Chapitre 9 : Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

Le but de ce chapitre est de déterminer le mouvement d'un point matériel dans un référentiel galiléen en adoptant une approche énergétique. Ces lois énergétiques découlent du principe fondamental de la dynamique, donc n'apportent aucune information supplémentaire, cependant elles permettent de traiter plus efficacement certains types de problèmes : ceux des systèmes à un seul degré de liberté.

Plan du cours

À savoir	
Définir travail et puissance d'une force, savoir que la puissance dépend du référentiel.	I
Connaître les expressions des énergies potentielle de pesanteur, potentielle gravitationnelle et potentielle élastique.	III.2
Énoncer le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen.	II.1
Donner le lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle associée.	III.1
Définir l'énergie mécanique et énoncer le théorème de l'énergie mécanique.	IV

À savoir faire	
Calculer le travail d'une force sur un trajet, reconnaître son caractère moteur/résistant.	I.1 Ⓐ **TD1**
Exploiter les théorème de l'énergie et de la puissance cinétiques.	II.2 Ⓑ **TD2,4**
Établir et utiliser les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur, de l'énergie potentielle gravitationnelle et de l'énergie potentielle élastique.	III.2 **TD3**
Déduire qualitativement du graphe d'une fonction énergie potentielle le sens et l'intensité de la force associée pour une situation à un degré de liberté.	V.3
Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.	III.1
Exploiter la conservation de l'énergie mécanique pour analyser un mouvement.	IV **TD5,6,7,8**
Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel.	IV.3
Pour un mouvement conservatif à une dimension, déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.	IV.3 **TD6**
Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre, et la nature stable ou instable de ces positions.	IV.3
Dans le cas de petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, faire l'approximation locale par un puits de potentiel harmonique et établir l'équation différentielle linéarisée du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.	IV.3

Parenthèse culture - Étienne Klein - l'énergie (extrait 1)

Comment Aristote définit-il l'énergie ?

Comment définir l'énergie « en langage moderne » ?

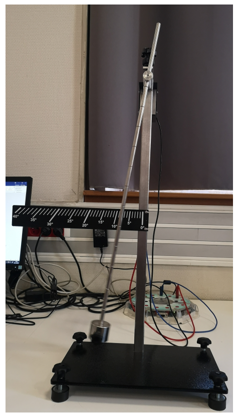
Quand les scientifiques utilisent-ils le mot ÉNERGIE pour la première fois ?

Comment est-elle alors définie ?

À quelle loi implacable l'énergie obéit-elle ?

Expérience de cours

On dispose d'un pendule, dont on peut enregistrer la position angulaire grâce à une interface d'acquisition.



Comment calculer l'énergie du pendule à chaque instant ?

Que peut-on dire de l'énergie du pendule ?

Même question en présence de frottements. Comment expliquer cela ?

Parenthèse culture - Étienne Klein - l'énergie (extrait 2)

Quand un ballon tombe, comment est convertie l'énergie de pesanteur du ballon ?

Comment Max Planck définit-il l'énergie ?

I Travail et puissance d'une force

I.1 Travail élémentaire d'une force

Définition

Travail élémentaire : Le travail élémentaire de la force $\overrightarrow{f}$ appliquée au point M au cours du déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est défini par :

$$\delta W_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Le travail d'une force s'exprime en **Joule (J)**.

Remarques

- Si $\delta W_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f}) > 0$ le travail de la force est **moteur**.
- Si $\delta W_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f}) < 0$ le travail de la force est **résistant**.
- Si $\delta W_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f}) = 0$ la force **ne travaille pas**.

I.2 Travail d'une force sur un déplacement

Définition

Travail d'une force : Le travail de la force $\overrightarrow{f}$ appliquée au point M au cours d'un déplacement de M allant de A (à l'instant t_A) vers B (à l'instant $t_B > t_A$) est la somme des travaux élémentaires en suivant le chemin suivi par M pour aller de A à B :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = \int_{M\in\overset{\frown}{AB}} \delta W(\overrightarrow{f}) = \int_{M\in\overset{\frown}{AB}} \overrightarrow{f}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

La notation $\int_{M\in\overset{\frown}{AB}}$ indique que le travail doit être calculé par une intervalle curviligne en suivant la trajectoire suivie par M pour aller de A à B.

