TD du chapitre 9

Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 Travail d'une force

Un homme, représenté par un point matériel M, tire un traîneau de bas en haut d'une colline dont la forme est assimilée à un demi-cercle de rayon R et de centre O. Il exerce une force de traction $\overrightarrow{T}$ constante en norme et faisant un angle α constant avec le sol.

Q1. Faire un schéma.

Q2. Déterminer le travail de la force $\overrightarrow{T}$ sur le trajet.

Q3. L'homme se déplace à vitesse constante $\overrightarrow{v}$. Déterminer la réaction du support $\overrightarrow{R_n}$ exercée sur le traîneau en fonction de m, g, θ (angle polaire repéré par rapport à l'horizontale), T, α, R et v.

Q4. La loi de Coulomb donne la norme de la force de frottement du traîneau sur le sol $\left\|\overrightarrow{F_f}\right\| = f \times \left\|\overrightarrow{F_n}\right\|$, f étant une constante. Déterminer le travail de la force de frottement.

Exercice n°2 Freinage

Q1. Déterminer l'expression de la distance de freinage d'une voiture lancée à la vitesse v_0 sur une route horizontale (cœfficient de frottement solide entre les pneus et la route noté μ, tel que $\left\|\overrightarrow{F_t}\right\| = \mu \times \left\|\overrightarrow{F_n}\right\|$.

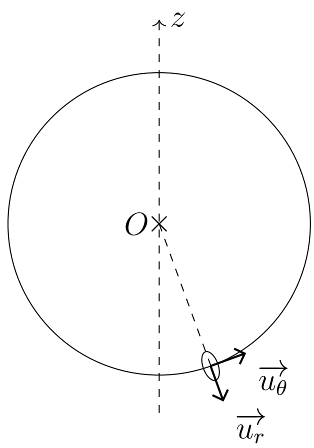
Q2. Faire l'application numérique pour $v_0 = 140\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $\mu = 0{,}6$ (route sèche).

Q3. Sur route mouillée, le cœfficient de frottement a une valeur différente. Sachant qu'une voiture lancée à $130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ met $500\,\mathrm{m}$ pour s'arrêter, déterminer sa distance de freinage si elle roule initialement à $110\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Q4. Le résultat de la question Q3. est-il modifié si la route fait un angle α avec l'horizontale ?

Exercice n°3 Oscillations d'un anneau dans un cerceau

Un anneau de masse m peut glisser sans frottement le long d'un cerceau de rayon R. Sa position est repérée par l'angle θ.



Q1. Quelles sont les forces exercées sur l'anneau ?

Q2. Montrer que le travail d'une des forces est nul.

Q3. Montrer que l'autre force dérive d'une énergie potentielle.

Q4. Écrire l'expression de l'énergie cinétique.

Q5. En déduire l'équation du mouvement.

Q6. Quelle est la période des petites oscillations ? (on pourra considérer que $\sin(x) \approx x$ si $x \ll 1$.

Exercices ★

Exercice n°4 Cycliste au tour de France

Un cycliste assimilé à un point matériel se déplace en ligne droite. Il fournit une puissance mécanique constante P, les forces de frottements de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse v du cycliste $\overrightarrow{F_f} = -kv\overrightarrow{v}$), k est une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la route et on choisit un axe horizontal Ox.

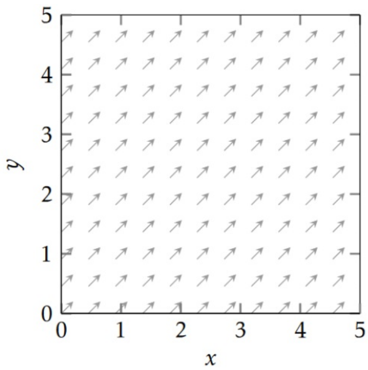
Q1. Établir une équation différentielle en v et montrer qu'on peut la mettre sous la forme :

$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = P - kv^3$$

Q2. On pose $f(x) = P - kv^3$. déduire des résultats précédents l'équation différentielle vérifiée par f.

Q3. Déterminer l'expression de la vitesse en fonction de x, s'il aborde la ligne droite avec une vitesse v_0.

