Corrigé du TD n°7

Exercice 1

$$\vec{OM}(t)\begin{cases} x(t) = a_0 t^2 + x_0 \\ y(t) = -v_0 t \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

Q1. $\vec{v}(t)\begin{cases} \dot{x}(t) = 2a_0 t \\ \dot{y}(t) = -v_0 \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$ soit $\vec{v}(t) = 2a_0 t\, \vec{u_x} - v_0 \vec{u_y}$

$\vec{a}(t)\begin{cases} \ddot{x}(t) = 2a_0 \\ \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$ soit $\vec{a}(t) = 2a_0 \vec{u_z}$

Q2. $\|\vec{v}(t=2)\| = \sqrt{(2a_0 \times 2)^2 + (-v_0)^2} = \sqrt{v_0^2 + 16a_0^2}$

AN : $\|\vec{v}(t=2)\| = \sqrt{9 + 16.4} = \underline{8{,}5 \text{ m.s}^{-1}}$

Q3. $\|\vec{a}(t=1)\| = 2a_0$

AN $\|\vec{a}(t=2)\| = \underline{4 \text{ m.s}^{-2}}$

Exercice 2 :

$\vec{OM}(t) = r(t)\,\vec{u_r} + z\,\vec{u_z} = (a_0 t^2 + r_0)\,\vec{u_r} - v_0 t\,\vec{u_z}$

Q1. $\vec{v}(t) = 2a_0 t\,\vec{u_r} + (a_0 t^2 + r_0)\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} - v_0 \vec{u_z}$

or $\theta = \omega t + \theta_0$ donc $\dot{\theta} = \omega$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = 2a_0 t\,\vec{u_r} + (a_0 t^2 + r_0)\omega\,\vec{u_\theta} - v_0 \vec{u_z}}$$

Autre méthode : $v_r(t) = \dot{r} = 2a_0 t$

$v_\theta(t) = r\dot{\theta} = (a_0 t^2 + r_0).\omega$

$v_z(t) = \dot{z} = -v_0$

ce qui donne également $\vec{v}(t) = 2a_0 t\,\vec{u_r} + (a_0 t^2 + r_0)\omega\,\vec{u_\theta} - v_0 \vec{u_z}$

$\vec{a}(t) = 2a_0 \vec{u_r} + 2a_0 t.\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + (2a_0 t)\omega\,\vec{u_\theta} - (a_0 t^2 + r_0)\omega^2 u_r$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \left[2a_0 - \omega^2(a_0 t^2 + r_0)\right]\vec{u_r} + 4a_0 t\omega\,\vec{u_\theta}}$$

Q2. $\|\vec{v}(t= \ )\| = \sqrt{(2.1.1)^2 + (1.1^2+1)^2\omega^2 + 2^2}$

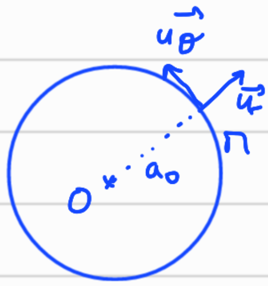
$= \underline{6{,}6 \text{ m.s}^{-1}}$

Q3. $\|\vec{a}(t=0)\| = \sqrt{\left(2.1 - 3^2(1.0^2+1)\right)^2 + 4.1.0.3}$

$= \underline{7 \text{ m.s}^{-2}}$

Exercice 3 :

Q1. L'électron est en mouvement circulaire uniforme.