Remarques

- Le travail peut dépendre du chemin suivi.
- Quand la force est en permanence perpendiculaire au mouvement, son travail est nul.
- Après avoir calculé un travail, il faut vérifier la cohérence du signe du travail avec sa nature motrice ($W > 0$) ou résistante ($W < 0$).

Application directe

Déterminer le travail du poids au cours d'un déplacement horizontal sur une distance $AB = d$.

Retour sur l'expérience de cours

On considère le système du pendule simple : un point M de masse m est attaché à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ inextensible et sans masse. On repère la position du point M par l'angle θ que fait le fil avec la verticale descendante.

Q1. Que peut-on dire du travail de la tension du fil ?

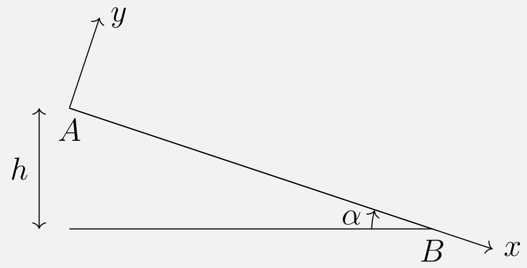
Q2. Déterminer le travail du poids au cours du déplacement du point M de l'angle θ_A à l'angle θ_B :

- — d'abord en fonction de ℓ, m, g, θ_A et θ_B
- — ensuite en fonction de m, g, z_A et z_B

Q3. Le travail du poids est-il moteur ou résistant si $\theta_A < \theta_B$?

Exercice de cours (A)

On considère un point M de masse m qui glisse sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale, d'un point A à un point B séparés d'une altitude h. On prend en compte les frottements solides de coefficient f_d modélisés par la loi de Coulomb : $R_T = f_\mathrm{d} \times R_N$, avec $\overrightarrow{R_T}$ la composante tangentielle et $\overrightarrow{R_N}$ la composante normale de la réaction du support.



Déterminer le travail du poids et le travail de la réaction du support (normale et tangentielle).

I.3 Puissance d'une force

D'après la définition du déplacement élémentaire vue au chapitre 7 : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)} = \overrightarrow{v}\mathrm{d}t$, on peut écrire le travail élémentaire sous la forme : $\delta W_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}\mathrm{d}t$.

Définition

Puissance d'une force : La puissance de la force $\overrightarrow{f}$ appliquée au point matériel M de masse m animé de la vitesse $\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}$ dans $\mathcal{R}$ vaut :

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}$$

$\mathcal{P}$ s'exprime en **Watt (W)**.

Relation puissance / travail élémentaire :

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f}) = \frac{\delta W_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f})}{\mathrm{d}t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta W_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f}) = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f})\mathrm{d}t$$

Remarques

- La puissance dépend du référentiel d'étude (comme la vitesse et le travail).
- La puissance est une grandeur additive : $\mathcal{P}(\overrightarrow{f_1+f_2}) = \mathcal{P}(\overrightarrow{f_1}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{f_2})$
- Comme pour le travail élémentaire, on parle de puissance motrice si $\mathscr{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f}) > 0$, de puissance résistante si $\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f}) < 0$ et de puissance nulle si $\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{f}) = 0$.

Retour sur l'expérience de cours

Déterminer la puissance des forces $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{P}$. Étudier leur signe et conclure sur leur caractère résistant ou moteur.

II Théorèmes de l'énergie et de la puissance cinétiques

II.1 Énonce des théorèmes

♥ Définition

Énergie cinétique : Soit un point matériel M de masse m et de vecteur vitesse $\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$. Son énergie cinétique dans le référentiel $\mathcal{R}$ est :

$$E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}mv^2$$

avec $v = \left\|\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}\right\|$ en m·s^{-1} (norme du vecteur vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$)
L'énergie cinétique s'exprime en **Joule (J)**.

Remarque

- $E_c(M/\mathcal{R})$ dépend du référentiel $\mathcal{R}$, tout comme $\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}$.