Exercice n°5 Forces conservatives et non conservatives



On s'intéresse à différents champs de forces réalisés dans un plan. Les forces sont caractérisées par leurs composantes cartésiennes donnant la force en un point (x, y) du plan.
Pour chaque champ de force étudié on établira un schéma représentant qualitativement le vecteur $\overrightarrow{F}$ en fonction de la position du type de celui représenté ci-contre pour le champ de force $\overrightarrow{F_0} = F_0(\overrightarrow{e_x}+\overrightarrow{e_y})$.

Q1. On considère les champs de forces : $\begin{cases} \overrightarrow{F_1} = kx\overrightarrow{e_x} \\ \overrightarrow{F_2} = ky\overrightarrow{e_x} \end{cases}$ avec k = constante.

(a) Calculer le travail de $\overrightarrow{F_1}$ le long d'une courbe quelconque joignant deux points M_1 et M_2. Vérifier ainsi que $\overrightarrow{F_1}$ est conservative.

(b) Proposer une courbe fermée simple sur laquelle le travail de $\overrightarrow{F_2}$ n'est pas nul. En déduire que $\overrightarrow{F_2}$ n'est pas conservative.

Q2. Le champ de force $\overrightarrow{F_3}$ est défini par : $\overrightarrow{F_3} = -k(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y})$.

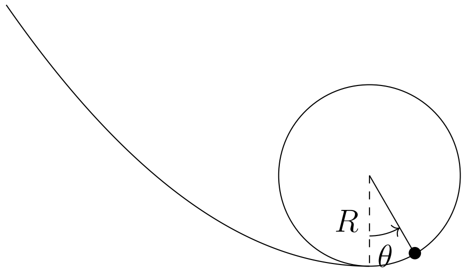
(a) Montrer que $\overrightarrow{F_3}$ est conservative.

(b) Proposer une fonction une fonction $E_{\text{pot}}(x, y)$ telle que $\overrightarrow{F_3} = -\left(\frac{\partial E_{\text{pot}}(x,y)}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial E_{\text{pot}}(x,y)}{\partial y}\overrightarrow{e_y}\right)$, où $\frac{\partial E_{\text{pot}}(x,y)}{\partial x}$ désigne la fonction obtenue en dérivant $E_{\text{pot}}(x, y)$ par rapport à x, en considérant y constant.

(c) Exprimer E_{pot} en coordonnées polaires. Que retrouve-t-on ?

Exercice n°6 Looping

Le nouveau jeu pour petites voitures de la petite Louise contient une descente permettant aux voitures de prendre de l'élan avant d'aborder un looping de rayon $R = 30\,\text{cm}$. La petite voiture est assimilée à un point matériel de masse $m = 30\,\text{g}$ qui glisse sans frottement sur la piste.



Q1. Établir l'expression de la vitesse v_0 atteinte par la petite voiture en bas de descente en fonction de la hauteur h à laquelle la petite Louise laisse la voiture (sans vitesse initiale).

Q2. En utilisant une loi énergétique, montrer que $\dot{\theta}^2 = \dfrac{v_0^2}{R^2} + \dfrac{2g}{R}(\cos(\theta) - 1)$

Q3. Montrer que la norme de la réaction normale du support s'écrit $\left\|\overrightarrow{R_N}\right\| = m\left(\dfrac{v_0^2}{R} + g\big(3\cos(\theta) - 2\big)\right)$.

Q4. Montrer que la bille reste en contact avec le support lors de tout le mouvement lorsque la vitesse initiale v_0 est supérieure à une vitesse v_{min} à déterminer.
Déterminer la hauteur minimale à laquelle Louise doit déposer la voiture pour qu'elle reste en contact avec le support. Faire l'application numérique.

Q5. Supposons $v_0 < v_{\text{min}}$. Déterminer l'angle auquel la bille quitte le support et tombe.

Exercices ★ ★

Exercice n°7 Flipper

On considère un ressort de flipper, de raideur $k = 40\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10\,\text{cm}$, disposé sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 6{,}0°$ avec l'horizontale. Sur ce ressort repose une bille en métal de masse $m = 150\,\text{g}$. On comprime le ressort au maximum avant de le lâcher, ce qui propulsera la bille. On supposera que le contact entre le ressort et la bille est rompu si la bille est au delà de la longueur à vide du ressort.
On appellera O le point d'attache du ressort et $\overrightarrow{u_x}$ le vecteur unitaire dirigé dans le sens de l'allongement du ressort. La position de la bille sera donc repérée par son abscisse x le long de cet axe.
Dans tout cet exercice on néglige les frottements.

