

# Chapitre 14 : Régime sinusoïdal forcé

On étudie dans ce chapitre les circuits électriques linéaires soumis à une excitation (tension ou courant imposé(e) au circuit) variant sinusoïdalement au cours du temps (= régime sinusoïdal), ce qui est extrêmement important car utilisé dans de nombreux domaines :

- Les courants produits industriellement par des alternateurs sont sinusoïdaux. En Europe, l'amplitude de la tension délivrée aux particuliers est  $E_0 = 220\text{ V}$  pour une fréquence  $f = 50\text{ Hz}$ .
- Dans les télécoms, les informations sont transportées par des ondes électromagnétiques de forme sinusoïdale (ou plutôt par une somme d'ondes sinusoïdales).
- D'une façon générale, les phénomènes ondulatoires sont sinusoïdaux (ondes lumineuses, sonores, etc.)
- On montre en mathématiques (analyse de Fourier) que tout signal périodique peut s'écrire comme une somme infinie de fonctions sinusoïdales d'où le rôle universel joué par ces dernières.

Il est très intéressant d'introduire le concept d'impédance complexe, qui permet d'écrire les lois de l'électricité sous forme d'équations algébriques simples à résoudre.

## Plan du cours

<p><b>I Signaux électriques</b> <span style="float: right;"><b>2</b></span></p> <p>I.1 Signaux sinusoïdaux . . . . . 2</p> <p>I.2 Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchrones . . . . . 2</p> <p>I.3 Signal complexe associé à un signal sinusoïdal 3</p> <p>I.4 Opérations sur les complexes . . . . . 3</p> <p><b>II Étude de circuits linéaires en RSF</b> <span style="float: right;"><b>4</b></span></p> <p>II.1 Impédances complexes . . . . . 4</p>	<p>a) Impédance complexe d'un dipôle passif 4</p> <p>b) Résistance, bobine et condensateur . . 5</p> <p>II.2 Lois de nœuds et loi des mailles en RSF . . . 7</p> <p>II.3 Associations d'impédances . . . . . 7</p> <p>II.4 Ponts diviseurs en RSF . . . . . 9</p> <p><b>III Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé</b> <span style="float: right;"><b>10</b></span></p> <p>III.1 Définition . . . . . 10</p> <p>III.2 Résonance en tension aux bornes de <math>C</math> . . . . 10</p> <p>III.3 Résonance en intensité . . . . . 16</p> <p>III.4 Utilisation des graphes . . . . . 20</p>
--	---

À savoir	
Les expressions mathématiques réelle et complexe associées à une grandeur en RSF, avec la signification des termes.	I.1
L'expression du déphasage entre deux signaux.	I.2
L'impédance complexes d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine en RSF.	II.1
Les opérations de dérivation et d'intégration pour un signal complexe.	I.4
La loi des œuds et la loi des mailles en RSF.	II.2
Les lois d'association pour les impédances complexes.	II.3
Les ponts diviseurs de tension et d'intensité en RSF	II.4

À savoir faire	
Établir l'expression de 'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.	II.1
Passer d'une équation différentielle linéaire à une équation complexe et inversement.	(B) <b>TD1,2</b>
Utiliser toutes les lois des circuits en notation complexe.	(C) <b>TD2,3,6-8</b>
Déterminer une impédance ou une admittance équivalente à une association.	(B) <b>TD3</b>
Déterminer l'amplitude et la phase d'une grandeur réelle à partir de son amplitude complexe.	(A) <b>TD2,6</b>
Étudier la réponse fréquentielle d'un circuit en intensité ou en tension.	III <b>TD6-8</b>
Relier l'acuité d'une résistance au facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.	II.4 <b>TD5</b>
Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.	<b>TP17</b>

# I Signaux électriques

## I.1 Signaux sinusoïdaux

### ♥ Définition

En régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs sont de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

avec :

- $X_m$  = amplitude, de même unité que la grandeur  $x$
- $\omega$  = pulsation imposée par le générateur, en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
- $\varphi$  = phase à l'origine, en rad



**Remarque :** Pulsation, période et fréquence sont reliées par :  $\omega = 2\pi \times f = \frac{2\pi}{T}$

## I.2 Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux synchrones

### ♥ Définition

On considère deux signaux sinusoïdaux synchrones, c'est-à-dire de même pulsation :

$$u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad u_2(t) = U_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

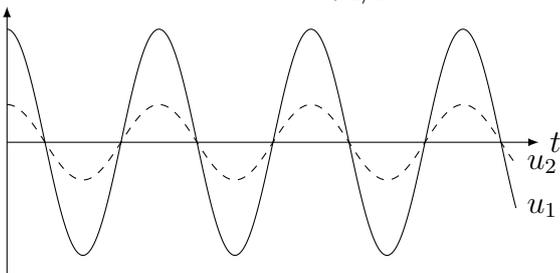
**Déphasage :** le déphasage de  $u_2$  par rapport à  $u_1$ , noté  $\Delta\varphi_{2/1}$ , est défini par :  $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1$



