^2-1} = 3$ On voit bien effectivement 3 oscillations. (ou avec $N \approx 1,3Q$)

I.7 Cas $Q < \frac{1}{2}$ Régime apériodique

Exercice de cours (B)

Q1. Calculer la valeur de ω_0 et Q dans la 2e simulation (C =70 nF, L =0,40 H, R =5 kΩ) et vérifier qu'on avait bien $Q < \dfrac{1}{2}$.

Q2. En suivant scrupuleusement la méthode donnée au I.4 , déterminer numériquement r_1 et r_2 puis déterminer l'expression numérique de la solution générale $u_C(t)$.

Q3. Déterminer les constantes d'intégration en utilisant les conditions initiales déterminées au I.5 .

Q4. Tracer l'allure de $u_C(t)$ avec votre calculatrice, décrire l'évolution de la courbe obtenue et vérifier la cohérence avec la simulation du I.1 .

Remarque

Les 2 racines r_1 et r_2 sont négatives (sinon on aurait divergence en $+\infty$).

♥ Propriétés du régime apériodique $Q < \dfrac{1}{2}$

$$u_C(t) = E + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

donc $u_C - E$ est la somme de deux exponentielles décroissantes (r_1 et r_2 étant négatives), que l'on peut mettre sous la forme : $u_C(t) - E = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$ en posant τ_1 et τ_2 les temps caractéristiques de décroissance des deux exponentielles, tels que : $r_1 = -\dfrac{1}{\tau_1}$ et $r_2 = -\dfrac{1}{\tau_2}$.

Pour $r_1 < r_2$, on a donc $\tau_1 < \tau_2$, l'exponentielle e^{-t/τ_1} décroît donc plus rapidement que e^{-t/τ_2}. L'exponentielle qui impose la fin du régime permanent est donc e^{-t/τ_2} car elle décroît moins rapidement.

Pour déterminer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire apériodique, il faut donc estimer un ordre de grandeur de τ_2.

♥ Systèmes très amortis $Q \ll 1$

Déterminons l'expression de τ_2 en fonction de ω_0 et Q :

$$\tau_2 = -\frac{1}{r_2} = -\frac{1}{-\dfrac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}} = \frac{1}{\dfrac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right)}$$

Pour $x \ll 1$, on peut faire un développement limité : $\sqrt{1 - x} \approx 1 - \dfrac{x}{2}$.

On obtient : $\tau_2 = \dfrac{1}{\omega_0 Q}$

Durée caractéristique du régime transitoire apériodique : quelques $\tau_2 = \dfrac{1}{Q\omega_0}$

$\Rightarrow$ il est d'autant plus court que le facteur de qualité augmente (tout en restant inférieur à 1/2), c'est-à-dire lorsque la valeur de R diminue à C et L constants.

L'influence du facteur de qualité sur la durée du régime transitoire apériodique ($\tau \propto 1/Q$) est inverse de celle sur la durée du régime transitoire pseudo-périodique ($\tau \propto Q$).

I.8 Cas $Q = \dfrac{1}{2}$ Régime critique

Exercice de cours ©

Q1. Déterminer la valeur de R à choisir pour avoir un facteur de qualité égal à $\dfrac{1}{2}$ avec les conditions de la simulation : $L = 0{,}4\,\text{H}$ et $C = 70\,\text{nF}$.

Q2. Déterminer la valeur de la racine double r de l'équation caractéristique.

Q3. Déterminer les constantes d'intégration en utilisant les conditions initiales déterminées au I.5 .

Q4. Tracer l'allure de $u_C(t)$ avec votre calculatrice, comparer avec la courbe obtenue dans le cas du régime apériodique.

♥ Propriétés du régime critique $Q = \dfrac{1}{2}$

$$u_C(t) = E + (At + B)e^{rt}$$

avec $r = -\dfrac{\omega_0}{2 \times \frac{1}{2}} = -\omega_0$ donc u_C est une fonction faisant intervenir une exponentielle décroissante, qui décroit donc avec un temps caractéristique de durée de $1/\omega_0$.