$\vec{OM} = a_0 \vec{u_r}$

$\vec{v} = a_0 \dot{\theta} \vec{u_\theta} = a_0 \omega \vec{u_\theta}$

car la norme de la vitesse est constante $(\dot{\theta} = \omega)$

$v = a_0 \omega$ avec $\omega = 2\pi . f$

$$\boxed{v = 2\pi a_0 f}$$

AN : $v = 2\pi . 0{,}53.10^{-10} . 6{,}6.10^{2} = \underline{2{,}2.10^{6} \text{ m.s}^{-1}}$

Q2. $\vec{a} = -a_0 \omega^2 \vec{u_r}$

$$\boxed{\|\vec{a}\| = a_0 \omega^2}$$

$a = 0{,}53.10^{-10} \times (2\pi . 6{,}6.10^{15})^2 = \underline{9{,}1.10^{22} \text{ m.s}^{-2}}$

Exercice 4 :

Q1. Déterminons l'équation horaire de l'abscisse de la voiture et celle de la moto sur l'axe (Ox) selon lequel a lieu le mouvement des 2 véhicules.

On choisit l'origine O du repère au niveau de la position commune des véhicules à $t = 0$:

* la voiture est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_0. On a donc $x_v = v_0 t$.

* La moto est en mouvement rectiligne uniformément accéléré. Sa position est donc :

$$x_m = \frac{1}{2} a_m t^2 + \underbrace{v_{om}}_{=0} t + \underbrace{x_{m,0}}_{=0}$$

(le motard "démarre") d'après le choix de l'origine du repère.

A l'instant t_1 où la moto a rattrapé la voiture, on a $x_v = x_m$ soit $v_0 t_1 = \frac{1}{2} a_m t_1^2$

Résolution : $a_m t_1^2 - 2v_0 t_1 = 0$

$$t_1 (a_m t_1 - 2v_0) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $t_1 = 0$ (démarrage de la moto)

ou $\boxed{t_1 = \frac{2v_0}{a_m}}$

Or on sait que la moto a une vitesse de $v_2 = 90\,km/h$ au bout de $t_2 = 10s$ soit :

$v_2 = a_m t_2$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{a_m = \frac{v_2}{t_2}}$

$$\boxed{t_1 = \frac{2v_0 . t_2}{v_2}}$$

AN avec $v_0 = \frac{100.10^3}{3600} = 27{,}8\,m.s^{-1}$

$$v_2 = \frac{90.10^3}{3600} = 25{,}0\,m.s^{-1}$$

$$t_1 = \frac{2 . 27{,}8 . 10}{25} = \underline{22{,}24 \text{ s}}$$

Q2. le motard aura parcouru la même distance que la voiture : $x_m(t_1) = x_v(t_1) = v_0 t_1$

AN : $x_m = 22{,}4 \times 27{,}8 = \underline{618 \text{ m}}$

(ou $x_m = \frac{1}{2} a_m t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{v_2}{t_2} t_1^2$)

Q3. $v_m(t_1) = a_m t_1 = v_2 \frac{t_1}{t_2}$

<u>AN :</u> $v_m(t_1) = 25 \frac{22{,}24}{10} = \underline{55{,}6 \text{ m.s}^{-1}}$

(= 200 km/h)

Exercice 5 :

Q1. Entre D et E_1 le point M est en mouvement rectiligne uniformément accéléré.
On note x l'abscisse pdu oint M sur l'axe (DE_1)
On a donc : * $a_x = a_1$
* $v_x = a_1 . t + v_D$ avec $v_D = 0$ car le cycliste démarre en D avec une vitesse nulle
* $x(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 + x_D$ avec $x_D = 0$ car on fixe l'origine du repère en D.

Au point E_1, $x(E_1) = \frac{L}{2}$

Soit $\frac{L}{2} = \frac{1}{2} a_1 t_{E_1}^2 \Rightarrow \boxed{t_{E_1} = \sqrt{\frac{L}{a_1}}}$

Et $v_{E_1} = a_1 t_{E_1}$ soit $\boxed{v_{E_1} = \sqrt{a_1 L}}$

Q2. Dans le virage, le cycliste a un mouvement circulaire de centre C_1.

On a donc * $\overrightarrow{C_1 M} = R\vec{u}_r$

* $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

* $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$

Or son accélération tangentielle vaut a_1, soit

$R\ddot{\theta} = a_1$

$\dot{\theta}(t) = \frac{a_1}{R}t + A$ où A est une constante que l'on détermine avec les conditions initiales.