**Remarque** Le déphasage de  $u_1$  par rapport à  $u_2$  vaut :  $\Delta\varphi_{1/2} = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi_{2/1}$

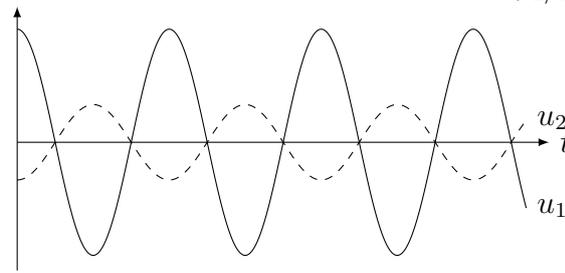
### ★ Méthode

$u_1$  et  $u_2$  en phase :  $\Delta\varphi_{2/1} = 0$



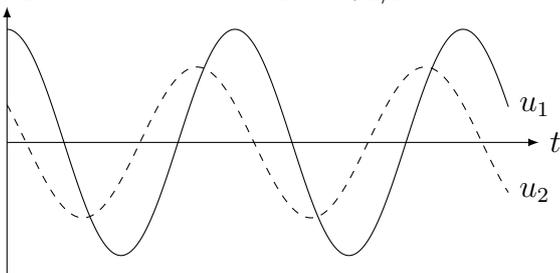
Les extrema sont atteints au même moment.

$u_1$  et  $u_2$  en opposition de phase :  $\Delta\varphi_{2/1} = \pm\pi$

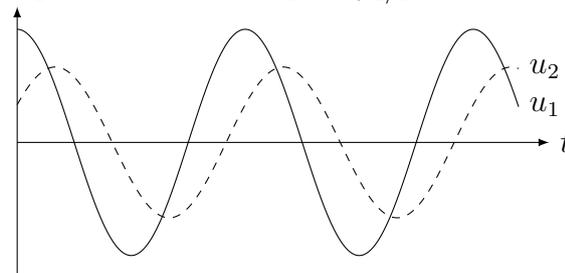


Quand l'un est minimal, l'autre est maximal.

$u_2$  en avance sur  $u_1$  :  $\Delta\varphi_{2/1} > 0$



$u_2$  en retard sur  $u_1$  :  $\Delta\varphi_{2/1} < 0$



Il faut repérer deux maxima successifs (les plus proches), et en lisant de gauche à droite, repérer le signal dont le maximum est atteint en premier : c'est le signal qui est en avance.

### I.3 Signal complexe associé à un signal sinusoïdal

#### ♥ Définition

Au signal  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ , on associe le signal complexe :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$$

avec  $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} = \text{amplitude complexe}$

#### ★ Méthode

Si on connaît le signal complexe  $\underline{x}(t)$ , on peut déterminer :

- la valeur instantanée du signal réel en prenant la partie réelle :  $x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$
- l'amplitude du signal réel en prenant le module :  $X_m = |\underline{x}(t)| = |\underline{X}_m(t)|$
- la phase à l'origine des temps en prenant l'argument :  $\varphi = \arg(\underline{x}(t)) - \omega t = \arg(\underline{X}_m)$

#### 💣 Exercice de cours (A)

Q1. Donner les signaux réels associés aux signaux d'amplitudes complexes suivantes :

(a)  $\underline{U}_L = U_m e^{-j\pi/3}$

(b)  $\underline{I}_1 = -j \frac{U_0}{R}$

(c)  $\underline{I}_2 = -I_m e^{j\pi/6}$

Q2. Donner le module des complexes ci-dessous :

(a)  $\underline{U}_m = \frac{E}{1 + j\omega\tau}$

(b)  $\underline{u} = \frac{Ej\omega\tau}{1 + j\omega\tau} e^{j\omega t}$

(c)  $\underline{U}_m = \frac{-E\omega_0^2}{-\omega^2 + j\omega\omega_0/Q + \omega_0^2}$

### I.4 Opérations sur les complexes

La notation complexe s'applique sans difficulté à des résultats d'opérations linéaires effectuées sur des signaux sinusoïdaux :

si  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  sont deux signaux sinusoïdaux représentés par les complexes  $\underline{s}_1(t)$  et  $\underline{s}_2(t)$ , le signal  $\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$  sera représenté par le complexe  $\alpha \underline{s}_1(t) + \beta \underline{s}_2(t)$ , avec  $\alpha$  et  $\beta$  des réels.

#### 🔪 Démonstration

On considère un signal  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$  de représentation complexe  $\underline{s}(t) = \underline{S}_m e^{j\omega t}$ .

Exprimer  $\frac{ds}{dt}$  en fonction de  $\underline{s}$ .

## 🔪 Démonstration

Exprimer la primitive sinusoidale (de constante d'intégration nulle) de  $\underline{s}(t)$  en fonction de  $\underline{s}$ .