Démonstration

Multiplier scalairement le principe fondamental de la dynamique par $\overrightarrow{v}$, puis faire apparaître la dérivée de l'énergie cinétique du système.

♥ Théorème de la puissance cinétique

Théorème de la puissance cinétique appliquée au point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{f_i}) \qquad \left(= \sum_i \overrightarrow{f_i} \cdot \overrightarrow{v}\right)$$

Démonstration

Intégrer par rapport au temps entre l'instant t_A où le mobile quitte A avec une vitesse v_A et l'instant t_B où le mobile quitte B avec une vitesse v_B.

♥ Théorème de l'énergie cinétique

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel M entre deux instants est égale au travail des forces qui s'exercent sur ce point entre les deux instants considérés :

$$\Delta E_\mathrm{c} = \sum_i W_{A\to B}(\overrightarrow{f_i})$$

avec $\Delta E_\mathrm{c} = E_\mathrm{c}(t_B) - E_\mathrm{c}(t_A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$

Au niveau infinitésimal on peut écrire : $\mathrm{d}E_\mathrm{c} = \sum_i \delta W(\overrightarrow{f_i})$

II.2 Utilisation des théorèmes

Les théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques n'apportent pas d'information supplémentaire par rapport au PFD : en passant d'une équation vectorielle (PFD) à une équation scalaire (TEC ou TPC), on perd même de l'information. Mais dans certains cas, la méthode énergétique s'avère judicieuse.

☆ Méthode

Il est judicieux d'utiliser ces lois énergétiques (TEC, TPC) lorsque :

— on cherche l'équation du mouvement d'un **système à un seul degré de liberté** (une seule variable d'espace suffit à la description du mouvement) ;

— les **forces non connues** (réaction normale du support, tension du fil) **ne travaillent pas**.

Quelle loi énergétique utiliser : TEC ou TPC ?

— Privilégier le **TEC** si on cherche **un scalaire** (par ex : norme du vecteur vitesse, distance) d'un système à 1 degré de liberté **à un instant** t_1 **particulier** et que l'on connaît la valeur de ce scalaire à un autre instant t_0.

— Privilégier le **TPC** si on cherche l'**équation du mouvement d'un système à 1 degré de liberté** pour lequel les forces non connues ne travaillent pas.

☆ Méthode : Comment appliquer le TEC ?

① Comme pour tout exercice de mécanique : système, référentiel, choix de la base de projection, bilan des forces, schéma complet.

② Choisir les deux instants t_A et t_B, adaptés aux données du problème et à la question posée, entre lesquels appliquer le TEC.

③ Écrire : « On applique le théorème de l'énergie cinétique au système ... dans le référentiel .... (galiléen) entre $A(t_A)$ et $B(t_B)$ » et écrire la relation : $\Delta_{A\to B}E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{A\to B}$

④ Exprimer le travail des différentes forces sur le trajet AB, pour cela :

- projeter les forces $\overrightarrow{F}$ dans la base de projection choisie (cartésienne ou cylindrique) ;
- exprimer le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ dans la même base de projection
- exprimer le travail élémentaire $\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$;
- calculer l'intégrale du travail élémentaire entre A et B : $W_{A\to B} = \displaystyle\int_A^B \delta W$.

⑤ Exprimer la différence d'énergie cinétique entre A et B : $\Delta_{A\to B}E_c = E_c(B) - E_c(A)$

⑥ Égaliser la différence d'énergie cinétique et les travaux calculés précédemment.

⑦ Conclure sur ce qui est demandé dans l'énoncé.

Exercice de cours (B)

On étudie le lancer d'une pierre de curling assimilée à un point M de masse $m = 20\,\mathrm{kg}$ glissant sur une patinoire selon l'axe Ox vers le point B visé (appelé « maison »). La pierre est lancée de la position initiale A avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$, la maison se trouvant à la distance $D = AB = 25\,\mathrm{m}$ du point A. La force de frottement de la glace sur la pierre est supposée constante pendant toute la glissade : $\overrightarrow{F} = -F_0\overrightarrow{u_x}$ avec $F_0 = 3{,}0\,\mathrm{N}$, et cette force s'annule lorsque la vitesse de la pierre s'annule. Les frottements fluides sont négligés. Le lancer étudié est supposé gagnant : la pierre atteint la maison et s'y arrête.
Déterminer la vitesse initiale v_0 adaptée.