* On fixe une nouvelle origines des temps en E_1 telles que $\dot{\theta}(E_1) = \dot{\theta}_{E_1} = 0 + A$.

Or $R\dot{\theta}_{E_1} = v_{E_1} = \sqrt{a_1 L} \Rightarrow \dot{\theta}_{E_1} = \frac{\sqrt{a_1 L}}{R}$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{a_1}{R}t + \frac{\sqrt{a_1 L}}{R}$$

* On détermine la primitive : $\theta(t) = \frac{a_1}{2R}t^2 + \frac{\sqrt{a_1 L}}{R}t + B$

avec B une constante que l'on détermine avec les conditions en E_1 : $\theta(E_1) = \theta_{E_1} = 0$

Soit $B = 0$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{a_1}{2R}t^2 + \frac{\sqrt{a_1 L}}{R}t}$$

A la sortie du virage en S_1 $\theta(s_1) = \pi$ d'où

$$\pi = \frac{a_1}{2R}(t_1)^2 + \frac{\sqrt{a_1 L}}{R}t_1$$

On obtient l'équation du second degré :

$$t_1^2 + 2\sqrt{\frac{L}{a_1}}\,t_1 - \frac{2\pi R}{a_1} = 0$$

$$\Delta = 4\frac{L}{a_1} + \frac{8\pi R}{a_1} > 0 \quad \text{donc}$$

$$t_1 = \frac{-2\sqrt{L/a_1} + \sqrt{4L/a_1 + 8\pi R/a_1}}{2} = -\sqrt{\frac{L}{a_1}} + \sqrt{\frac{L+2\pi R}{a_1}}$$

Et $t_{S_1} = t_{E_1} + t_1$

$$t_{S_1} = \sqrt{\frac{L}{a_1}} - \sqrt{\frac{L}{a_1}} + \sqrt{\frac{L+2\pi R}{a_1}}$$

$$\boxed{t_{S_1} = \sqrt{\frac{L+2\pi R}{a_1}}}$$

Et $v_{S_1} = R\dot{\theta}(S_1)$

avec $\dot{\theta}(S_1) = \frac{a_1}{R}t_1 + \frac{\sqrt{a_1 L}}{R}$

Soit $v_{S_1} = a_1 t_1 + \sqrt{a_1 L} = a_1\left(\sqrt{\frac{L+2\pi R}{a_1}} - \sqrt{\frac{L}{a_1}}\right) + \sqrt{a_1 L}$

$$v_{S_1} = \sqrt{a_1(L+2\pi R)} - \sqrt{a_1 L} + \sqrt{a_1 L}$$

$$\boxed{v_{S_1} = \sqrt{a_1(L+2\pi R)}}$$

Q3. Pendant la ligne droite S_1E_1 le point Ω est en mouvement rectiligne uniformément accéléré :

* $a_x(t) = a_1$
* $v_x(t) = a_1 t + v(S_1)$ en fixant une nouvelle origine des temps à la sortie du 1er virage, où $v(S_1) = \sqrt{a_1(L+2\pi R)}$

* $x(t) = \dfrac{a_1 t^2}{2} + t\sqrt{a_1(L+2\pi R)}$ en notant x l'absisse par rapport à S_1 $(x(S_1)=0)$

En E_2 $x(E_2) = L$ soit $L = \dfrac{a_1}{2} t_2^2 + \sqrt{a_1(L+2\pi R)}\, t_2$

Il faut résoudre l'équation $t_2^2 + 2\sqrt{\dfrac{L+2\pi R}{a_1}}\, t_2 - \dfrac{2L}{a_1} = 0$

$$\Delta = 4\left(\frac{L+2\pi R}{a_1}\right) + \frac{8L}{a_1} = \frac{12L+8\pi R}{a_1}$$

