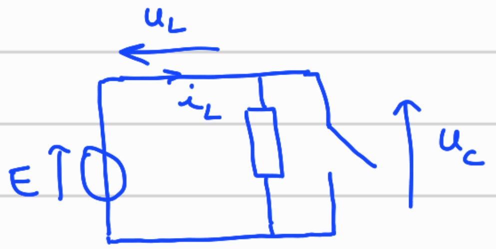
Correction du TD du chapitre 6

Exercice 1

En régime permanent :

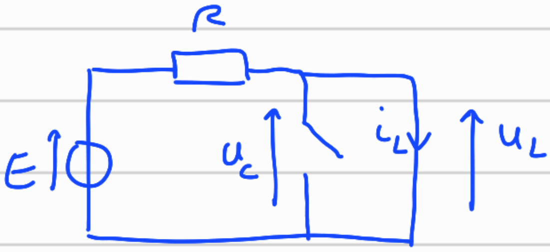
*



$i_L(\infty) = \frac{E}{R}$

$u_c = u_R = E$

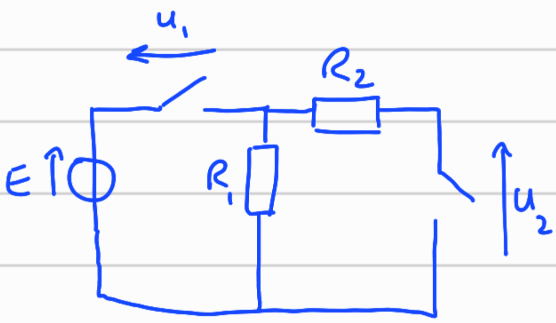
*



$i_L(\infty) = \frac{E}{R}$

$u_c(\infty) = 0$

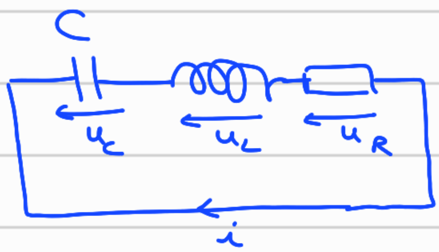
*



$u_1(\infty) = E$

$u_2(\infty) = 0$

Exercice 2 :



Q1. $u_c + u_L + u_R = 0$

avec $u_L = L\frac{di}{dt}$ et $i = C\frac{du_c}{dt}$ $\Rightarrow u_L = LC\frac{d^2u_c}{dt}$

et $u_R = Ri = RC\frac{du_c}{dt}$

$$\Rightarrow \quad u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = 0$$

Q2. En régime critique $Q = \frac{1}{2}$, avec $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$

et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{L\omega_0}{Q} = \frac{L}{Q}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

AN : $R = \frac{1}{1/2}\sqrt{\frac{25.10^{-3}}{10.10^{-6}}} = 100\,\Omega$

En régime critique le déterminant de l'équation caractéristique est nul et il y a 1 racine double $r = -\omega_0$

$$u_c(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

Conditions initiales : $u_c(0^+) = U_0$

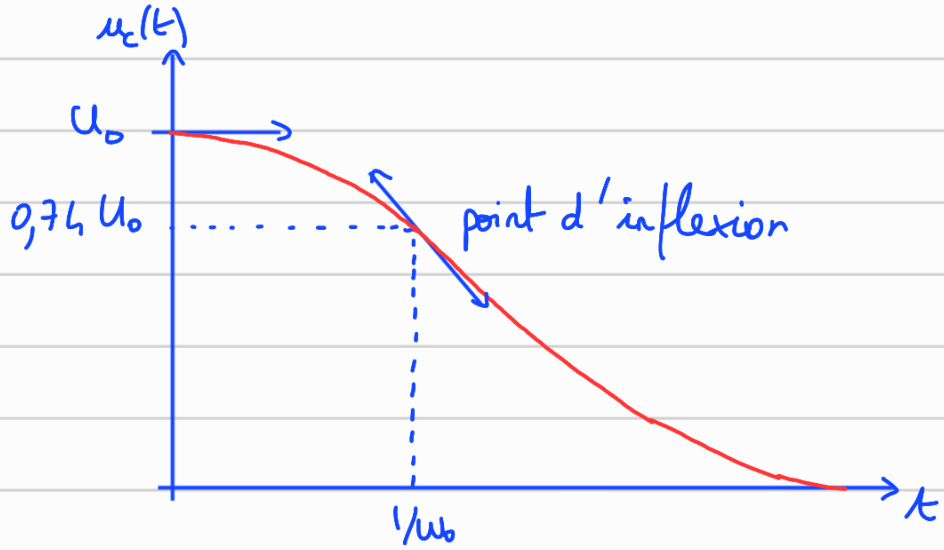
et $\left.\frac{du_c}{dt}\right|_{0^+} = \frac{i(0^+)}{C} = 0$ car le courant est une fonction continue à cause de la bobine présente dans le circuit.