## 🔪 Démonstration

On considère deux signaux complexes  $s_1(t) = S_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $s_2(t) = S_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$  de représentations complexes  $\underline{s}_1(t) = \underline{S}_{1m} e^{j\omega t}$  et  $\underline{s}_2(t) = \underline{S}_{2m} e^{j\omega t}$ .

Exprimer le déphasage de  $s_2(t)$  par rapport à  $s_1(t)$ .

## ★ Méthode

**Dérivation** : Pour dériver un signal complexe, il faut le **multiplier** par  $j\omega$  :  $\frac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega \times \underline{s}(t)$

**Intégration** : Pour intégrer un signal complexe, il faut le **diviser** par  $j\omega$  :  $\int \underline{s}(t) dt = \frac{\underline{s}(t)}{j\omega}$

**Déphasage** : Le déphasage entre deux signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  est :  $\varphi_{2/1} = \arg\left(\frac{\underline{s}_2(t)}{\underline{s}_1(t)}\right)$

## II Étude de circuits linéaires en RSF

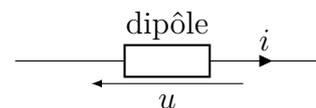
### II.1 Impédances complexes

#### a) Impédance complexe d'un dipôle passif

## ♥ Définitions

### Impédance complexe :

On considère un dipôle linéaire passif, en convention récepteur, dont la tension à ses bornes s'écrit  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$  et traversé par un courant d'intensité  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ .



En régime sinusoïdal forcé, en utilisant la notation complexe :

$$\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

avec  $\underline{Z}$  = **impédance complexe du dipôle**

$$\text{On a donc : } \underline{Z} = \frac{U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{U_m \times \cancel{e^{j\omega t}} \times e^{j\varphi_u}}{I_m \times \cancel{e^{j\omega t}} \times e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} \quad \text{en Ohm } (\Omega)$$

Soit :  $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$  avec :  $\varphi$  = déphasage de la tension par rapport à l'intensité du courant  
 $= \arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = \varphi_u - \varphi_i$  en rad

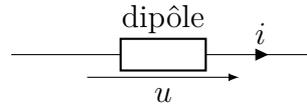
**Admittance complexe**  $\underline{Y}$  :  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

**Admittance**  $Y$  :  $Y = \frac{1}{Z}$  exprimée en Siemens (S) ou en  $\Omega^{-1}$



### Remarques

- La relation entre impédance et admittance complexes est  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ , ce qui donne la relation entre les arguments :  $\arg(\underline{Y}) = -\arg(\underline{Z})$ .
- En convention générateur, on a  $\underline{u} = -\underline{Z} \times \underline{i}$



### b) Impédances de la résistance, de la bobine et du condensateur



**Démonstration** On étudie un conducteur ohmique de résistance  $R$  :

- Q1. Établir l'expression de son impédance complexe et de son admittance complexe.
- Q2. En déduire les comportements de la résistance à basse et haute fréquence.
- Q3. Déterminer le déphasage entre la tension à ses bornes et l'intensité qui le traverse. Qui, de la tension ou de l'intensité, est en avance sur l'autre ?
- Q4. Représenter  $u$  et  $i$  sur le même graphique en fonction du temps.



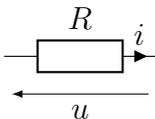
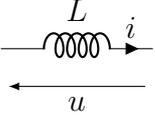
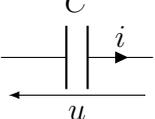
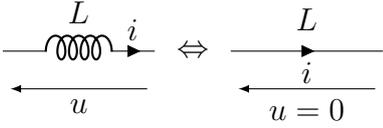
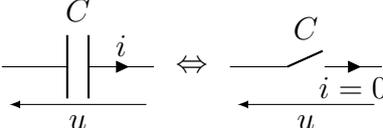
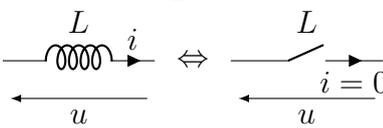
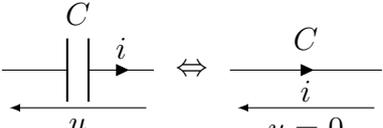
**Démonstration** On étudie une bobine d'inductance  $L$  :

- Q1. Établir l'expression de son impédance complexe et de son admittance complexe.
- Q2. En déduire les comportements de la résistance à basse et haute fréquence.
- Q3. Déterminer le déphasage entre la tension à ses bornes et l'intensité qui le traverse. Qui, de la tension ou de l'intensité, est en avance sur l'autre ?
- Q4. Représenter  $u$  et  $i$  sur le même graphique en fonction du temps.

**Démonstration** On étudie un condensateur de capacité  $C$  :

- Q1. Établir l'expression de son impédance complexe et de son admittance complexe.
- Q2. En déduire les comportements de la résistance à basse et haute fréquence.
- Q3. Déterminer le déphasage entre la tension à ses bornes et l'intensité qui le traverse. Qui, de la tension ou de l'intensité, est en avance sur l'autre ?
- Q4. Représenter  $u$  et  $i$  sur le même graphique en fonction du temps.