Q1. Réaliser un schéma paramétré puis exprimer les différentes énergies potentielles en fonction de x et des données de l'énoncé.
Pour l'énergie potentielle élastique, on précisera le domaine de variation de x pour lequel cette écriture est valable. On choisira l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au point le plus bas accessible par la bille et celle de l'énergie potentielle élastique lorsque le ressort est à sa longueur à vide.

Q2. Tracer l'allure de l'énergie potentielle en fonction de x ainsi que l'énergie mécanique de la bille (en justifiant). Dés états non liés sont-ils possibles ? Placer les points de vitesse nulle et maximale.

Q3. Déterminer la vitesse de la bille au moment au celle-ci quitte le ressort.

Q4. Déterminer la distance maximale à laquelle pourra s'éloigner la bille.

Exercice n°8 Chute d'une chaîne

Une chaîne, de longueur totale L et de densité linéique λ, est posée sur un coin de table. Elle glisse sans frottement et tombe.

Q1. Déterminer avec un raisonnement énergétique l'équation de la chute de cette chaîne.

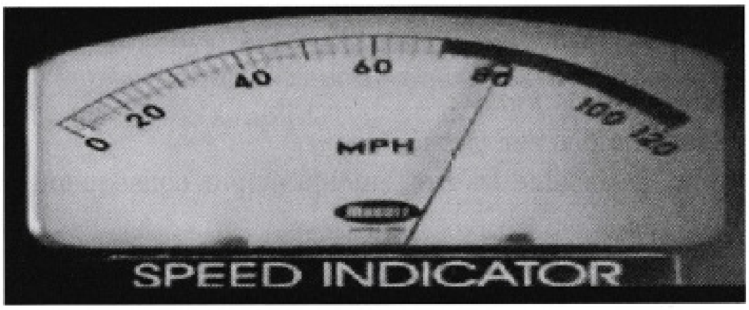
Q2. Retrouver ce résultat avec le principe fondamental de la dynamique.

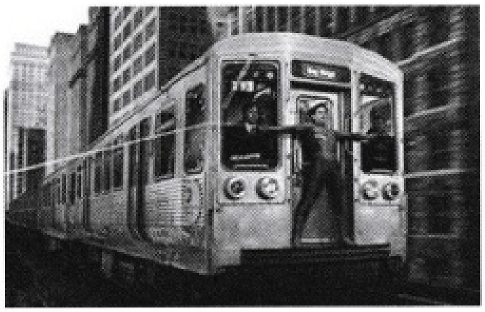
Q3. Résoudre cette équation différentielle.

Résolution de problème ⋆ ⋆ ⋆

Exercice n°9 Spider-Man contre Octopus

Dans le deuxième volet du film Spider-Man,de Sam Raimi, sorti en 2004, Peter Parker affronte le Docteur Octopus et ses 4 bras mécaniques accrochés à son dos. Dans un des affrontements, l'homme araignée et le vilain Docteur se retrouvent sur le dessus d'une rame de métro aérienne après une chute du haut d'un gratte-ciel. Pour se débarrasser de Spider-Man, le Docteur Octopus actionne la manette d'accélération de la rame jusqu'à son maximum et s'enfuit en détruisant les commandes du train et notamment son système de freinage. Cette forte accélération provoque la surchauffe du moteur de la motrice qui rompt sous l'effort. Spider-Man se retrouve alors avec une rame lancée à 80 mph sans moteur mais sans freinage et bondée de passagers. Il doit tout faire pour arrêter celle-ci avant d'atteindre l'extrémité de la voie ferrée qui donne sur le vide. Il décide alors de tendre ses fils de soie d'araignée entre ses bras et les immeubles situés de part et d'autre de la rame. En résistant pendant près d'une minute à l'inertie du train, il parvient finalement à l'arrêter in extremis.





Quelle force Spider-Man doit-il exercer sur chaque bras ?

Données :

- le train est composé de 6 wagons R160 du New-York City Subway dont la masse vaut 38,6 tonnes pour une puissance maximale de 1,4 MW. Chaque wagon peut contenir 246 personnes.
- Aux États-Unis la vitesse est exprimée en mph (miles per hour), et 1 mph vaut environ 1,6 km·h^{-1}.