$$t_2 = -\sqrt{\frac{L+2\pi R}{a_1}} + \sqrt{\frac{3L+2\pi R}{a_1}}$$

Et $t_{E_2} = t_{S_1} + t_2$

$$t_{E_2} = \sqrt{\frac{L+2\pi R}{a_1}} - \sqrt{\frac{L+2\pi R}{a_1}} + \sqrt{\frac{3L+2\pi R}{a_1}}$$

$$\boxed{t_{E_2} = \sqrt{\frac{3L+2\pi R}{a_1}}}$$

$$v(E_2) = a_1 t_2 + \sqrt{a_1(L+2\pi R)}$$

$$= -\sqrt{L(+2\pi R)a_1} + \sqrt{a_1(3L+2\pi R)} + \sqrt{a_1(L+2\pi R)}$$

$$\boxed{v(E_1) = \sqrt{a_1(3L+2\pi R)}}$$

Pendant le 2ème virage (de ϵ_2 à S_2) le raisonnement est le même, avec une condition initiale différente pour déterminer la constante dans l'expression $\theta(t)$.

$R\ddot{\theta}(t) = a_1$

$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = \frac{a_1}{R}t + C$ on détermine la constante C avec

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}(\epsilon_1) = \frac{v(\epsilon_1)}{R} = \frac{\sqrt{a_1(3L+2\pi R)}}{R}$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{a_1}{R}t + \frac{\sqrt{a_1(3L+2\pi R)}}{R}$$

Et $\theta(t) = \frac{a_1}{2R}t^2 + \frac{\sqrt{a_1(3L+2\pi R)}}{R}t \qquad (\theta(\epsilon_2)=0)$

A la sortie du 2ème virage en S_2 : $\theta(S_2) = \pi$, ce qui permet de déterminer t_3 :

$$\pi = \frac{a_1}{2R}t_3^2 + \frac{\sqrt{a_1(3L+2\pi R)}}{R}t_3$$

Il faut résoudre l'équation $t_3^2 + 2\sqrt{\frac{3L+2\pi R}{a_1}}\,t_3 - \frac{2\pi R}{a_1} = 0$

$$\Delta = 4\left(\frac{3L+2\pi R}{a_1}\right) + \frac{8\pi R}{a_1} = 4\,\frac{3L+4\pi R}{a_1}$$

$$t_3 = -\sqrt{\frac{3L+2\pi R}{a_1}} + \sqrt{\frac{3L+4\pi R}{a_1}}$$

et $t_{S_2} = t_{E2} + t_3 = \sqrt{\frac{3L+2\pi R}{a_1}} - \sqrt{\frac{3L+2\pi R}{a_1}} + \sqrt{\frac{3L+4\pi R}{a_1}}$

$$\boxed{t_{S2} = \sqrt{\frac{3L+4\pi R}{a_1}}}$$

et $v_{S2} = R\dot{\theta}(S_2) = a_1 t_3 + \sqrt{3L+2\pi R}$

$$v_{S_2} = -\sqrt{a_1(3L+2\pi R)} + \sqrt{a_1(3L+4\pi R)} + \sqrt{3L+2\pi R}$$

$$\boxed{v_{S_2} = \sqrt{a_1(3L+4\pi R)}}$$

* Pendant la ligne droite S_2D le mouvement est à nouveau rectiligne uniforme :

* $a_x = a_1$

* $v_x(t) = a_1 t + v(S_2)$ avec $v(S_2) = \sqrt{a_1(3L+4\pi R)}$

* $x(t) = \frac{a_1}{2} t^2 + t\sqrt{a_1(3L+4\pi R)}$ (on pose $x(S_2)=0$)

En D $x(D) = \frac{L}{2}$ d'où $\frac{L}{2} = \frac{a_1}{2} t_4^2 + t_4\sqrt{a_1(3L+4\pi R)}$