⭐ Méthode : Comment appliquer le TPC ?

① Comme pour tout exercice de mécanique : système ; référentiel ; bilan des forces ; choix de la base de projection adaptée (cartésienne, polaire, cylindrique, sphérique) ; schéma complet.

② Écrire : « On applique le théorème de la puissance cinétique au système ... dans le référentiel .... (galiléen) » et écrire cette loi : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}(M/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}_\mathrm{ext}$

③ Exprimer la puissance des différentes forces, pour cela :

- projeter les forces $\overrightarrow{F}$ dans la base de projection choisie ;
- exprimer le vecteur vitesse dans la base de projection choisie ;
- exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} \dots$, ou $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = F_r\dot{r} + F_\theta r\dot{\theta} \dots$

④ Exprimer l'énergie cinétique à partir de l'expression du vecteur vitesse dans la base de projection choisie. Calculer la dérivée de l'énergie cinétique.

⑤ Égaliser la dérivée de l'énergie cinétique calculée précédemment et la somme des puissances des forces calculées précédemment.

⑥ Conclure sur ce qui est demandé dans l'énoncé.

Retour sur l'expérience de cours

On étudie le pendule simple : une masse ponctuelle m est accrochée à l'extrémité d'un fil inextensible sans masse de longueur ℓ, que l'on fait osciller dans un plan.
Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$, angle que fait le fil avec la verticale descendante.

III Forces conservatives et énergie potentielle

III.1 Définition d'une force conservative - lien avec l'énergie potentielle

Définition

Force conservative : Une force $\overrightarrow{f_C}$ est conservative si son travail $W_{A\to B}(\overrightarrow{f_C})$ entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des points A et B.

Le travail d'une force conservative $\overrightarrow{f_C}$ lors d'un déplacement entre A et B est alors égal **à l'opposé** de la variation d'une fonction de la position appelée **énergie potentielle** :

$$W_{AB}(\overrightarrow{f_C}) = -\Delta_{AB}E_p$$

avec $\Delta_{AB}E_p = E_p(B) - E_p(A)$

Pour un déplacement élémentaire, le travail élémentaire de la force $\overrightarrow{f_C}$ est égale à l'opposé de la variation infinitésimale de l'énergie potentielle : $\delta W(\overrightarrow{f_C}) = -\mathrm{d}E_p$

Remarque

- Une force dont le travail entre 2 points dépend du chemin suivi n'est pas conservative.

Méthode

Pour établir l'expression de la fonction énergie potentielle :

① Calculer le travail de la force $\overrightarrow{f_C}$ entre deux points A et B quelconques :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{f_C}) = \int_{M\in\widehat{AB}} \overrightarrow{f_C}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

② Écrire l'expression obtenue sous la forme de l'opposé de la différence d'une fonction de la position :

$$-\Big[E_p(B) - E_p(A)\Big]$$

③ Identifier l'énergie potentielle à une constante additive près.

Remarques

- Il est aussi possible de déterminer le travail élémentaire $\delta W(\overrightarrow{f_C}) = \overrightarrow{f_C}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ et d'écrire ensuite que son opposé est égal à la différentielle de la fonction énergie potentielle $-\mathrm{d}E_p$:

$$\overrightarrow{f_C}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\mathrm{d}E_p$$

- Lors de l'application du TEC, plutôt que de calculer le travail des forces conservatives sur le chemin suivi, il est souvent plus simple de calculer les variations des énergies potentielles correspondantes entre le départ et l'arrivée.

III.2 Exemples de forces conservatives

Démonstration

Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.

Démonstration

Établir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle.

Démonstration

Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique.