Durée caractéristique du régime transitoire en régime critique : quelques $\tau = 1/\omega_0$

I.9 Bilan énergétique de la réponse indicielle du circuit RLC série

Rappel du chapitre 4 : Pour établir le bilan de puissance il faut multiplier la loi des mailles par l'intensité i : $E \times i = u_c \times i + u_R \times i + u_L \times i$, avec

— la puissance algébriquement fournie par le générateur $E \times i$;

— la puissance algébriquement reçue par le condensateur : $u_c \times i = u_c \times C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Cu_c^2\right)$, où $\dfrac{1}{2}Cu_c^2$ est l'énergie stockée par le condensateur ;

— la puissance algébriquement reçue par la bobine : $u_L \times i = i \times L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right)$, où $\dfrac{1}{2}Li^2$ est l'énergie stockée par la bobine ;

— la puissance algébriquement reçue par la résistance : $Ri^2 > 0$, donc réellement reçue à tout instant, elle est entièrement dissipée sous forme d'énergie thermique.

II Réponse libre du circuit RLC série

II.1 État final

Comme pour la réponse indicielle, il est possible de déterminer sans calculs, les valeurs des grandeurs électriques quand $t \to \infty$ en remplaçant les dipôles par leurs équivalents en régime permanent : condensateur $\leftrightarrow$ interrupteur ouvert et bobine $\leftrightarrow$ fil.

$u_R(\infty) = 0$
$u_L(\infty) = 0$

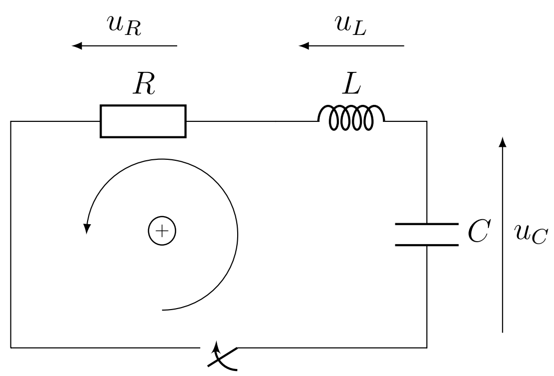
$u_c(\infty) = 0 = q(\infty)$
$i(\infty) = 0$

Application directe

Représenter le circuit à l'état final et en déduire les valeurs $u_C(\infty)$, $u_L(\infty)$, $i(\infty)$ et $q(\infty)$.

II.2 Mise en équation

On étudie le régime libre du circuit RLC série : le condensateur a été préalablement chargé sous la tension U_0 ($t < 0$). À $t = 0$ on connecte le condensateur en série avec une résistance et une bobine supposée idéale (= on ferme l'interrupteur), et on étudie l'évolution des grandeurs électriques du circuit pour $t > 0$.



Les calculs strictement identiques au cas de la réponse à un échelon de tension « en enlevant le E ». On obtient des équations différentielles strictement identiques, mais sans second membre :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_c &= 0\\
\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}i &= 0\\
\frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_L &= 0\\
\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}q &= 0
\end{aligned}$$

II.3 Résolution

En identifiant ces équations avec la forme canonique (voir I.3), on obtient : $\frac{\omega_0}{Q}=\frac{R}{L}$ et $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ soit :

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et} \qquad Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

La résolution suit les mêmes étapes que pour la réponse indicielle, mais l'équation est sans second membre (équation homogène).

☆ Méthode

Étapes pour résoudre l'équation différentielle (exemple pour l'équation en u_L) :

❶ Déterminer la valeur de Q et la comparer à la valeur $\frac{1}{2}$ (ou calculer le Δ de l'équation caractéristique et le comparer à 0) pour déterminer dans quel régime on se trouve :

— si $Q>\frac{1}{2}$ (ou $\Delta<0$) : régime pseudo-périodique

— si $Q<\frac{1}{2}$ (ou $\Delta>0$) : régime apériodique

— si $Q=\frac{1}{2}$ (ou $\Delta=0$) : régime critique

❷ Exprimer la/les racines de l'équation caractéristique (EC), puis écrire la solution générale de l'équation différentielle.

— Régime pseudo-périodique : l'EC admet 2 racines complexes $r_{1,2}=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}$, et la solution est de la forme : $u_L(t)=e^{\mathrm{Re}(r)t}\Big(A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t)\Big)$ avec $\Omega=|\mathrm{Im(r)}|$

— Régime apériodique : l'EC admet 2 racines réelles $r_{1,2}=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm\omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}$, et la solution est de la forme : $u_L(t)=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t}$

— Régime critique : l'EC admet 1 racine double $r=-\omega_0$, et la solution est de la forme : $u_L(t)=(At+B)e^{rt}$

❸ Déterminer constantes en utilisant les conditions initiales.