on a donc $\begin{cases} U_0 = (A.0 + B).e^0 \\ 0 = Ae^0 + (A.0 + B)(-\omega_0)e^0 \end{cases}$

$$\begin{cases} B = U_0 \\ 0 = A - B\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \quad A = U_0\omega_0 .$$

$$\boxed{u_c(t) = \left(U_0\omega_0 . t + U_0\right) e^{-\omega_0 t}}$$

L'allure de la courbe est :



pour $t = \frac{1}{\omega_0}$ $\qquad u_c(t) = 2U_0 e^{-1} = 0,74\,U_0$

$$\frac{du_c}{dt} = (U_0\omega_0)e^{-\omega_0 t} - (U_0\omega_0 t + U_0)\omega_0 e^{-\omega_0 t} = -U_0\omega_0^2 t\, e^{-\omega_0 t}$$

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} = -U_0\omega_0\left(e^{-\omega_0 t} - t\omega_0 e^{-\omega_0 t}\right) = U_0\omega_0 e^{-\omega_0 t}(t\omega_0 - 1)$$

à $t = \frac{1}{\omega_0}$: $\left.\frac{d^2u_c}{dt^2}\right|_{t=1/\omega_0} = U_0\omega_0 e^{-1}(1-1) = 0$ $\Rightarrow$ point d'inflexion à $t = 1/\omega_0$

Q3. $i(t) = C\dfrac{du_C}{dt} = -C U_0 \omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$

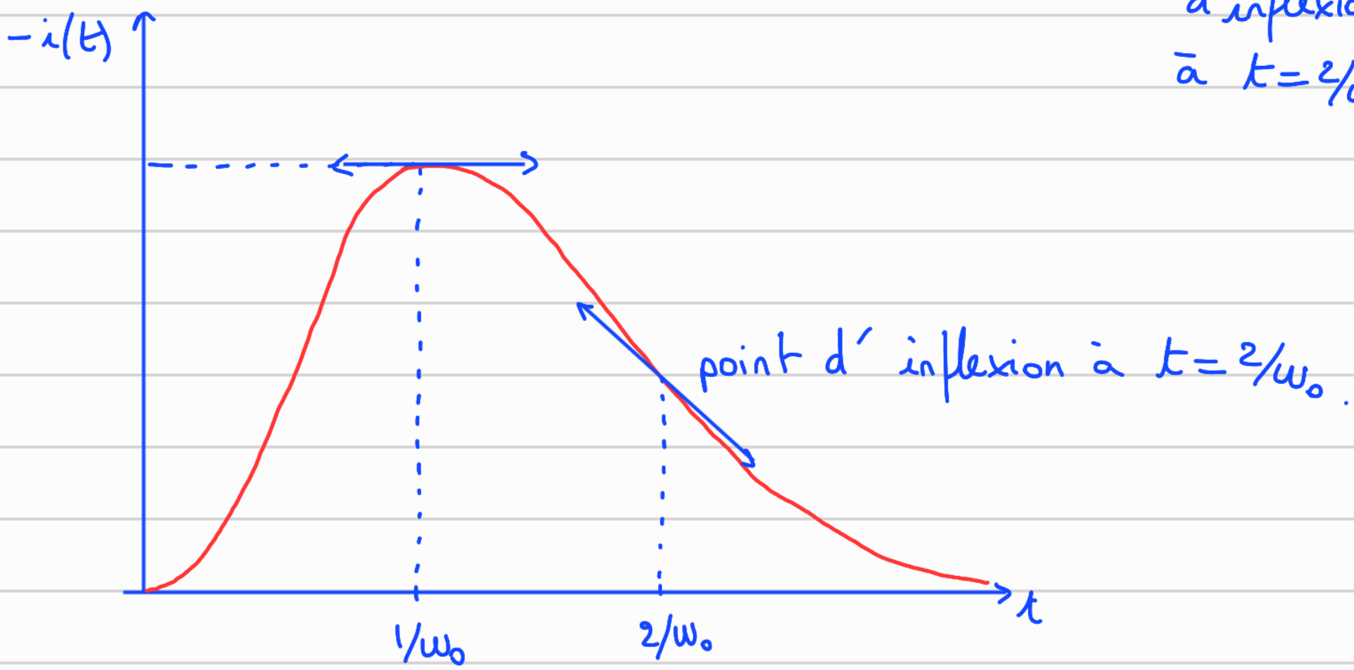
or $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ $\Rightarrow$ $\boxed{i(t) = -\dfrac{U_0}{L} t e^{-\omega_0 t}}$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{L}\left(e^{-\omega_0 t} - t\omega_0 e^{-\omega_0 t}\right) = \frac{U_0}{L} e^{-\omega_0 t}(t\omega_0 - 1)$$

$$\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow t = 1/\omega_0 .$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\omega_0 \frac{U_0}{L} e^{-\omega_0 t}(t\omega_0 - 1) + \omega_0 \frac{U_0}{L} e^{-\omega_0 t} = 2\omega_0 \frac{U_0}{L} e^{-\omega_0 t} - t\omega_0^2 \frac{U_0}{L} e^{-\omega_0 t}$$

$\dfrac{d^2 i}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow 2e^{-\omega_0 t} - t\omega_0 e^{-\omega_0 t} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{\omega_0}$ $\Rightarrow$ point d'inflexion à $t = 2/\omega_0$



$$i\left(\frac{1}{\omega_0}\right) = -\frac{U_0}{L}\cdot\frac{1}{\omega_0} e^{-1} = -\frac{U_0}{L}\sqrt{LC}\, e^{-1} = -U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\, e^{-1}$$

Q4. L'énergie dissipée dans la résistance est $\frac{1}{2} C U_0^2$ (toute l'énergie emmagasinée à l'état initial dans le condensateur).