♥ Bilan

	Résistance	Bobine	Condensateur
Schéma			
Impédance complexe	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$
Impédance	$Z_R = R$	$Z_L = L\omega$	$Z_C = \frac{1}{C\omega}$
Admittance complexe	$\underline{Y}_R = \frac{1}{R}$	$\underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}$	$\underline{Y}_C = jC\omega$
$\omega \rightarrow 0$	$Z_R \rightarrow R$	$Z_L \rightarrow 0$ 	$Z_C \rightarrow \infty$ 
$\omega \rightarrow \infty$	$Z_R \rightarrow R$	$Z_L \rightarrow \infty$ 	$Z_C \rightarrow 0$ 

## II.2 Lois de nœuds et loi des mailles en RSF

Les loi des nœuds et loi des mailles (ou lois de Kirchhoff) s'écrivent en RSF comme en régime permanent, tant que l'on se trouve dans le cadre de l'ARQS. On utilise **la notation complexe**.

### ♥ Lois de Kirchhoff

- Dans une maille orientée, la somme algébrique des tensions complexes est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{u}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{U}_{m,k} = 0$$

avec  $\varepsilon_k = +1$  si la flèche de  $\underline{u}_k$  est dans le sens d'orientation de la maille, et  $\varepsilon_k = -1$  si la flèche de  $\underline{u}_k$  est en sens opposé au sens d'orientation de la maille.

- En un nœud, la somme algébrique des intensités complexes est nulle :

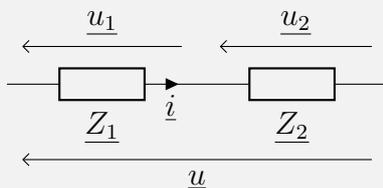
$$\sum_k \varepsilon_k \underline{i}_k = 0 \Leftrightarrow \sum_k \varepsilon_k \underline{I}_{m,k} = 0$$

avec  $\varepsilon_k = +1$  si le courant  $\underline{i}_k$  arrive dans le nœud et  $\varepsilon_k = -1$  si le courant  $\underline{i}_k$  part du nœud.

## II.3 Associations d'impédances

### 🔪 Démonstration

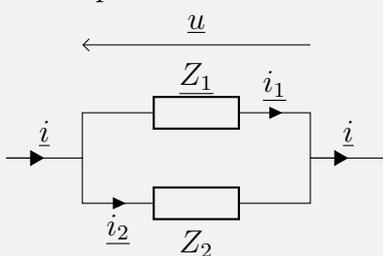
On considère deux dipôles d'impédances complexes  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  en série. On note  $\underline{u}_1$  la tension aux bornes de  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{u}_2$  la tension aux bornes de  $\underline{Z}_2$ . La tension aux bornes de l'ensemble est notée  $\underline{u}$ , et l'intensité du courant à travers les deux résistances est notée  $\underline{i}$ . On se place en convention récepteur.



- Établir la relation donnant  $\underline{u}$  en fonction de  $\underline{i}$ .
- En déduire que l'association des deux impédances complexes  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  en série est équivalente à une unique impédance complexe  $\underline{Z}_{\text{éq}}$  dont on donnera l'expression.

### 🔪 Démonstration

On considère deux impédances complexes  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  en parallèle. On note  $\underline{i}_1$  l'intensité du courant à travers  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{i}_2$  l'intensité du courant à travers  $\underline{Z}_2$ . La tension aux bornes de l'association parallèle est notée  $\underline{u}$ , et l'intensité du courant qui arrive en entrée de l'association parallèle est notée  $\underline{i}$ . Tous les composants sont en convention récepteur.



- En utilisant une loi des nœuds, établir l'expression de  $\underline{i}$  en fonction de  $\underline{u}$ .
- Mettre cette expression sous la forme  $\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_{\text{éq}}}$ , en précisant l'expression de  $\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}}$  en fonction de  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$ .



## Associations d'impédances complexes

### Association en série :

L'impédance complexe du dipôle constitué par l'association série de deux dipôles d'impédances complexes  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  est :

$$\underline{Z}_{\text{éq,S}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

### Association en parallèle :

L'impédance complexe du dipôle constitué par l'association parallèle de deux dipôles d'impédances complexes  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  vérifie :

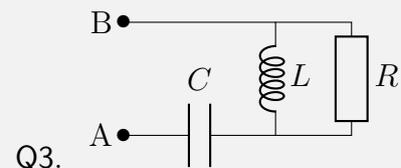
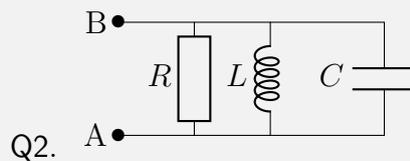
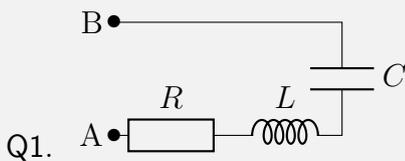
$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{éq,P}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Y}_{\text{éq,P}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

avec  $\underline{Y}$  l'admittance complexe.