Formules

Énergie potentielle de pesanteur $E_{\mathbf{pp}}$ d'un point matériel de masse m, situé à l'altitude z :

$E_{\text{pp}} = +\,mgz + \text{cste}$	$E_{\text{pp}} = -\,mgz + \text{cste}$
lorsque l'axe (Oz) est ascendant	lorsque l'axe (Oz) est descendant

Énergie potentielle gravitationnelle $E_{\mathbf{p,g}}$ d'un système M de masse m soumis à une force d'interaction gravitationnelle exercée par un astre A de masse m_A :

$$E_{\text{p,g}} = -G\frac{m \times m_A}{r} + \text{cste}$$

Énergie potentielle élastique $E_{\mathbf{p,él}}$ d'un ressort de longueur $\ell(t)$, de constante de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 :

$$E_{\text{p,él}} = \frac{1}{2}k\Big(\ell(t) - \ell_0\Big)^2 + \text{cste}$$

IV Théorème de l'énergie mécanique

Définition

Énergie mécanique : Soit M un point matériel de masse m, sur lequel s'exercent des forces extérieures. L'**énergie mécanique** E_m du point M est :

$$E_{\text{m}}(M/\mathcal{R}) = E_{\text{c}}(M/\mathcal{R}) + E_{\text{p}}$$

avec :

$E_{\text{p}} =$ énergie potentielle du point M correspond à la somme des énergies potentielles associées à toutes les forces extérieures conservatives.

$E_{\text{c}}(M/\mathcal{R}) =$ énergie cinétique du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Démonstration

Utiliser le le théorème de l'énergie cinétique et la définition des forces conservatives pour exprimer la variation d'énergie mécanique d'un système.

Théorème de l'énergie mécanique

La variation d'énergie mécanique d'un point matériel M entre deux instants est égale au travail des forces **non conservatives** qui s'exercent sur ce point entre les deux instants considérés :

$$\Delta E_\mathrm{m} = E_\mathrm{m}(t_B) - E_\mathrm{m}(t_A) = \sum W_{A\to B}(\overrightarrow{f_{NC}})$$

Au niveau infinitésimal on peut écrire : $\mathrm{d}E_\mathrm{m} = \mathrm{d}(E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p}) = \sum \delta W(\overrightarrow{f_{NC}})$

Cas de conservation de l'énergie mécanique : L'énergie mécanique d'un point matériel soumis uniquement à des forces non conservatives ou à des forces conservatives qui ne travaillent pas est une constante du mouvement.

Théorème de la puissance mécanique

Théorème de la puissance mécanique appliquée au point M dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{f_{NC}}) = \sum \overrightarrow{f_{NC}} \cdot \vec{v}$$

Remarque

- Si toutes les forces sont conservatives, on parle de mouvement conservatif ($E_\mathrm{m} = \mathrm{cste}$).

V Mouvements conservatifs à 1 dimension

V.1 Expression d'une force conservative pour un mouvement à 1 dimension

Un système à 1 dimension (ou 1 degré de liberté) est un système dont le repérage dans l'espace ne nécessite qu'un seul paramètre : l'abscisse sur un axe, un angle, une distance, etc.

Soit $\vec{F} = F_x(x)\overrightarrow{u_x}$ une force conservative qui s'applique sur le système.

Par définition du travail, on peut écrire : $\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = F_x(x)\overrightarrow{u_x} \cdot \underbrace{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}_{\mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}} = F_x(x)\mathrm{d}x$.

Or la force $\vec{F}$ est conservative, donc il existe une énergie potentielle E_p telle que $\delta W = -\mathrm{d}E_\mathrm{p}$, ainsi $F_x(x)\mathrm{d}x = -\mathrm{d}E_p$ c'est à dire :

$$F_x(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} \qquad \text{soit} \qquad \vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\,\overrightarrow{u_x}$$

V.2 Vocabulaire

Définitions

Position d'équilibre : x_e est une position d'équilibre si lorsqu'on place M en cette position x_e sans vitesse initiale il y reste.
En une position d'équilibre, la somme des forces qui s'appliquent à M est nulle :

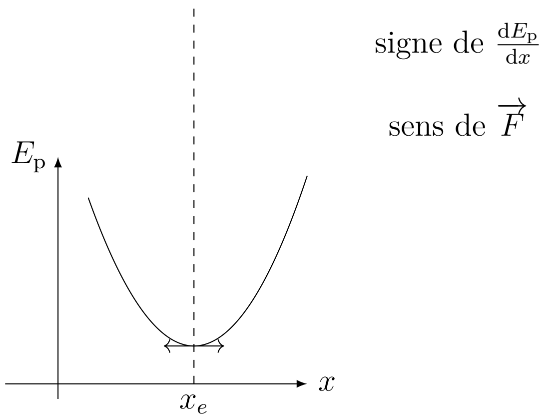
$$\sum_i \overrightarrow{f_i} = \overrightarrow{0}$$

Équilibre stable : quand on écarte légèrement un point M de sa position d'équilibre, il revient vers sa position d'équilibre (il apparaît une force qui tend à l'y ramener).