Exercice 3 :

Q1. $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

Et pour un circuit RLC série $\Delta = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right) < 0$

$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}$

et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R'} = \frac{1}{R'}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\frac{4}{R'^2} \cdot \frac{L}{C}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R'^2 C}{4L}}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{R'^2 C}{4L}\right) \iff \frac{4\pi^2 . LC}{T^2} = 1 - \frac{R'^2 C}{4L}$$

$$\frac{R'^2 C}{4L} = 1 - \frac{4\pi^2 LC}{T^2}$$

$$R'^2 = \frac{4L}{C}\left(1 - \frac{4\pi^2 LC}{T^2}\right)$$

$$\boxed{R' = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \frac{4\pi^2 LC}{T^2}}}$$

AN: $R' = 2\sqrt{\frac{25.10^{-3}}{10.10^{-6}}}\sqrt{1 - \frac{4\pi^2 . 25.10^{-3} . 10^{-5}}{(5.10^{-3})^2}}$

$$R' = 100\sqrt{1 - \frac{4\pi^2 . 25.10^{-8}}{25.10^{-6}}} = 100\sqrt{1 - 4\pi^2 10^{-2}}$$

$\underline{R' = 78\,\Omega}$

Q2. $u_c(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$

avec $r_{1,2}(t) = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \underbrace{\omega_0\sqrt{1-1/4Q^2}}_{=\Omega}$

Avec les conditions initiales $u_c(0^+) = U_0$ et $\left.\frac{du_c}{dt}\right|_{0^+} = 0$

on a : $U_0 = e^0(A. + B.0) \Rightarrow A = U_0.$

et $\frac{du_c}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right)$

$+ e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\left(-A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t\right)$

à $t = 0^+$ $\left.\frac{du_c}{dt}\right|_{t=0^+} = -\frac{\omega_0}{2Q}.A + B\Omega = 0$

$\Rightarrow B = \frac{1}{\Omega}.\frac{\omega_0}{2Q}U_0 = \frac{1}{2\Omega}\frac{R'}{L}U_0$

$u_c(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(U_0\cos\Omega t + \frac{R'U_0}{2\Omega L}\sin\Omega t\right)$

Numériquement :

$\frac{\omega_0}{2Q} = \frac{1/\sqrt{LC}}{\frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{2L}$ AN : $\frac{\omega_0}{2Q} = \frac{77,8}{2.25.10^{-3}} = 1556\ s^{-1}$

$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{77,8}.\sqrt{\frac{0,025}{10^{-5}}} = 0,64 > 1/2$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,025.10^{-5}}} = 2000\ rad.s^{-1}$

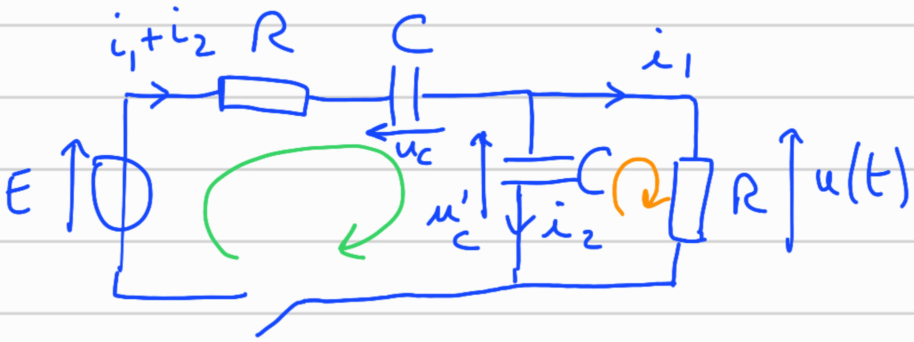
$$\Omega = 2000\sqrt{1-\frac{1}{4.0,64^2}} = 1248 \text{ rad.s}^{-1}$$ (1257 avec la valeur exacte de Q)

$$\frac{R'U_0}{2\Omega L} = \frac{77,8.6}{2.1248.25.10^{-3}} = 7,48$$

$$\boxed{u_c(t) = e^{-1556t}\left(6\cos(1248t) + 7,48\sin(1248t)\right)}$$

Exercice 4 :

Q1.



* loi des mailles : maille verte pour $t>0$:
$E - R(i_1+i_2) - u_c - u'_c = 0$ (1)

* loi des mailles : maille orange pour $t>0$:
$u'_c - u = 0$ (2)

* loi d'Ohm : $i_1 = \frac{u}{R}$ (3)

* loi intensité-tension : $i_2 = C\frac{du'_c}{dt} = C\frac{du}{dt}$ (4)

$i_1 + i_2 = C\frac{du_c}{dt}$ (5)

On injecte (2) ; (3) ; (4) dans (1) :

$$E - R\left(\frac{u}{R} + C\frac{du}{dt}\right) - u_c - u = 0$$

On dérive pour faire disparaître u_c :

$$0 - \frac{du}{dt} - RC\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{(i_1 + i_2)}{C} - \frac{du}{dt} = 0$$

On réinjecte (3) et (4) :

$$RC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{u}{RC} + 3\frac{du}{dt} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}u = 0}$$