On résout l'équation : $t_4^2 + \sqrt{\frac{4(3L+4\pi R)}{a_1}}\, t_4 - \frac{L}{a_1} = 0$

$$\Delta = \frac{4(3L+4\pi R)}{a_1} + \frac{4L}{a_1} = \frac{16L+16\pi R}{a_1} = 16\left(\frac{L+\pi R}{a_1}\right)$$

$$t_4 = -\sqrt{\frac{3L+4\pi R}{a_1}} + 2\sqrt{\frac{L+\pi R}{a_1}}$$

$$t_D = t_{S_2} + t_4 = \sqrt{\frac{3L+4\pi R}{a_1}} - \sqrt{\frac{3L+4\pi R}{a_1}} + 2\sqrt{\frac{L+\pi R}{a_1}}$$

$$\boxed{t_D = 2\sqrt{\frac{L+\pi R}{a_1}}}$$

et $v_D = a_1 t_4 + v(S_2) =$

$$= -\sqrt{a_1(3L+4\pi R)} + 2\sqrt{a_1(L+\pi R)} + \sqrt{a_1(3L+4\pi R)}$$

$$\boxed{v_D = 2\sqrt{a_1(L+\pi R)}}$$

Q4. $t_D = 2\sqrt{\dfrac{L+\pi R}{a_1}} \Leftrightarrow \dfrac{t_D}{4} = \dfrac{L+\pi R}{a_1}$ et $T_1 = t_D$

soit $\boxed{a_1 = \dfrac{4(L+\pi R)}{T_1^2}}$

AN : $a_1 = \dfrac{4(62+\pi . 20)}{18{,}155^2} = \underline{1{,}5 \ m.s^{-2}}$

$$v_D = 2\sqrt{a_1(L+\pi R)} = 2\sqrt{\frac{4(L+\pi R)}{T_1^2}(L+\pi R)} = 4\left(\frac{L+\pi R}{T_1}\right)$$

AN : $v_D = 4\left(\dfrac{62+\pi . 20}{18{,}155}\right) = \underline{28 \ m.s^{-1}}$

Soit $\underline{v_D = 99 \ km.h^{-1}}$

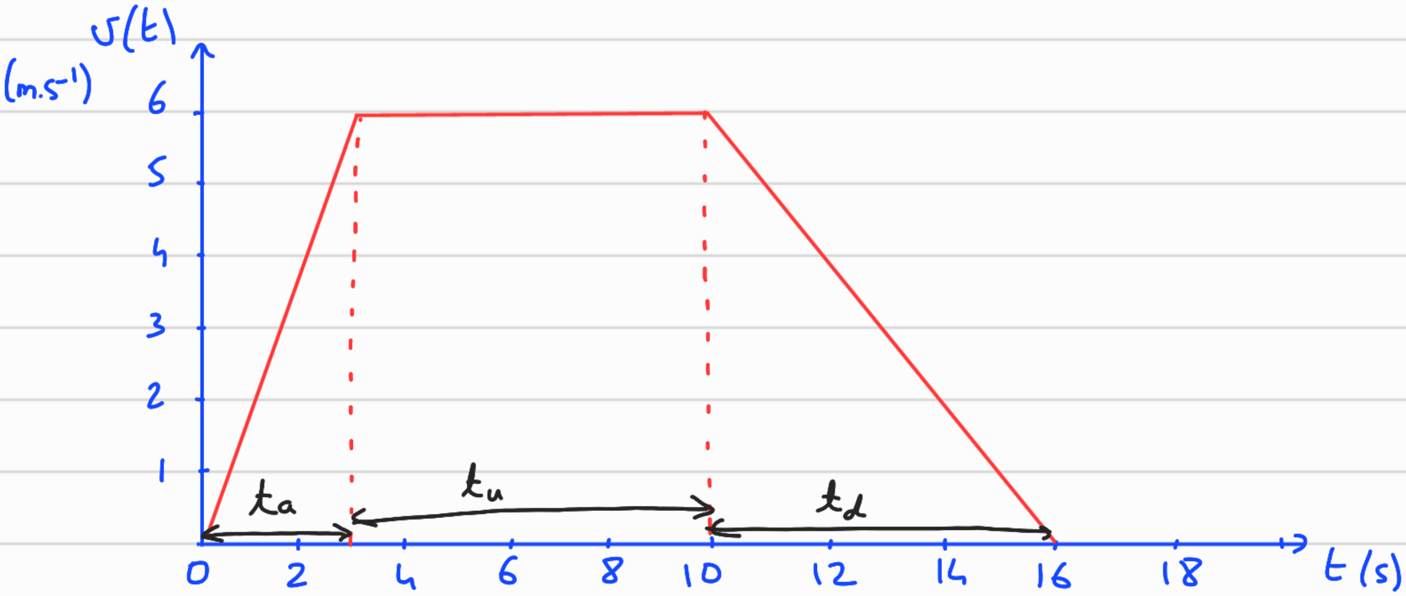
L'écart à la valeur mesurée ($60 \ km.h^{-1}$) est certainement liée au fait que l'accélération n'est pas constante (elle diminue au cours du temps).