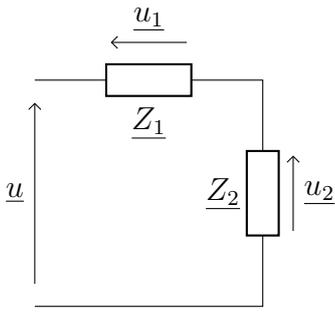
## Exercice de cours (B)

Pour chacun des circuits suivants, exprimer l'impédance complexe  $\underline{Z}_{AB}$  équivalente au dipôle AB. On notera  $\omega$  la pulsation des grandeurs électriques.



II.4 Ponts diviseurs en RSF

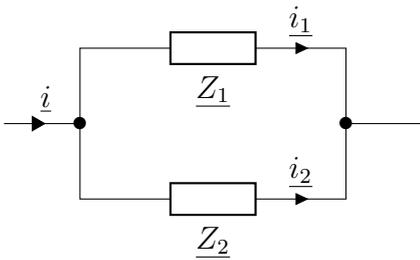
♥ Pont diviseur de tension



La formule du pont diviseur de tension est encore valable avec les impédances complexes, avec la même hypothèse d'un courant identique dans les deux dipôles :

$$\underline{u}_1 = \underline{u} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

♥ Pont diviseur de courant



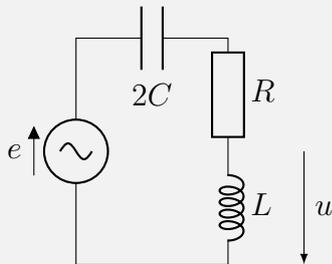
La formule du pont diviseur de courant est encore valable avec les impédances complexes, avec la même hypothèse d'une tension identique aux bornes des deux dipôles :

$$\underline{i}_1 = \underline{i} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

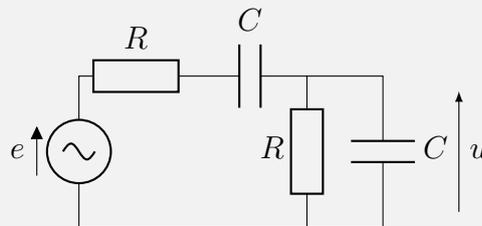
💣 Exercice de cours ©

Établir les expressions, en utilisant la notation complexe, de  $\underline{u}$  en fonction de  $\underline{e}$  et  $\underline{i}_1$  en fonction de  $\underline{i}_0$  pour les circuits ci-dessous.

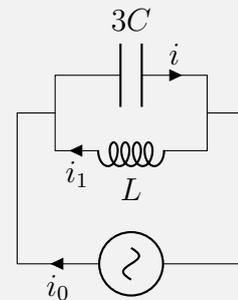
Q1.



Q2.



Q3.



### III Circuit $RLC$ en régime sinusoïdal forcé

#### III.1 Définition

##### ♥ Définition

**Résonance** : lorsque l'amplitude de la réponse sinusoïdale d'un système à une excitation sinusoïdale, d'amplitude fixe mais de fréquence variable, passe par un maximum pour une valeur  $f_0$  de la fréquence, on parle de résonance.  $f_0$  est appelée fréquence de résonance.



##### Remarque

- Il existe deux phénomènes de résonance observables avec un circuit  $RLC$  série : la résonance en charge (= résonance en tension aux bornes du condensateur) et la résonance en intensité.

#### III.2 Résonance en tension aux bornes de $C$

##### Démonstration

On cherche à déterminer les caractéristiques de la tension aux bornes du condensateur  $u_C(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_u)$  dans le circuit  $RLC$  série alimenté par un générateur de fem  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ , une fois le régime transitoire terminé.

#### Circuit et comportement qualitatif

- Q1. Représenter le circuit permettant de visualiser à l'oscilloscope la tension délivrée par le générateur et la tension aux bornes du condensateur, et positionner les différents courants et tensions afin que le générateur soit en convention générateur et les autres dipôles en convention récepteur.

- Q2. Déterminer, à l'aide des comportements asymptotiques des dipôles, la valeur de  $U_{Cm}$  à basse et haute fréquences.

### Amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur

- Q3. Établir l'expression de  $\underline{u}_C(t)$ , puis de  $\underline{U}_{Cm}$  en fonction de  $E_m$ ,  $\omega$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $R$ .

Mettre  $\underline{U}_{Cm}$  sous la forme :  $\underline{U}_{Cm}(\omega) = \frac{E_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$ , et vérifier que les expressions de  $\omega_0$  et  $Q$

sont celles définies au chapitre 6.

- Q4. Exprimer  $\underline{U}_{Cm}$  quand  $\omega \ll \omega_0$  et  $\underline{U}_{Cm}$  quand  $\omega \gg \omega_0$ . Au dénominateur de  $\underline{U}_{Cm}$ , on ne gardera que LE terme dominant. En déduire les limites de  $\underline{U}_{Cm}$ . Commenter physiquement les deux cas limites.