Q2. Conditions initiales :

* $u(0^+) = 0$ car le condensateur qui est en parallèle est initialement déchargé et la tension à ses bornes est continue.
* $\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{C}\left(i_1(0^+) + i_2(0^+)\right)$

Or $i_1(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = 0$

et $i_2(0^+) = \frac{E}{R}$ (Loi des mailles à $t = 0^+$:

$$E = u_c'(0^+) + u_c(0^+) + R\left(i_1(0^+) + i_2(0^+)\right)$$

$$E = 0 + 0 + R\left(0 + i_2(0^+)\right) \Rightarrow i_2(0^+) = \frac{E}{R}$$

Donc $\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{E}{RC}$

Q3. $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}u = 0$

Polynôme caractéristique : $r^2 + \left(\frac{3}{RC}\right)r + \left(\frac{1}{RC}\right)^2 = 0$

Discriminant : $\Delta = \left(\frac{3}{RC}\right)^2 - \left(\frac{2}{RC}\right)^2 = \frac{9-4}{(RC)^2} = \frac{5}{(RC)^2}$

$\Delta > 0$ donc 2 racines réelles :

$$r_1 = \frac{-3}{2RC} - \frac{\sqrt{5}}{2RC} = \frac{-3-\sqrt{5}}{2RC}$$

$$r_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2RC}$$

Donc $u(t) = A e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2RC}t} + B e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2RC}t}$

On utilise les conditions initiales pour déterminer A et B :

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ \frac{E}{RC} = -A\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2RC}\right)e^0 + B\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2RC}\right)e^0 \end{cases}$$

$$B = -A$$

$$\frac{E}{RC} = B\left(\frac{3+\sqrt{5}-3+\sqrt{5}}{2RC}\right) = B\,\frac{\sqrt{5}}{RC}$$

$$\boxed{B = \frac{E}{\sqrt{5}}} \quad \text{et} \quad \boxed{A = -\frac{E}{\sqrt{5}}}$$

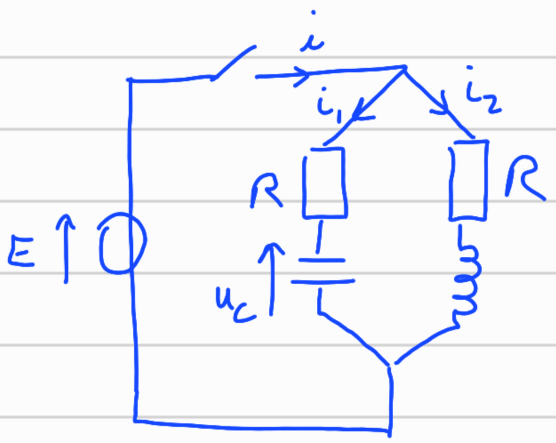
$$\boxed{u(t) = -\frac{E}{\sqrt{5}}\,e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2RC}t} + \frac{E}{\sqrt{5}}\,e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2RC}t}}$$

(que l'on peut écrire : $u(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}\,e^{\frac{-3t}{2RC}}\underbrace{\left(e^{\frac{\sqrt{5}}{2RC}t} - e^{-\frac{\sqrt{5}}{2RC}t}\right)}_{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC}t\right)}$

$$\Rightarrow u(t) = \frac{2E}{\sqrt{5}}\,e^{\frac{-3t}{2RC}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC}t\right)$$

Exercice 5 :

Q1.



2 lois des mailles :

* $E = u_c + Ri_1 \Leftrightarrow 0 = \frac{du_c}{dt} + R\frac{di_1}{dt}$

$C\frac{du_c}{dt} + RC\frac{di_1}{dt} = 0$

$\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{RC} i_1 = 0 \Rightarrow i_1(t) = Ae^{-t/\tau}$

avec $\tau = RC$

Conditions initiales : $i_1(0^+) = \frac{E}{R}$ car $u_c(0^+) = 0$

(continuité de la tension aux bornes du condensateur, initialement déchargé.

$\Rightarrow i_1(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$, d'où on tire $u_c(t) = -\frac{\tau E}{RC} e^{-t/\tau} + cte$

avec $u_c(0) = 0 \Leftrightarrow cte = E \Rightarrow u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

* $E = Ri_2 + u_L \Leftrightarrow E = Ri_2 + L\frac{di_2}{dt}$

$\frac{di_2}{dt} + \frac{R}{L} i_2 = \frac{E}{L}$

$i_{2,H} = Be^{-t/\tau'}$ (avec $\tau' = \frac{L}{R}$) et $i_{2,P} = \frac{E}{R}$

Conditions initiales : $i_2(0^+) = 0$ (continuité du courant traversant la bobine.

$$i_2(t) = \frac{E}{R} + Be^{-t/\tau}$$

$$i_2(0^+) = \frac{E}{R} + B = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{E}{R}$$

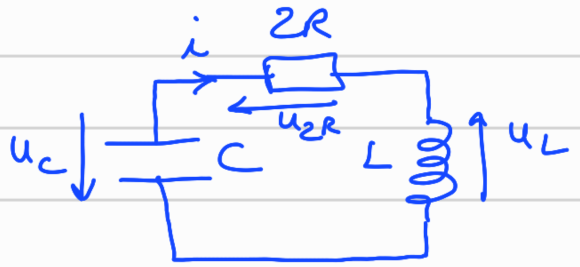
$$i_2(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau'}\right)$$

* Loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$

Soit $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/RC} + \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

Or $RC = \frac{L}{R} \Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R} = cte}$

Q2. Une fois le régime permanent établi K est ouvert, on a le circuit



Loi des mailles : $u_C + u_{2R} + u_L = 0$

avec $u_C = \frac{q}{C} \Rightarrow q = Cu_C$

$$u_R = 2Ri = 2R\frac{dq}{dt} = 2RC\frac{du_C}{dt}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2} = LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$u_c + 2RC\frac{du_c}{dt} + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$$

Forme canonique : $\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{2R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0$

Polynôme caractéristique : $r^2 + \frac{2R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0$

$\Delta = \left(\frac{2R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}$ avec $RC = \frac{L}{R} \Rightarrow R^2 = \frac{L}{C}$

d'où $\frac{4L}{L^2C} - \frac{4}{LC} = 0$

1 racine double : $r = -\frac{2R}{2L} = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$

$$u_c = (At+B)e^{-t/\tau}$$

Conditions initiales : à $t=0$ $u_c(0^+) = E$

Et $\frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C}$ soit $\left.\frac{du_c}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{i(0^+)}{C}$

or $i(0^+)$ = courant permanent $-i_2 = -\frac{E}{R}$

$$\left.\frac{du_c}{dt}\right|_{t=0^+} = -\frac{E}{RC}$$

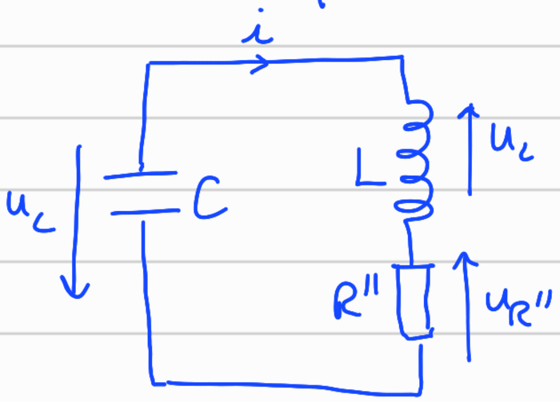
$$\begin{cases} E = (A.0 + B)e^{0} = B \\ -\dfrac{E}{RC} = Ae^{0} + (A.0+B).\left(-\dfrac{1}{\tau}\right)e^{0} = A - \dfrac{B}{\tau} \end{cases}$$

$B = E$ et $A = -\dfrac{E}{RC} + \dfrac{B}{\tau} = -\dfrac{E}{RC} + \dfrac{E}{RC} = 0$

$$\boxed{u_c(t) = E e^{-t/\tau}}$$

Exercice 6 :

le schéma électrique du circuit est :



$C = 10\,\mu F$
$L = 25\,mH$.

Equation différentielle qui régit l'évolution $u_{R''}$:

* Loi des mailles : $u_{R''} + u_L + u_C = 0$

* Lois intensités-tension : $u_L = L\dfrac{di}{dt} \Rightarrow u_L = \dfrac{L}{R''}\dfrac{du_{R''}}{dt}$

$$\left.\begin{array}{l} i = C\dfrac{du_C}{dt} \\ u_{R''} = R'' i \end{array}\right\} \dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{u_{R''}}{R''C}$$

On dérive toute la ligne : $\frac{du_{R''}}{dt} + \frac{du_C}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$

$$\frac{du_{R''}}{dt} + \frac{L}{R''}\frac{d^2u_{R''}}{dt^2} + \frac{u_{R''}}{R''C} = 0$$

Sous forme canonique : $\frac{d^2u_{R''}}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_{R''}}{dt} + \frac{1}{LC}u_{R''} = 0$

Equation caractéristique $r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0$

$\Delta = (R/L)^2 - 4/LC$

Régime apériodique donc $\Delta > 0$.

$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} > 0 \quad \Rightarrow$ 2 racines positives

$$r_{1,2} = -\frac{R''}{2L} \pm \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$u_{R''}(t) = Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$$

avec $-\frac{1}{\tau_1} = r_1 = -\frac{R''}{2L} - \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$

$-\frac{1}{\tau_2} = r_2 = -\frac{R''}{2L} + \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$

-

* Détermination des constantes avec les conditions initiales :

$$u_{R''}(0^+) = R'' i(0^+) = 0 \quad \text{car} \quad i(0^+) = i(0^-) = 0$$

par continuité de l'intensité du courant dans la bobine.

$$\left.\frac{du_R''}{dt}\right|_{t=0^+} = R''\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{R''}{L} u_L(0^+)$$

Or à $t = 0^+$ $\quad u_R''(0^+) + u_L(0^+) + u_C(0^+) = 0$

$$0 + u_L(0^+) + U_0 = 0$$

(par continuité de la tension aux bornes du condensateur)

d'où $\quad u_L(0^+) = -U_0 \quad$ et $\quad \left.\dfrac{du_R''}{dt}\right|_{t=0^+} = -\dfrac{R''}{L} U_0$