Exercice 6 :

Q1. * De $t=0$ à $t=t_a=3s$ l'accélération est constante $a_a = 2{,}0 \ m.s^{-1}$ donc $v(t)$ croît linéairement :
$v(t) = 2{,}0 \ t$

* De $t = t_a$ à $t = t_a + t_u = 10 \ s$ le mouvement est uniforme donc v = constante $= 6{,}0 \ m.s^{-1}$.

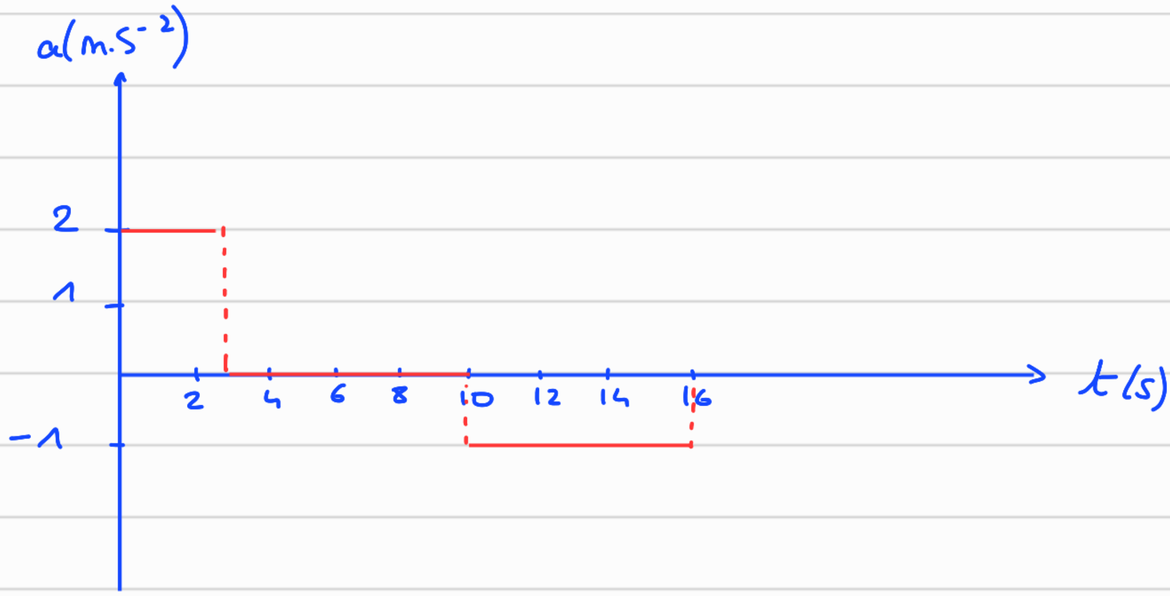
* De $t = t_a + t_u$ à $t = t_a + t_u + t_D = 10 + t_D$,
L'accélération est constante : $a = -a_d$, la vitesse décroît donc de façon affine :
$v(t) = -a_d t + v(10)$ (nouvelle origine des temps)
à $t = t_D$ $v(t_D) = 0$ soit $0 = -a_d t_D + 6$
$t_D = \frac{6}{a_d} = 6\,s$.