Équilibre instable : quand on écarte légèrement un point M de sa position d'équilibre, il s'éloigne définitivement de sa position d'équilibre (il apparaît une force qui tend à l'en éloigner davantage).

V.3 Analyse du graphe d'énergie potentielle

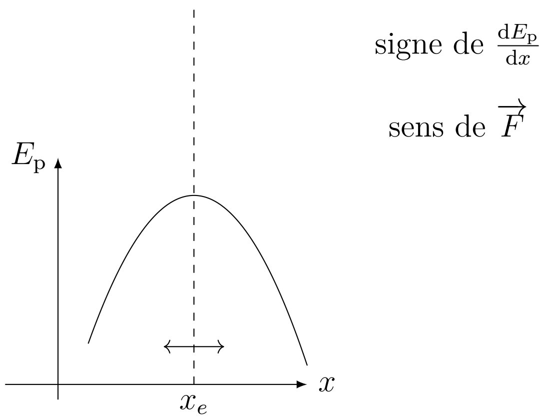
a) Cas d'un équilibre stable



En une position d'**équilibre stable**, l'énergie potentielle présente un minimum local.

Cela se traduit par : $\left(\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e} = 0$ (la force s'annule), et $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} > 0$.

b) Cas d'un équilibre instable



En une position d'**équilibre instable**, l'énergie potentielle présente un maximum local.

Cela se traduit par : $\left(\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e} = 0$ (la force s'annule), et $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} < 0$.

Comment relier le sens de $\overrightarrow{F}$ à $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}$?

Lorsque la fonction E_p est deux fois dérivable et que sa dérivée seconde ne s'annule pas en x_e, on peut exprimer $\overrightarrow{F}$ au voisinage de x_e avec un développement limité au 1$^{\text{er}}$ ordre de la fonction $F_x(x)$ au voisinage de $x = x_e$:

$$F_x(x_e + \mathrm{d}x) = F_x(x_e) + (x_e + \mathrm{d}x - x_e)\left(\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e} = \left(\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e}\mathrm{d}x$$