On a donc le système :

$$\begin{cases} 0 = A e^0 + B e^0 \\ -\dfrac{R'' U_0}{L} = -\dfrac{A}{\tau_1} e^0 - \dfrac{B}{\tau_2} e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ -\dfrac{R'' U_0}{L} = -\dfrac{A}{\tau_1} - \dfrac{B}{\tau_2} \end{cases}$$

$$-\frac{R''}{L} U_0 = -\frac{A}{\tau_1} + \frac{A}{\tau_2} = -A\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)$$

$$A = -\frac{R''U_0}{L}\frac{1}{\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}} \quad \text{et} \quad B = \frac{R''U_0}{L}\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)$$

$$\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2} = r_2 - r_1$$

$$A = -\frac{R''U_0}{L(r_2-r_1)} \quad \text{et} \quad B = \frac{R''U_0}{L(r_2-r_1)}$$

$$u_{R''}(t) = -\frac{R''U_0}{L(r_2-r_1)}e^{r_1 t} + \frac{R''U_0}{L(r_2-r_1)}e^{r_2 t}$$

$$\boxed{u_{R''}(t) = \frac{R''U_0}{L(r_2-r_1)}\left(e^{r_2 t} - e^{r_1 t}\right)}$$

$u_{R''}$ est maximale lorsque $\frac{du_{R''}}{dt} = 0$

$$\frac{du_{R''}}{dt} = \frac{R''U_0}{L(r_2-r_1)}\left(r_2 e^{r_2 t} - r_1 e^{r_1 t}\right)$$

$$\left.\frac{du_{R''}}{dt}\right|_{t=t_0} = 0 \iff r_2 e^{r_2 t_0} = r_1 e^{r_1 t_0}$$

on pose $r_1 = -\lambda + \omega$ et $r_2 = -\lambda - \omega$

$$-(\lambda+\omega)e^{-\lambda t_0}e^{-\omega t_0} = (-\lambda+\omega)e^{-\lambda t_0}e^{\omega t_0}$$

$$-(\lambda+\omega)e^{-\omega t_0} = (-\lambda+\omega)e^{\omega t_0}$$

$$\lambda\underbrace{\left(e^{\omega t_0} - e^{-\omega t_0}\right)}_{=2sh(\omega t_0)} = \omega\underbrace{\left(e^{\omega t_0} + e^{-\omega t_0}\right)}_{2ch(\omega t_0)}$$

$$\frac{\omega}{\lambda} = th(\omega t_0)$$

Or on a $\lambda = \frac{R''}{2L}$ et $\omega = \sqrt{\frac{R''^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$

soit $\omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$\Rightarrow \omega^2 = \lambda^2 - \omega_0^2 \Rightarrow \lambda = \sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}$$

$$= \omega\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

et $\frac{\omega}{\lambda} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$

L'équation à résoudre est donc

$$H_h(\omega t_0) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

Graphiquement on lit $t_0 = 0{,}36\,ms$

Et $\omega_0^2 = \frac{1}{25.10^{-3}} \times \frac{1}{10.10^{-6}} = 4.10^6\, rad^2.s^{-2}$

$\Rightarrow \omega_0 = 2.10^3\, rad.s^{-1}$

$$H_h(0{,}36.10^{-3}\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4.10^6}{\omega^2}}}$$

On trace les 2 courbes d'équation

$Y_1 = H_h(0{,}36.10^{-3} X)$

et $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4.10^6}{X^2}}}$

et on cherche leur intersection :

$X = 4\,027\, rad.s^{-1}$

Soit $\omega = \underline{4027\ rad.s^{-1}}$

Et $\boxed{\lambda = \omega\sqrt{1+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

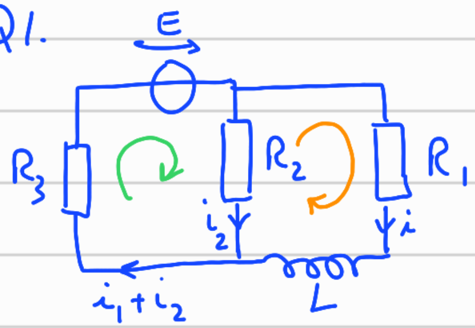
AN : $\lambda = 4027\sqrt{1+\left(\frac{2000}{4027}\right)^2} = 4496\ \Omega.H^{-1}$

Or $\lambda = \frac{R''}{2L} \Rightarrow \boxed{R'' = 2L.\lambda}$

AN : $R'' = 2.25.10^{-3}.4496 = \underline{225\ \Omega}$

Exercice 7 :

Q1.



* D'après la loi des nœuds le courant traversan
R_3 est $i + i_2$ (1)

* Loi des mailles pour la maille verte :
$E - R_2 i_2 - R_3(i+i_2) = 0$ (2)

* Loi des mailles pour la maille orange :

$-R_1 i - L\frac{di}{dt} + R_2 i_2 = 0$

D'après (2) : $i_2 \left(R_3+R_2\right) = E - R_3 i$

$$i_2 = \frac{E-R_3 i}{R_2+R_3}$$

On reporte dans (3) : $-R_1 i - L\dfrac{di}{dt} + R_2 \dfrac{E-R_3 i}{R_2+R_3} = 0$

$$\frac{di}{dt} + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{R_3R_2}{L(R_2+R_3)}\right) i = \frac{R_2E}{(R_2+R_3)L}$$

$$\frac{di}{dt} + \left(\frac{R_1\left(R_2+R_3\right)+R_3R_2}{L(R_2+R_3)}\right) i = \frac{R_2}{R_2+R_3}\,\frac{E}{L}$$

$$\frac{di}{dt} + \left(\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{L(R_2+R_3)}\right) i = \frac{R_2}{R_2+R_3}\,\frac{E}{L}$$