La distance totale parcourue correspond à l'aire sous la courbe $v(t)$ car $x(16) - x(0) = \int_0^{16} v(t)dt$

$$x(16) = \frac{3 \times 6}{2} + 7 \times 6 + \frac{6 \times 6}{2} = \underline{69\ m}.$$

Q2. L'accélération est constante pendant t_a, puis nulle pendant t_u, puis à nouveau constante pendant t_d.

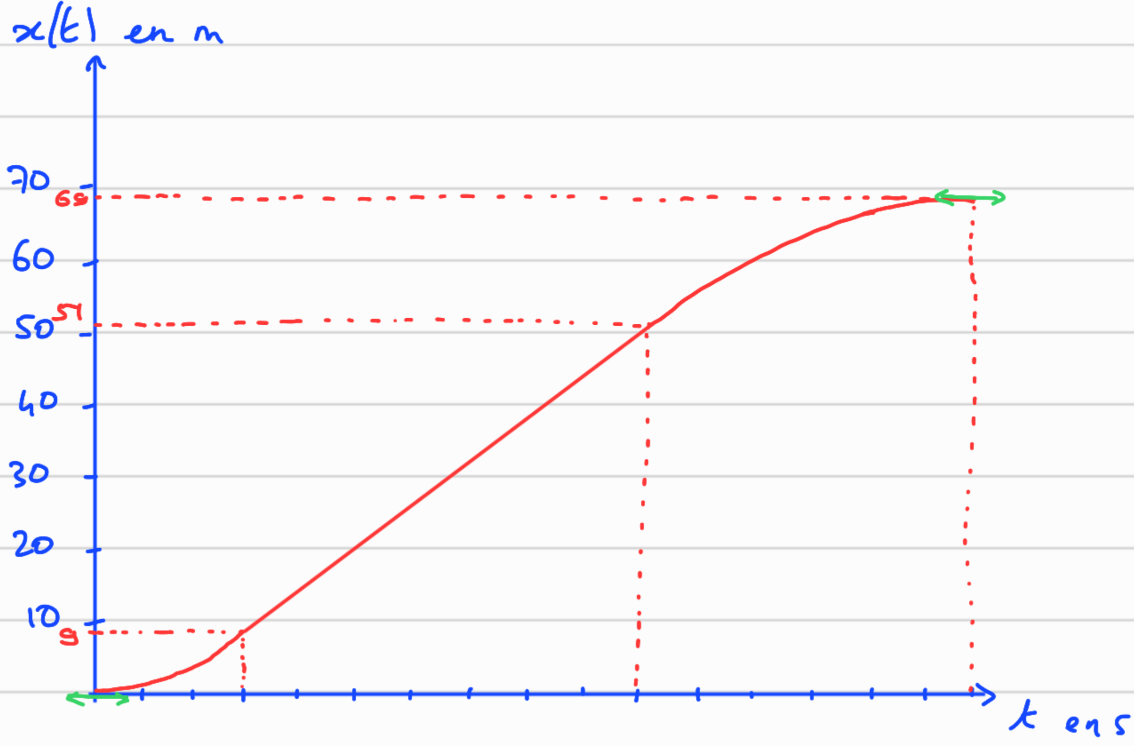


La vitesse en $t = 16s$ correspond à l'aire sous la courbe car $v(16)-v(0) = \int_0^{16} a(t)\,dt$

Soit $v(16) = 2 \times 3 - 6 \times 1 = 0 \ m.s^{-1}$.
(les aires au dessus et en dessous de la courbe sont égales).