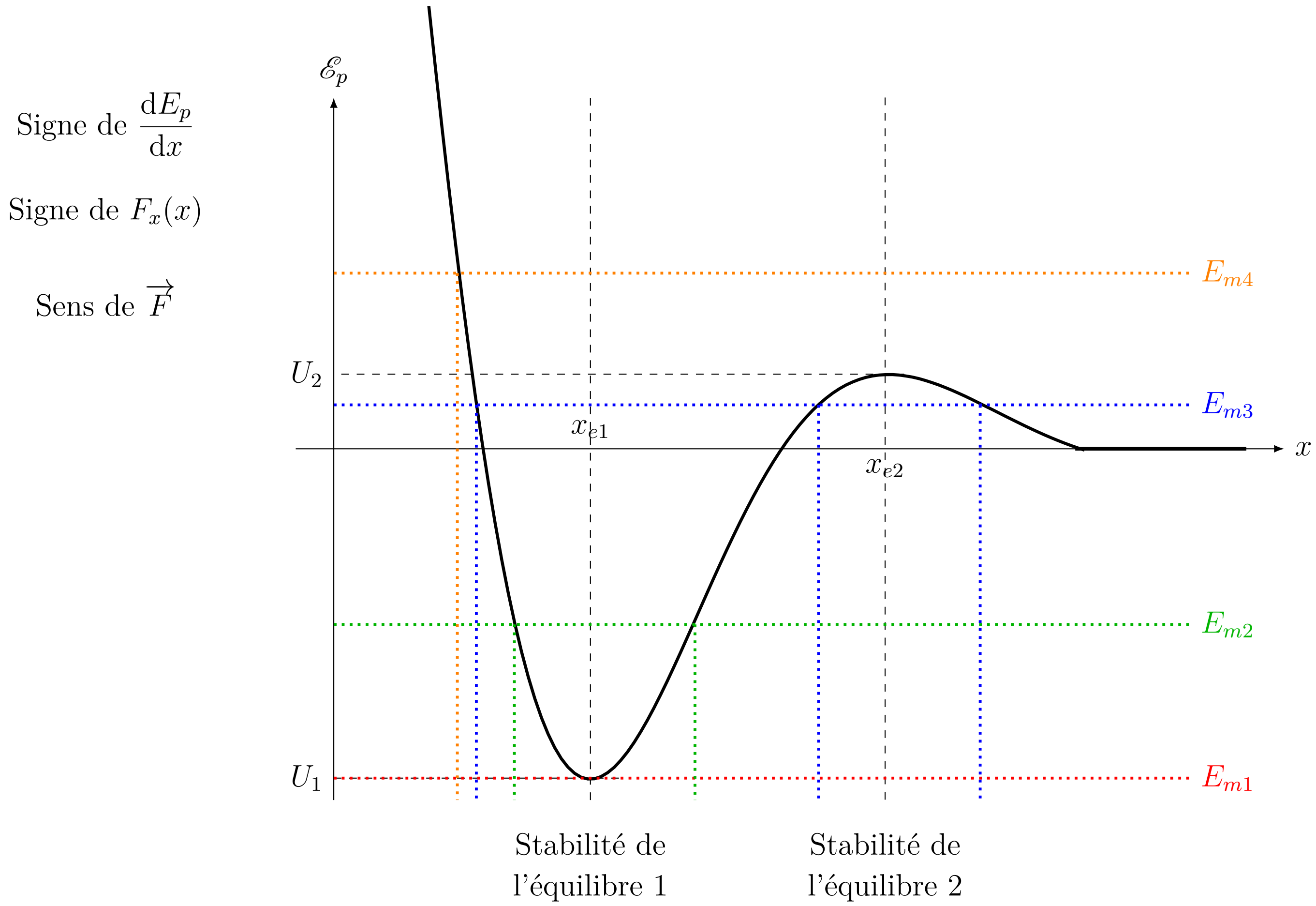
Or $F_x(x) = -\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}$ donc $\left(\dfrac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e} = -\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}$ et $F_x(x_e + \mathrm{d}x) = -\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}\mathrm{d}x$.

Donc pour un déplacement $\mathrm{d}x > 0$, si $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} > 0$, alors $F_x(x_e + \mathrm{d}x) < 0$ donc la force tend à ramener le point vers sa position d'équilibre $\Rightarrow$ position d'équilibre stable.

Et pour un déplacement $\mathrm{d}x > 0$, si $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} < 0$, alors $F_x(x_e + \mathrm{d}x) > 0$ donc la force tend à éloigner encore plus le point de sa position d'équilibre $\Rightarrow$ position d'équilibre instable.

c) Analyse du mouvement à l'aide d'un graphe énergétique

On s'intéresse au mouvement conservatif à un degré de liberté d'un point M. **L'énergie mécanique de M est constante, et sa valeur est fixée par les conditions initiales** (position initiale et vitesse initiale), et l'énergie potentielle est donnée sur le graphe ci-dessous.



Étude des trajectoires à partir de la courbe $E_\mathrm{p}(x)$:

Analyse du graphique

Donner l'expression de E_m en fonction de m, $\dot{x}$ et $E_\mathrm{p}(x)$.
En déduire que les positions x accessibles au point M sont celles pour lesquelles $E_\mathrm{p}(x) \leq E_\mathrm{m}$.