Q5. Exprimer l'amplitude  $U_{C_m}$  de la tension aux bornes du condensateur.

Q6. Établir le tableau de variation de  $U_{C_m}(\omega)$ . Pour cela on pourra poser  $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$  et introduire la fonction  $f(X)$  telle que  $f(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q^2}$ .

Tableaux de variation :

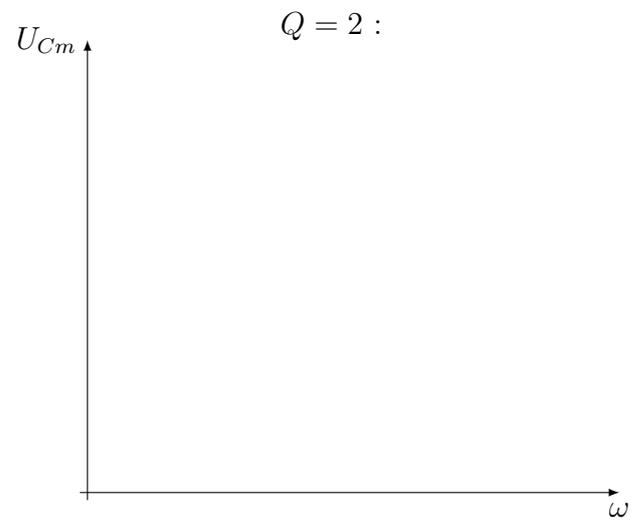
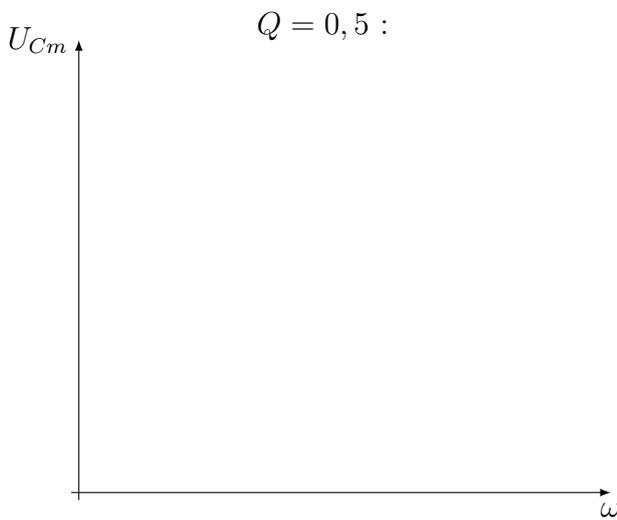
Pour  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  :

$\omega$	0	$+\infty$
$f'(X)$		
$U'_{Cm}(\omega)$		
$U_{Cm}(\omega)$		

Pour  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  :

$\omega$	0	$+\infty$
$f'(X)$		
$U'_{Cm}(\omega)$		
$U_{Cm}(\omega)$		

Q7. Tracer l'allure de  $U_{Cm}(\omega)$  pour  $Q = 0,5$  et  $Q = 2$ , en faisant apparaître clairement les points particuliers d'abscisses  $\omega = 0$ ,  $\omega = \omega_0$  et  $\omega = \omega_r$ .



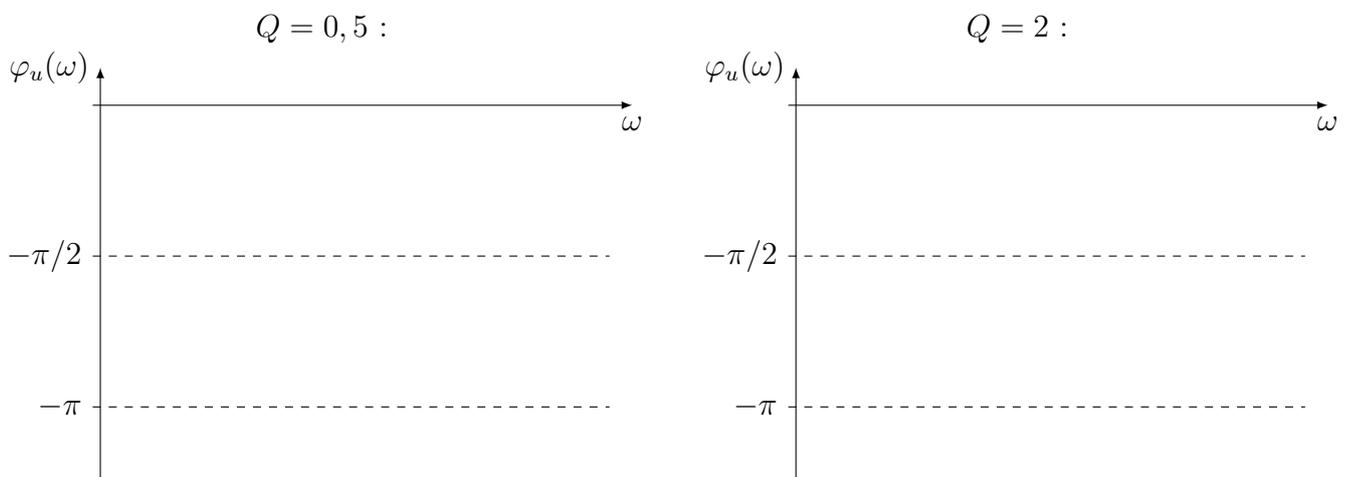
Q8. Quelle est l'influence du facteur de qualité sur la résonance en tension aux bornes du condensateur ?