Q3 . * Entre $t=0$ et $t = 3s$ $\frac{d^2x}{dt^2} = 2 = cte$ donc sur cet intervalle la courbe $x(t)$ est une portion de parabole tournée vers le haut

* Entre $t = 3s$ et $t = 10\ s$ $\frac{dx}{dt} = 6 m.s^{-1} = cte$ donc sur cet intervalle la courbe $x(t)$ est une portion de droite, de pente $6 m.s^{-1}$.
* Entre $t = 10s$ et $t = 16s$ $\frac{d^2x}{dt} = -1 = cte$ donc la courbe est une portion de parabole tournée vers le bas, telle que pour $t = 16s$ la tangente est horizontale (vitesse nulle).



Exercice 7.

Q1. $\vec{v}(M)_{/R} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$$\vec{a}(M)_{/R} = \ddot{r}\vec{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{u_r}$$
$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u_\theta}$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme
$r = cte = R$ donc $\dot{r} = 0$
et $\dot{\theta} = cte$ donc $\ddot{\theta} = 0$

On obtient : $\vec{v}(M)_{/R} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$$\vec{a}(M)_{/R} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r}$$

Q2. Le pilote supporte au maximum une accélération de $10g$ donc $\frac{v^2}{R} < 10g$.

Soit $R > \frac{v^2}{10g}$.

Pour $v = v_{max}$ on a $R > \left(\frac{2200.10^3}{3600}\right)^2 \cdot \frac{1}{10.9,8}$

$\underline{R > 3810 \text{ m}}$.

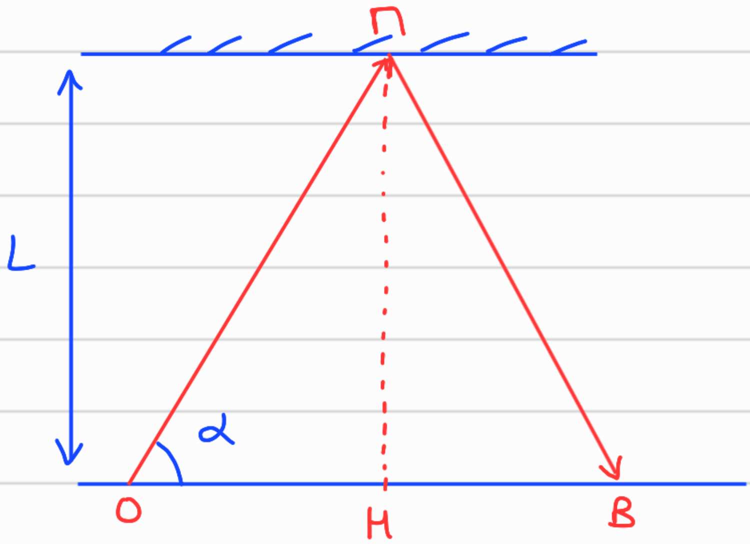
Q3. La durée pour effectuer un demi-tour à la vitesse maximale est $\Delta t = \frac{\pi R}{v_{max}}$

AN : $\Delta t = \frac{\pi . 3810}{2200.10^3} \times 3600 = \underline{20 \text{ s}}$

Exercice 8 :

Q1. La lumière parcourt la distance $2L$ à la vitesse c donc $\boxed{T' = \frac{2L}{c}}$.

Q2.a)



$OM = \frac{L}{\sin\alpha}$

et $\frac{L}{OH} = \tan\alpha$

La distance parcourue par la lumière est $\frac{2L}{\sin\alpha}$

$\boxed{T = \frac{2L}{c.\sin\alpha}}$

b) le train se déplaçant à la vitesse V, on a $OH = V.\frac{T}{2}$

Or on a aussi $OH = c.\cos\alpha \frac{T}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{V}{c}}$$

On a donc $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$

et $T = \frac{2L}{c} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

Q3. On obtient donc $\boxed{T = \gamma T'}$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

Remarques: * cette expression n'est définie que pour $v < c$

* $\gamma > 1$ La durée T' est inférieure à la durée T correspondante. Le temps s'écoule plus lentement dans le référentiel propre.