On identifie la constante de temps du circuit :

$$\tau = \frac{L(R_2+R_3)}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}$$

* Solution particulière en régime permanent :

$$i_p = \frac{ER_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

* Solution de l'équation homogène : $i_H = Ae^{-t/\tau}$

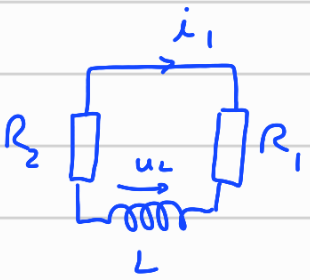
* Solution complète : $i(t) = \dfrac{ER_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} + Ae^{-t/\tau}$

* Conditions initiales : $i(0^+) = 0$

$$0 = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} + A \Rightarrow A = \frac{-ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec } \tau = \frac{L(R_2+R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}}$$

Q2. Nouvelle origine des temps : à $t = 0$ le courant dans la bobine vaut $i = \dfrac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$



Loi des mailles :

$$u_L + R_1 i + R_2 i = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + i(R_1 + R_2) = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_1+R_2}{L}\, i = 0 \qquad \text{on identifie } \tau = \frac{L}{R_1+R_2}$$

$$i(t) = Ae^{-t/\tau}$$

Avec $i(0) = \dfrac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$

Soit $0 = A = \dfrac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$

$$i(t) = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}\, e^{-t/\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R_1+R_2}$$

Initialement la bobine a l'énergie $E_L = \frac{1}{2} L\, i(0)^2$

$$E_L = \frac{1}{2} L \left(\frac{ER_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \right)^2$$

Cette énergie est entièrement dissipée dans les résistances (sous forme de chaleur).

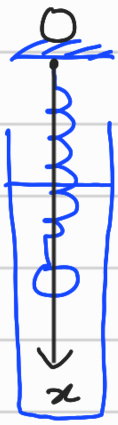
Rq: On pourrait calculer $\int_{t=0}^{\infty} (R_1+R_2) i^2 \, dt = (R_1+R_2) \frac{E^2R_2^2}{(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)^2} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^{\infty}$

$$= \frac{L}{R_1+R_2} \, \frac{R_1+R_2}{2} \, \frac{E^2R_2^2}{(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)^2}$$

$$= \frac{LE^2R_2^2}{2(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)^2}$$

$$= \frac{1}{2} L \left(\frac{ER_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \right)^2$$

Exercice 8 :



Q1. Système : bille de masse m.
Référentiel : terrestre supposé galiléen à l'échelle de l'expérience
Bilan des forces :

* poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u_x}$
* poussée d'Archimède $\vec{\Pi_A} = -\rho_e . V . \vec{g} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e \vec{g}$

$$= -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e g \vec{u_x}$$

* force de rappel élastique $\vec{F_{el}} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u_x}$
* force de frottement fluide $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$

$$= -6\pi\eta R\dot{x}\vec{u_x}$$

A l'équilibre $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ d'après la 1ère loi de Newton

$\vec{P} + \vec{\Pi_A} + \vec{F_{el}} + \vec{f} = \vec{0}$; et $\dot{x} = 0$ (masse immobile)

On projette sur l'axe (Ox), avec $\ell = \ell_e$ à l'équilibre :

$$mg - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e g - k(\ell_e - \ell_0) = 0$$

$$k(\ell_e - \ell_0) = mg - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e . g$$

$$\boxed{\ell_e = \frac{mg - 4/3\,\pi R^3 \rho_e . g}{k} + \ell_0}$$

Q2. On applique la 2ème loi de Newton au système {bille} dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi_A} + \vec{F_{el}} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Toutes les forces sont dirigées sur l'axe (Ox) donc on projette sur cet axe :

$$mg - \frac{4}{3}\pi \rho_e R^3 g - k(x - \ell_0) - 6\pi\eta R\dot{x} = m\ddot{x}$$

avec $\ell = x$ car l'origine du repère est située au point d'attache du ressort :

D'après Q1, on a : $mg - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e g = k(x_e - \ell_0)$

$$\Rightarrow k(x_e - \ell_0) - k(x - \ell_0) - 6\pi\eta R\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$-k(x - x_e) - 6\pi\eta R\dot{x} = m\ddot{x}$$

On met cette équation différentielle sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{6\pi\eta R}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}(x - x_e) = 0$$

On fait le changement de variable $X = x - x_e$

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{6\pi\eta R}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0}$$

Q3. On identifie les termes de l'équation différentielle avec la forme canonique :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{6\pi\eta R}{m} \quad \text{soit} \quad Q = \frac{m\omega_0}{6\pi\eta R} \qquad \text{et} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Soit $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{6\pi\eta R}}$

Q4. D'après l'enregistrement la masse est en régime pseudo-périodique (on observe des oscillation de x en fonction du temps)