Analyse du graphique

À l'aide du graphique, décrire la nature du mouvement du point M selon la valeur de l'énergie mécanique, en s'intéressant aux cas suivants :

$$E_{m1} = U_1 \quad ; \quad U_1 < E_{m2} < 0 \quad ; \quad 0 < E_{m3} < U_2 \quad ; \quad E_{m4} > U_2$$

Utiliser les termes suivants : « **trajectoire bornée** », « **trajectoire non bornée** », « **mouvement périodique** », « **état confiné (ou lié)** », « **état de diffusion** » .
Pour chaque valeur de E_m, décrire les **positions de vitesse nulle**.

Énergie minimale nécessaire pour franchir la barrière de potentiel :

Analyse du graphique

Quelle énergie mécanique doit avoir le point matériel, placé en $x = x_{e1}$ pour qu'il puisse s'échapper à l'infini ?

Analyse du graphique

Quelle vitesse doit avoir le point matériel, placé en $x = x_{e1}$ pour qu'il puisse s'échapper à l'infini ?

V.4 Mouvement au voisinage d'un équilibre stable

Soit x_e une position d'équilibre stable d'un système conservatif à 1 degré de liberté, d'énergie potentielle $E_\mathrm{p}(x)$. On a donc :

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_e} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e} > 0$$

On étudie le mouvement de faible amplitude du point matériel M autour de l'équilibre stable x_e de sorte que pendant tout le mouvement $x \approx x_e$.

Démonstration

Écrire le développement limité au deuxième ordre de l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre x_e, et montrer que l'énergie potentielle peut s'identifier à une énergie potentielle élastique.

Démonstration

En déduire l'expression de l'énergie mécanique au voisinage de la position d'équilibre stable x_e.

Démonstration

Que peut-on dire de l'énergie mécanique du point M ? En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de M.

Synthèse

Mouvements conservatifs au voisinage d'un équilibre stable :

L'équation du mouvement d'un système conservatif à un degré de liberté, **au voisinage d'une position x_e d'équilibre stable** est celle d'un **oscillateur harmonique** :

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - x_e) = 0$$

de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_e}}$

Le point M oscille au voisinage de la position d'équilibre stable x_e avec une période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

V.5 Résolution numérique de l'équation du mouvement du pendule simple

On a montré précédemment que le mouvement du point matériel M lié à un fil de longueur ℓ est régi par l'équation :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

avec $\theta =$ angle que fait le fil avec la verticale descendante, et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.

Le programme Python ci-dessous permet de comparer la solution de cette équation différentielle obtenue avec une méthode numérique, à la réponse analytique de l'équation linéarisée dans le cas des petits angles.

```
# Créé par cecil, le 01/11/2022 en Python 3.7
import scipy.integrate as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# ------ Parametres physiques -- on ne changera pas ces valeurs
g = 9.81 # pesanteur , m / s **2
l = 1.00 # longeur du pendule , m
omega_0 = ( g / l )**0.5 # calcul de la pulsation , rad / s
T0 = 2.* np . pi / omega_0 # calcul de la periode , s , ici on obtient T0 =1 s
theta_0=0.1

def F(X,t): # on définit la fonction F
    return [X[1], -omega_0**2*np.sin(X[0])]


Y0=[theta_0,0] # Conditions initiales
T = np.linspace(0,10,1001) # Nombre de points temporels
Y = sp.odeint(F,Y0,T) # application de la méthode odeint

def solution_petits_angles(T,theta_0): # on définit la fonction solution_petits_angles
    return theta_0 * np.cos(omega_0*T)

Z = solution_petits_angles(T,theta_0)



plt.plot(T,Y[:,0],color ='red') # sélectionne la 1ère composante de chaque vecteur
plt.plot(T,Z,color ='blue')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('theta')
plt.grid()
plt.show()
```

La fonction `odeint` a une syntaxe particulière, qui oblige à transformer l'équation d'ordre 2 sur θ, en une équation d'ordre 1 sur le couple $Y = \begin{pmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{pmatrix}$.

Y a donc deux composantes : sa première composante est $Y_0 = \theta$; sa seconde composante est $Y_1 = \dot{\theta}$.

Analyse du programme

Dériver le couple Y pour trouver l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = F(Y)$.

Analyse du programme

Quel est la valeur du pas de cette méthode numérique ?

Analyse du programme

Faire varier les conditions initiales. Peut-on dire que la période des oscillations est indépendante de l'amplitude des oscillations ?