### Étude du déphasage

Q9. À partir des limites de  $U_{Cm}$ , déterminer les limites de  $\varphi_u$ , le déphasage de la réponse  $U_{Cm}(t)$  par rapport à l'excitation  $e(t)$ .

Q10. Déterminer la valeur du déphasage en  $\omega_0$ .

Q11. Montrer que  $\varphi_u(\omega) < 0$  puis tracer l'allure de  $\varphi_u(\omega)$  pour  $Q = 0,5$  et  $Q = 2$ .



♥ Résonance en tension aux bornes du condensateur

	RLC série aux bornes de $C$
Excitation	$e(t) = E_m \cos(\omega t)$
Équation différentielle	$L \frac{d^2 u_c}{dt^2} + R \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{C} u_c = \frac{1}{C} e(t)$
Réponse de l'oscillateur en RSF, une fois le régime transitoire terminé	$u_c(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi)$
Amplitude complexe	$\underline{U_{Cm}}(\omega) = \frac{E_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$
Pulsation propre [rad/s]	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité [sans unité]	$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
Graphes de l'amplitude	<p>Amplitude de la réponse</p> <p>The graph shows the amplitude <math>U_{Cm}</math> on the vertical axis versus angular frequency <math>\omega</math> on the horizontal axis. Two curves are shown: one for <math>Q &gt; \frac{1}{\sqrt{2}}</math> which has a sharp resonance peak at <math>\omega_r</math> with a maximum value of <math>Q E_m</math>, and one for <math>Q &lt; \frac{1}{\sqrt{2}}</math> which is flatter and lower in amplitude. The natural frequency <math>\omega_0</math> is also indicated on the horizontal axis.</p>
Graphes de la phase	<p>Déphasage de la réponse par rapport à l'excitation</p> <p>The graph shows the phase shift <math>\varphi</math> on the vertical axis versus angular frequency <math>\omega</math> on the horizontal axis. The phase starts at 0 for low frequencies and decreases towards <math>-\pi</math> as frequency increases. At the natural frequency <math>\omega_0</math>, the phase shift is <math>-\frac{\pi}{2}</math>.</p>

### III.3 Résonance en intensité

#### Démonstration

On étudie l'intensité, une fois le régime transitoire terminé, dans le circuit RLC série alimenté par un générateur idéal de fem  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ .

#### Circuit et comportement qualitatif

- Q1. Représenter le circuit permettant de visualiser à l'oscilloscope la tension délivrée par le générateur et l'intensité du courant électrique, et positionner les différents courants et tensions afin que le générateur soit en convention générateur et les autres dipôles en convention récepteur.
- Q2. Déterminer, à l'aide des comportements asymptotiques des dipôles, la valeur de  $I_m$  à basse et haute fréquences.

#### Amplitude complexe de l'intensité

Le circuit étant alimenté par un GBF délivrant une tension sinusoïdale et comme tous les composants sont linéaires, tous les signaux (tensions et intensités) sont sinusoïdaux à la pulsation  $\omega$  du GBF.

- Q3. Déterminer, en notation complexe, l'intensité  $\underline{i}(t)$ , puis son amplitude complexe  $\underline{I}_m$ .

La mettre sous la forme :  $\underline{I}_m(\omega) = \frac{A}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$  et identifier les trois constantes  $A$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .

Q4. Déterminer  $I_m$  quand  $\omega \ll \omega_0$  et quand  $\omega \gg \omega_0$ . On ne gardera que LE terme dominant au dénominateur.

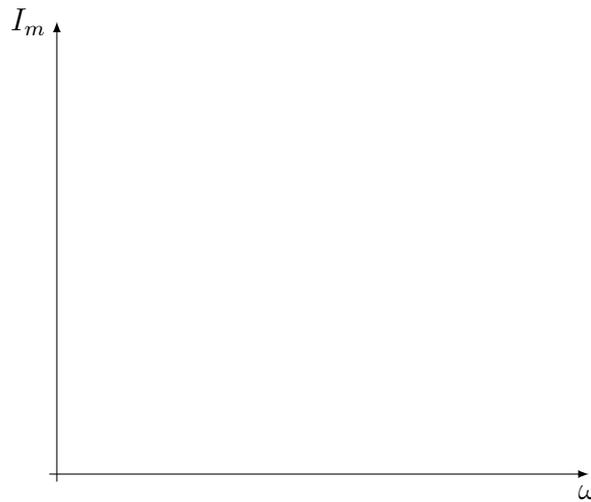
### Étude de l'amplitude $I_m$

Q5. Établir l'expression de  $I_m(\omega)$ .