$\Rightarrow Q > \frac{1}{2}$

L'équation différentielle est homogène, on détermine les racines de son polynôme caractéristique :

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - 1/4Q^2}$$

On pose $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/4Q^2}$

La solution générale de l'équation différentielle est :

$$X(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

La période des oscillations est $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-1/4Q^2}}$

Q5. On détermine A et B avec les conditions initiales par lecture graphique : $\begin{cases} x(0) = X_0 = 5\,cm \\ \dot{x}(0) = 0\ cm.s^{-1} \end{cases}$

$$x(0) = e^0(A+0) = X_0 \Rightarrow A = X_0 .$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) + e^{-t/\tau}\left(-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right)$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{A}{\tau} - B\Omega = 0 \Rightarrow B = -\frac{A}{\Omega\tau} = -\frac{X_0}{\Omega\tau}$$

$$\boxed{x(t) = X_0 e^{-t/\tau}\left(\cos(\Omega t) - \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)}$$

Q6. D'après l'expression fournie $\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}$ on a :

$$\delta = \frac{\omega_0}{2Q} \cdot \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-1/4Q^2}} = \frac{2\pi}{2Q\sqrt{1-1/4Q^2}}$$

$$\boxed{\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

<u>Remarque</u> : on peut établir l'expression de δ :

$$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)}$$

avec $x(t+T) = X_0 e^{-\frac{(t+T)}{\tau}}\left[\underbrace{\cos(\Omega(t+T))}_{=\cos(\Omega t)} - \frac{1}{\Omega\tau}\underbrace{\sin(\Omega(t+T))}_{=\sin(\Omega t)}\right]$

$$x(t+T) = X_0\, e^{-\frac{t+T}{\tau}}\left(\cos(\Omega t) - \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)$$

$$\delta = \ln\left(\frac{X_0\, e^{-t/\tau}\left(\cos(\Omega t) - 1/\Omega\tau\,\sin(\Omega t)\right)}{X_0\, e^{-\frac{t+T}{\tau}}\left(\cos(\Omega t) - 1/\Omega\tau\,\sin(\Omega t)\right)}\right)$$

$$\delta = \ln\left(e^{-t/\tau + \frac{t+T}{\tau}}\right) = \ln e^{T/\tau} = \frac{T}{\tau}$$

avec $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q}$ soit $\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}$

Q7. Graphiquement on détermine $x(t+T)$ et $x(t)$:

$$\left.\begin{array}{l} x(0+T) = 2{,}5\ \text{cm} \\ x(0) = 5\ \text{cm} \end{array}\right\} \delta = \ln\left(\frac{5}{2{,}5}\right) = \underline{0{,}69}$$

or $\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$ $\Rightarrow$ $\delta^2 \cdot (4Q^2 - 1) = 4\pi^2$

$$Q^2 = \left(\frac{4\pi^2}{\delta^2} + 1\right) \times \frac{1}{4}$$

soit $Q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{\delta^2} + 1}$

<u>AN</u>: $Q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{0{,}69^2} + 1} = \underline{4{,}6}$.

et on peut déterminer ω_0 avec la formule

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-1/4Q^2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-1/4Q^2}}$$

Graphiquement on lit $5T = 2{,}8\,s \Rightarrow T = 0{,}56\,s$.

AN: $$\omega_0 = \frac{2\pi}{0{,}56\sqrt{1-\frac{1}{4 \cdot 4{,}6^2}}} = 11{,}3 \text{ rad.s}^{-1}$$

Q8. On avait posé $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}}$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho} \quad \text{soit} \quad \rho = \frac{k}{\omega_0^2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}$$

AN: $$\rho = \frac{5{,}0}{11{,}3^2 \cdot \frac{4}{3}\pi (10^{-2})^3} = \underline{9{,}3 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}}$$

Remarque : c'est du même ordre de grandeur que la masse volumique des métaux :

aluminium : $\rho_{Al} = 2{,}7 \cdot 10^3$ kg.m^{-3}

fer : $7{,}8 \cdot 10^3$ kg.m^{-3}

plomb : $11{,}4 \cdot 10^3$ kg.m^{-3}.

Et $$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{6\pi\eta R}{m} \Rightarrow \eta = \frac{\omega_0 \cdot m}{6\pi R Q} = \frac{\omega_0 \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho}{6\pi R Q}$$

$$\eta = \frac{2\omega_0 R^2 \rho}{9Q}$$

AN: $$\eta = \frac{2 \cdot 11{,}3 \cdot (10^{-2})^2 \cdot 9{,}3 \cdot 10^3}{9 \cdot 4{,}6}$$

$$\underline{\eta = 0{,}51 \text{ kg.m}^{-1}\text{.s}^{-1} \text{ (ou Pa.s)}}$$

Remarque : On détermine l'unité de η par analyse dimensionnelle :

$$f = 6\pi\eta R v$$

$$M.L.T^{-2} = [\eta] L^2 T^{-1}$$

$$[\eta] = M L^{-1} T^{-1}$$

Remarque : ordre de grandeurs de viscosités :

$\eta_{air} \sim 10^{-5}$ Pa.s

$\eta_{eau} \sim 10^{-3}$ Pa.s

$\eta_{huile} \sim 10^{-1}$ Pa.s

$\eta_{miel} \sim 100$ Pa.s