II.4 Conditions initiales

La même méthode est la même que pour la réponse indicielle (voir I.5).

Exercice de cours Ⓓ

Q1. Que valent toutes les grandeurs électriques pur les instants $t < 0$?

Q2. Quelles grandeurs électriques ne peuvent pas subir de discontinuité en fonction du temps ? En déduire leurs valeurs à l'instant $t = 0^+$.

Q3. Déterminer les autres grandeurs électriques dans le circuit à $t = 0^+$ permettant de déterminer les constantes d'intégration qui interviendront dans les solutions générales des équations différentielles établies précédemment.

II.5 Aspects énergétiques

La même méthode est la même que pour la réponse indicielle (voir I.9).

Exercice de cours Ⓔ

Q1. Établir le bilan de puissance.

Q2. En déduire le bilan d'énergie sur la totalité du régime transitoire. En déduire l'énergie totale dissipée par effet Joule. De quoi dépend-elle ?

III Bilan

Bilan

Équation différentielle d'un oscillateur électrique amorti :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 s(\infty)$$

s = grandeur électrique (intensité, tension, charge)

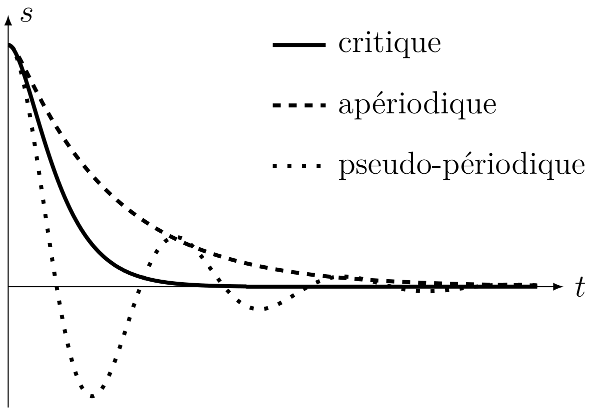
ω_0 = pulsation propre en rad/s)

Q = facteur de qualité (sans unité)

(ω_0 et Q :) constantes positives qui dépendent des paramètres de l'oscillateur

$s(\infty)$ = valeur finale atteinte par s à la fin du régime transitoire (après quelques τ)

Différents régimes transitoires :



Régime	Δ	Q	τ
apériodique	$\Delta > 0$	$Q < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\omega_0 Q}$
critique	$\Delta = 0$	$Q = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\omega_0}$
pseudo-périodique	$\Delta < 0$	$Q > \frac{1}{2}$	$\frac{2Q}{\omega_0}$

Durée du régime transitoire :

- La durée du régime transitoire apériodique diminue lorsque le facteur de qualité augmente.
- Lorsque le régime transitoire est le régime transitoire critique, le régime permanent est atteint le plus rapidement et sans oscillation (à ω_0 fixé).
- La durée d'un régime transitoire pseudo-périodique augmente lorsque le facteur de qualité augmente. Le facteur de qualité donne un ordre de grandeur du nombre d'oscillations du système durant le régime transitoire, avant qu'il atteigne le régime permanent.

$Q < \frac{1}{2}$: $\tau = \frac{1}{\omega_0 Q}$ $\quad \tau \searrow$

$Q = \frac{1}{2}$: $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

$Q > \frac{1}{2}$: $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ $\quad \tau \nearrow$

$\longrightarrow Q$

Un système faiblement amorti est tel que $Q \gg \frac{1}{2}$ (par ex si R est très faible). Dans ce cas :

— Q est très élevé : de nombreuses oscillations sont visibles et la durée du régime transitoire est très élevée ;

— la pseudo-pulsation et la pulsation propre sont très proches.

IV Simulation

La réponse d'un circuit RLC série peut être simulée grâce au script Python ci-dessous :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

C=220e-9
L=50e-3
R=10
w0 = 1/np.sqrt(L*C)
Q = 1/R*np.sqrt(L/C)
tau = 2*Q/w0
w1 = w0*np.sqrt(1-1/(4*Q**2))
E = 5.0
t = np.linspace(0,50e-3,10000)
s = E*(1-np.exp(-t/tau)*(np.cos(w1*t)+np.sin(w1*t)/(w1*tau)))

plt.plot(t*1000,s)
plt.xlabel('t (ms)')
plt.ylabel('s (V)')
plt.grid()
plt.show()
```