Q6. Étudier les limites à basse et haute fréquences.

Q7. Étudier l'existence d'une résonance.

Q8. Tracer l'allure de  $I_m(\omega)$ .



Q9. Déterminer les expressions des pulsations de coupure en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

Q10. En déduire que la largeur de la bande passante  $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$  est reliée à  $Q$  par :  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ . Que dire de la dépendance de l'acuité de la résonance avec le facteur de qualité ?

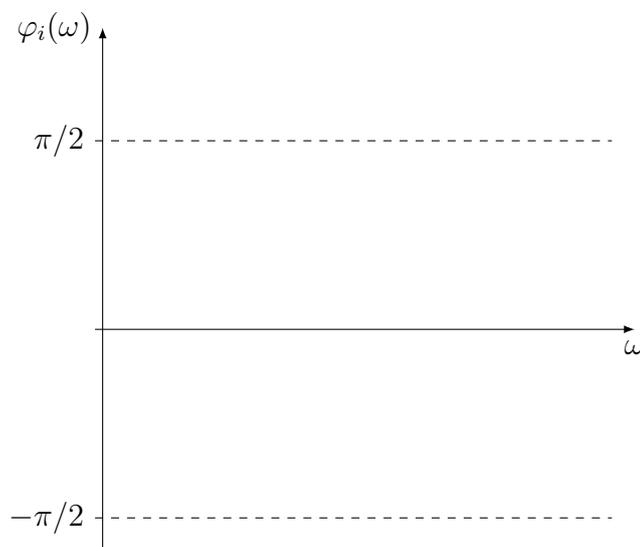
**Étude du déphasage  $\varphi_i$  entre  $i$  et  $e$** 

Q11. Exprimer  $\varphi_i$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .

Q12. Déterminer les limites de  $\varphi_i$  quand  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$ .

Q13. Que vaut le déphasage à la résonance? Comment sont  $e(t)$  et  $i(t)$  à la résonance?

Q14. Tracer l'allure de  $\varphi_i(\omega)$ .



### III.4 Utilisation des graphes

#### ★ Méthode

**Méthode : Déterminer graphiquement  $\omega_0$  et  $Q$**  quand sont fournies les courbes d'amplitude  $U_{Cm}$  et de phase  $\varphi$  en présence d'une résonance du type de la **résonance en tension aux bornes du condensateur** d'un *RLC* série :

- ① Lire  $\omega_0$  sur la courbe de phase :  $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$  ;
- ② 2 méthodes pour déterminer  $Q$  :
  - Lire la pulsation  $\omega_r$  de résonance sur la courbe d'amplitude  $U_{Cm}$  :  $\omega_r$  est la pulsation à laquelle  $U_{Cm}$  est maximale, puis en déduire le facteur de qualité  $Q$  grâce à la relation :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$
  - ou sur la courbe d'amplitude  $U_{Cm}$ , lire l'amplitude  $U_{Cm}(\omega_0)$  en  $\omega_0$  et l'amplitude  $U_{Cm}(0)$  en  $\omega = 0$ . Utiliser ensuite la relation  $U_{Cm}(\omega_0) = Q \times U_{Cm}(0)$  pour en déduire  $Q$ .
- ② Déterminer la largeur de la bande passante  $\Delta\omega$  :
  - Lire la valeur maximale de l'amplitude  $U_{Cm \max} = U_{Cm}(\omega_r)$  ;
  - Calculer  $\frac{U_{Cm \max}}{\sqrt{2}}$  ;
  - Lire les abscisses  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$  pour lesquelles l'amplitude vaut  $\frac{U_{Cm \max}}{\sqrt{2}}$  ;
  - En déduire  $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ .

#### ★ Méthode

**Méthode : Déterminer graphiquement  $\omega_0$  et  $Q$**  quand sont fournies les courbes d'amplitude  $I_m$  et de phase  $\varphi$  en présence d'une résonance du type de la **résonance en intensité** d'un *RLC* série :

- ① Lire  $\omega_0$  :
  - sur la courbe de phase :  $\varphi(\omega_0) = 0$  ;
  - ou sur la courbe d'amplitude :  $\omega_0$  est la pulsation pour laquelle l'amplitude est maximale
- ② Déterminer la largeur de la bande passante  $\Delta\omega$  :
  - Lire la valeur maximale de l'amplitude  $I_{m, \max} = I_m(\omega_0)$  ;
  - Calculer  $\frac{I_{m, \max}}{\sqrt{2}}$  ;
  - Lire les abscisses  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$  pour lesquelles l'amplitude vaut  $\frac{I_{m, \max}}{\sqrt{2}}$  ;
  - En déduire  $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ .
- ③ En déduire le facteur de qualité  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ .