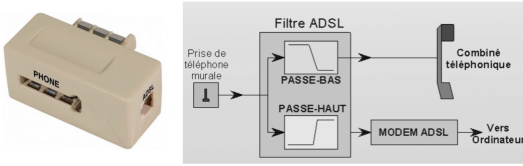


# Chapitre 15 : Filtrage linéaire

Les signaux reçus sont souvent la superposition d'un ensemble de signaux :



- les signaux utiles, par ex signal téléphonique + signal informatique en entrée d'une prise ADSL ;
- les signaux parasites appelés « bruits » générés par l'environnement ;

et il est souvent nécessaire d'en extraire un parmi tous : c'est le but des filtres.

Un filtre est un quadripôle qui ne transmet que les signaux dont les fréquences appartiennent à une certaine plage appelée à **bande passante**. Idéalement, les signaux dont la fréquence est en dehors de la bande passante sont arrêtés par le filtre. Dans la pratique, ils doivent être suffisamment atténués pour pouvoir être négligés.



## Plan du cours

### I Signaux périodiques

I.1 Caractéristiques d'un signal périodique . . . .	2
I.2 Mesures au multimètre . . . . .	3
I.3 Développement en série de Fourier . . . . .	3
I.4 Analyse spectrale . . . . .	4
I.5 Signaux complexes . . . . .	6

### II Fonction de transfert

II.1 Filtre linéaire . . . . .	6
II.2 Différents types de filtres . . . . .	6
II.3 Fonction de transfert harmonique . . . . .	7
II.4 Diagramme de Bode . . . . .	7
II.5 Bande passante . . . . .	8
<b>III Étude de différents filtres</b>	<b>9</b>
III.1 Méthode pour l'étude des filtres . . . . .	9
III.2 Filtre passe-bas du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	9
III.3 Filtre passe-haut du 1 <sup>er</sup> ordre . . . . .	13
III.4 Filtre passe-bande . . . . .	16

## À savoir

Signaux périodiques : définition de la valeur moyenne et de la valeur efficace.	I.1
Expression générale de la fonction de transfert harmonique d'un filtre.	II.3
Grandeurs représentées sur un diagramme de Bode (amplitude et phase)	II.4
Savoir que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques	I.3

## À savoir faire

Déterminer par calcul la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique.	I.1
Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.	I.3 <b>TD4</b>
Utiliser les échelles logarithmiques pour tracer les fonctions de transfert.	I.4
Interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode d'après l'expression de la fonction de transfert.	II.2 <b>TD1</b>
Choisir un modèle de filtre en fonction du cahier des charges.	<b>TD4</b>
Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 et ses représentations graphiques pour conduire l'étude de la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.	I.2 <b>TD1</b>

# I Signaux périodiques

## I.1 Caractéristiques d'un signal périodique

### ♥ Définition

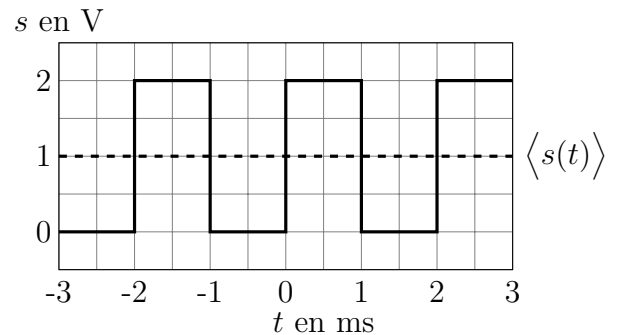
**Valeur moyenne :** La valeur moyenne d'un signal  $s(t)$ , de période  $T$ , est notée  $\langle s(t) \rangle$  et vaut :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$



### Remarque

Pour déterminer la valeur moyenne sur une représentation graphique du signal  $s(t)$ , on prend l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses sur une période puis on divise par la valeur de la période  $T$  pour que le résultat soit homogène.



### ♥ Définition

**Valeur efficace :** La valeur efficace de  $s$ , notée  $S_{\text{eff}}$ , est définie par :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (s(t))^2 dt}$$

C'est la racine de la valeur moyenne du carré de  $s$ .

### 💣 Exercice de cours (A)

- Q1. Déterminer la valeur moyenne du signal  $i(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ .
- Q2. Déterminer sa valeur efficace.
- Q3. En déduire, sans calculer d'intégrale, la valeur moyenne et la valeur efficace de  $u(t) = A_0 + A \sin(\omega t)$ .

### 💡 Remarques

- La valeur efficace d'un signal purement sinusoïdal de valeur moyenne nulle est égale à son amplitude divisée par  $\sqrt{2}$ .
- La valeur efficace d'un signal triangulaire centré sur 0 d'amplitude  $S_m$  vaut :  $S_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{3}}$
- La valeur efficace d'un signal créneau centré sur 0 d'amplitude  $S_m$  vaut :  $S_{\text{eff}} = S_m$
- La valeur de la tension notée sur les appareils électriques domestiques est donnée en valeur efficace d'une tension sinusoïdale. En France, on utilise majoritairement une tension  $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$  ce qui correspond à une amplitude  $U_m = 325 \text{ V}$ .

## 1.2 Mesures au multimètre

Mode	Grandeur mesurée	Pour $u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$
DC	Valeur moyenne (composante continue)	$U_{\text{DC}} = U_0$
AC	Valeur efficace de la partie variable du signal	$U_{\text{AC}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$
AC + DC	Valeur efficace du signal complet	$U_{\text{AC+DC}} = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_m^2}{2}}$

## 1.3 Développement en série de Fourier

### ♥ Propriété

#### Développement en série de Fourier d'un signal périodique :

Un signal  $y$  périodique de période  $T$  et de fréquence  $f$  peut s'écrire comme la somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de la fréquence  $f$  du signal  $y(t)$ .

Le **développement en série de Fourier** de  $y$  s'écrit :

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n))$$

- avec :
- $A_0$  = composante continue, c'est la moyenne du signal
  - $f$  = fréquence de  $y(t)$ , également la **fréquence du fondamental**  $f_1$  ( $n = 1$ )
  - $f_n$  =  $n f$  = fréquence de l'**harmonique de rang**  $n$
  - $A_n$  = amplitude de l'harmonique d'ordre  $n$
  - $\varphi_n$  = la phase à l'origine des temps de l'harmonique d'ordre  $n$

### 💡 Remarque

La valeur efficace  $Y_{\text{eff}}$  d'un signal  $y$  périodique de période  $T$  dont le développement de Fourier est donné par  $y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)$ , dont la  $n^{\text{ième}}$  harmonique  $y_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$  est de valeur efficace  $Y_{n,\text{eff}} = \frac{A_n}{\sqrt{2}}$  est telle que :

$$Y_{\text{eff}}^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n,\text{eff}}^2$$

**Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.**

## 1.4 Analyse spectrale

L'analyse spectrale est l'opération qui consiste à déterminer les signaux sinusoïdaux composant un signal donné. En TP, on verra comment réaliser une telle opération avec l'oscilloscope ou un logiciel de traitement de données (regressi, latispro).

L'analyse spectrale permet de connaître :

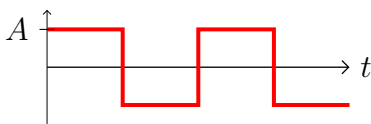
- les fréquences  $f_n$  des composantes sinusoïdales contenues dans le signal
- l'amplitude  $A_n$  de chaque composante sinusoïdale de fréquence  $f_n$
- la phase à l'origine de chaque composante sinusoïdale de fréquence  $f_n$

### ♥ Définition

**Spectre en amplitude :** il représente les amplitudes  $A_n$  en fonction des fréquences  $f_n$  (ou des pulsations  $\omega_n = 2\pi \times f_n$ ), ce qui permet de voir l'importance relative des différents harmoniques présents dans le signal.

Le spectre en amplitude se représente sous la forme de barres verticales de hauteur  $A_n$  et d'abscisse  $f_n$ .

### Exemple :



Le développement en série de Fourier pour le signal carré d'amplitude  $A$  est donné par :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\omega t)$$

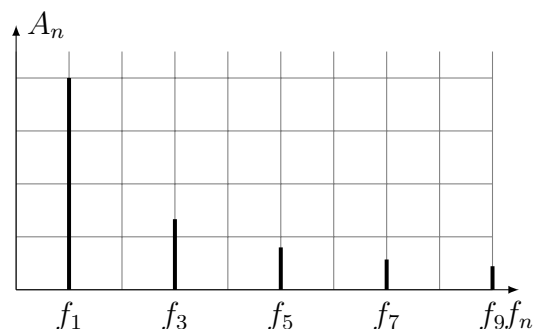
Ce signal ne se décompose donc qu'avec des harmoniques impairs :

$f_1$  d'amplitude  $A_1 = \frac{4A}{\pi}$ ,

$f_3$  d'amplitude  $A_3 = \frac{4A}{3\pi}$ ,

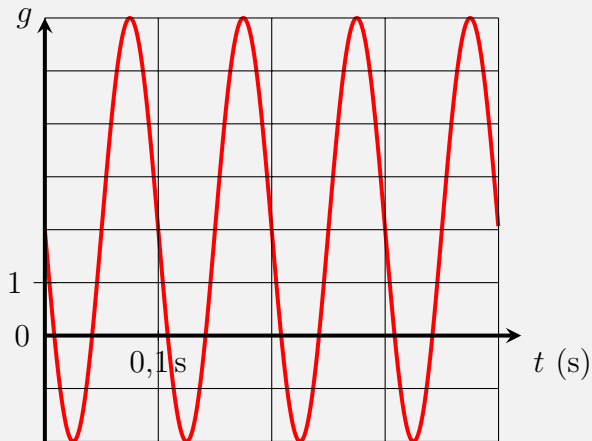
$f_5$  d'amplitude  $A_5 = \frac{4A}{5\pi}$ ,

etc.

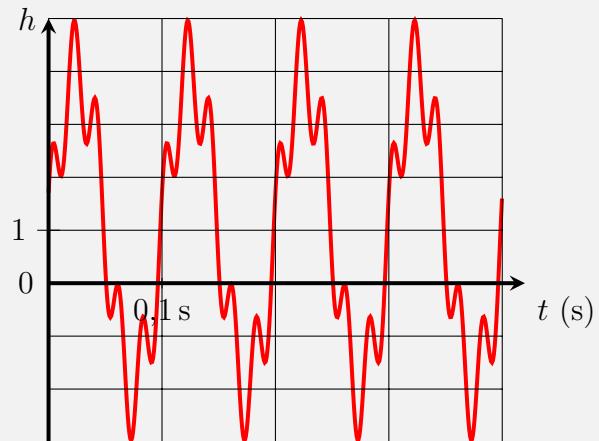


## Exercice de cours (B)

$$g(t) = 2 + 4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$h(t) = 1 + 3 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3\omega t) + \cos\left(5\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$



Pour chacun des deux signaux représentés ci-dessus :

- Q1. Déterminer la période, en déduire leur fréquence et leur pulsation.
- Q2. Déterminer les valeurs des amplitudes  $A_n$ , des phases à l'origine des temps  $\varphi_n$  et des pulsations  $\omega_n$  des différents harmoniques.
- Q3. Représenter les spectres en amplitude.

## I.5 Signaux complexes

L'étude d'un filtre linéaire est menée en régime sinusoïdal, en utilisant la notation complexe :

- Au signal d'entrée  $u_e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ , on associe le signal complexe :

$$\underline{u}_e(t) = \underline{U}_{em} e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{U}_{em} = U_{em} e^{j\varphi_e}$$

- Au signal de sortie  $u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$ , on associe le signal complexe :

$$\underline{u}_s(t) = \underline{U}_{sm} e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{U}_{sm} = U_{sm} e^{j\varphi_s}$$

## II Fonction de transfert

### II.1 Filtre linéaire

#### ♥ Définition

**Filtre linéaire :** Un filtre est linéaire si le principe de superposition s'applique : si  $s_1(t)$  est la réponse du filtre à  $e_1(t)$  et  $s_2(t)$  est la réponse du filtre à  $e_2(t)$  alors :  $[\alpha.s_1(t) + \beta.s_2(t)]$  est la réponse du filtre à  $[\alpha.e_1(t) + \beta.e_2(t)]$ .



$$e(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t) \quad \text{enters} \quad \text{filtre} \quad \text{exits} \quad s(t) = \alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$$

Un filtre linéaire :

- ne contient que des composants linéaires ;
- est un système régi par une équation différentielle linéaire entre le signal d'entrée  $e(t)$  (= signal d'origine) et le signal de sortie  $s(t)$  (= signal filtré) ;
- renvoie un signal de sortie de même pulsation  $\omega$  que le signal sinusoïdal envoyé en entrée.



#### Remarques

- Un filtre ne permettant d'amplifier (au sens de la puissance) aucune composante spectrale sera appelé **filtre passif** et à l'inverse, on parlera de **filtre actif**.
- Un filtre actif amène de l'énergie au système et nécessite donc une alimentation extérieure. Les filtres étudiés cette année seront obtenus par association de composants passifs (résistance, bobine, capacité) donc ils seront eux-mêmes passifs.

### II.2 Différents types de filtres

#### ♥ Définition

Selon les fréquences des signaux transmis par un filtre, on définit :

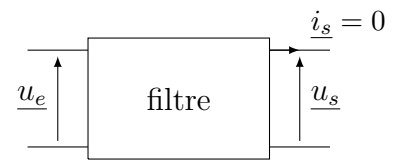
- un filtre **passé-bas** comme un filtre transmettant les signaux à basse fréquence et coupant les signaux à haute fréquence ;
- un filtre **passé-haut** comme un filtre coupant les signaux à basse fréquence et transmettant les signaux à haute fréquence ;
- un filtre **passé-bande** comme un filtre coupant les signaux à basse fréquence et les signaux à haute fréquence et transmettant des signaux de fréquence intermédiaire (autour d'une certaine fréquence).

## II.3 Fonction de transfert harmonique

### ♥ Définition

Lorsque le signal d'entrée  $u_e$  est sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , le signal de sortie  $u_s$  l'est également et on définit la **fonction de transfert harmonique** du quadripôle (à vide :  $i_s = 0$ ) par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$$



avec  $\underline{u}_e = \underline{U}_{em}e^{j\omega t}$  et  $\underline{u}_s = \underline{U}_{sm}e^{j\omega t}$ , donc en simplifiant par  $e^{j\omega t}$ ,  $\underline{H}$  peut s'écrire comme la fonction complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_{sm}}{\underline{U}_{em}} = \frac{U_{sm}}{U_{em}} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$$

- de module  $|\underline{H}(j\omega)|$ , appelé **gain**, noté  $G$ , sans dimension :  $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{U_{sm}}{U_{em}}$
- d'argument  $\phi(\omega)$ , appelé **phase**, noté  $\phi$ , en radians :  $\phi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \varphi_s - \varphi_e$   
c'est le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée.



### Remarques

- La fonction de transfert peut s'écrire :  $\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ .
- On a donc  $U_{sm}e^{j(\omega t + \varphi_s)} = G(\omega) \times U_{em}e^{j(\omega t + \phi(\omega) + \varphi_e)}$ .
- Le filtre transforme donc le signal d'entrée  $u_e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$  en signal de sortie  $u_s(t) = G(\omega)E_m \cos(\omega t + \phi(\omega) + \varphi_e)$

### ♥ Définition

**Ordre d'un filtre** : On admet que toute fonction de transfert  $\underline{H}$  peut se mettre sous la forme d'une fraction irréductible de deux polynômes,  $\underline{N}$  et  $\underline{D}$ , de variable  $j\omega$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$$

L'**ordre du filtre** correspond au degré de  $\underline{D}$ .

## II.4 Diagramme de Bode

### ♥ Définition

**Diagramme de Bode** : Le diagramme de Bode d'un filtre est la donnée de deux diagrammes :

- le **diagramme en gain** : on représente le gain en décibels  $G_{dB}$  de la fonction de transfert en fonction de la pulsation  $\omega$  (ou de la fréquence  $f$ ), défini par :

$$G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$$

- le **diagramme en phase** : on représente l'argument de la fonction de transfert  $\phi$  en fonction de la pulsation  $\omega$  (ou de la fréquence  $f$ ), défini par :

$$\phi = \arg(\underline{H})$$

Pour ces deux diagrammes l'axe des abscisses ( $\omega$  ou  $f$ ) est en **en échelle logarithmique**.

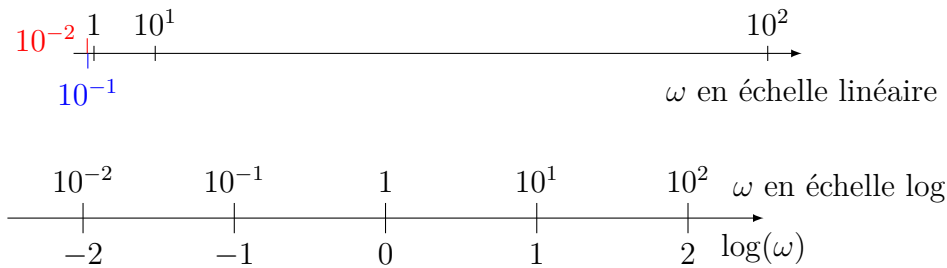
 **Remarque**

On peut aussi tracer le diagramme de Bode en utilisant une abscisse adimensionnée  $\frac{\omega}{\omega_{\text{réf}}}$ , où  $\omega_{\text{réf}}$  est une pulsation de référence.

 **Méthode : échelle logarithmique**

Dans les diagrammes de Bode, en abscisse, la pulsation est représentée à l'aide d'une **échelle logarithmique**. En passant d'une graduation à une autre, la pulsation est multipliée par un facteur 10.

On utilise l'échelle logarithmique, car un changement d'un ordre de grandeur en  $\omega$  correspond seulement à un changement d'une unité en  $\log(\omega)$ . Ainsi, en échelle log, on peut représenter des variations de  $\omega$  bien plus importantes qu'en échelle linéaire.



 **Définition**

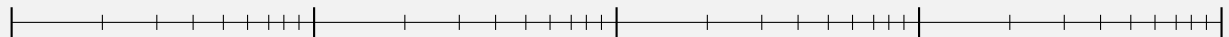
**Décade** : Chaque intervalle de pulsation  $[10^n, 10^{n+1}]$  est appelé **décade**.

 **Remarque**

Chaque décade occupe la même « place » en échelle logarithmique. Sur une échelle logarithmique, il y a la même précision entre 10 et 100 Hz qu'entre  $10^4$  et  $10^5$  Hz.

 **Application directe**

Si sur l'échelle logarithmique ci-dessous,  $1 \times 10^{-1}$  Hz est la fréquence minimale lue, placer les fréquences suivantes :  $2 \times 10^{-1}$  Hz ; 50 Hz ; 8 Hz ; 200 Hz ; 1,2 Hz.



**II.5 Bande passante**

 **Définition**

**Bande passante** : La bande passante à  $-3$  dB est l'intervalle de pulsations tel que :

$$G(\omega) > \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\text{dB}}(\omega) > G_{\text{dB,max}} - 3\text{dB}$$

car  $20 \log(\sqrt{2}) \approx 3\text{dB}$

On définit la (ou les) **pulsation(s) de coupure** notée  $\omega_c$  par la relation :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB,max}} - 3\text{dB}$$



### III Étude de différents filtres

#### III.1 Méthode pour l'étude des filtres

##### ★ Méthode : Déterminer la nature d'un filtre sans calcul

###### Étude à basse fréquence :

- ① Représenter le circuit en remplaçant les condensateurs par des interrupteurs ouverts et les bobines par des fils.
- ② En déduire les intensités qui sont nulles (celles qui traversent les branches contenant un interrupteur ouvert) et les tensions qui sont nulles (celles aux bornes d'un fil).
- ③ Exprimer  $u_s$  en fonction de  $u_e$  et de résistances éventuelles présentes dans le circuit. Pour cela, un pont diviseur de tension ou de courant suffit en général.

⚠ Ce n'est que le lien entre  $u_s$  et  $u_e$  qui vous permettra de conclure. Il ne doit y avoir aucune autre grandeur électrique que  $u_e$  dans l'expression de  $u_s$  pour conclure.

###### Étude à haute fréquence :

Reprendre les mêmes étapes qu'à basse fréquence (avec les équivalences HF cette fois : condensateurs  $\leftrightarrow$  fils et bobines  $\leftrightarrow$  interrupteurs ouverts)

###### Conclusion :

- Si  $u_s = f(u_e) \neq 0$  à BF et  $u_s = 0$  à HF : c'est un filtre passe-bas
- Si  $u_s = 0$  à BF et  $u_s = f(u_e) \neq 0$  à HF : c'est un filtre passe-haut
- Si  $u_s = 0$  à BF et  $u_s = 0$  à HF : c'est un filtre passe-bande

##### ★ Méthode : Établir la fonction de transfert

Quand le filtre est à vide ( $i_s = 0$ ), on établit la fonction de transfert en faisant un **pont diviseur de tension**.

Il est parfois nécessaire de procéder à des associations d'impédances au préalable.

##### ★ Méthode : Déterminer la bande passante par le calcul

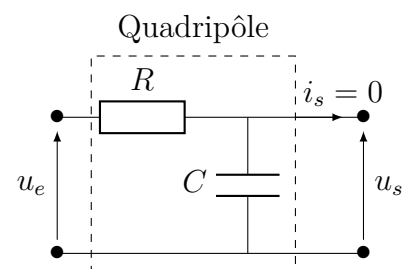
- ① Utiliser l'expression du gain (et non du gain en décibels) ;
- ② Déterminer l'expression du gain maximal  $G_{\max}$  (⚠ pas en décibels) ;
- ③ Résoudre l'équation en  $\omega_c$  :  $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ .

#### III.2 Filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre

**Exemple :** On étudie le quadripôle constitué d'une résistance  $R$  et d'un condensateur de capacité  $C$ , alimenté par une tension sinusoïdale  $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$ .

On le considère en sortie ouverte ( $i_s = 0$ ), ce qui est le cas lorsqu'on branche un oscilloscope en sortie dont la résistance d'entrée

$$R_e = 1 \text{ M}\Omega \gg R, \frac{1}{C\omega}.$$



## a) Étude qualitative

 **Application directe**

Vérifier sans calcul que le quadripôle représenté ci-avant est un filtre passe-bas.

## b) Fonction de transfert

 **Application directe**

À l'aide de la relation du pont diviseur de tension, déterminer le lien entre  $\underline{u}_s$  et  $\underline{u}_e$ , et en déduire l'expression de la fonction de transfert.

 **Application directe**

La mettre sous la forme  $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$  et identifier les expressions de  $H_0$  et  $\omega_0$ .

 **Application directe**

En étudiant le comportement aux limites de la fonction de transfert, déterminer la nature et l'ordre du filtre.

## c) Gain et bande passante

 **Application directe**

Exprimer le gain  $G(\omega)$  à partir de la fonction de transfert.

 **Application directe**

Quelle est la valeur maximale du gain ?

 **Application directe**

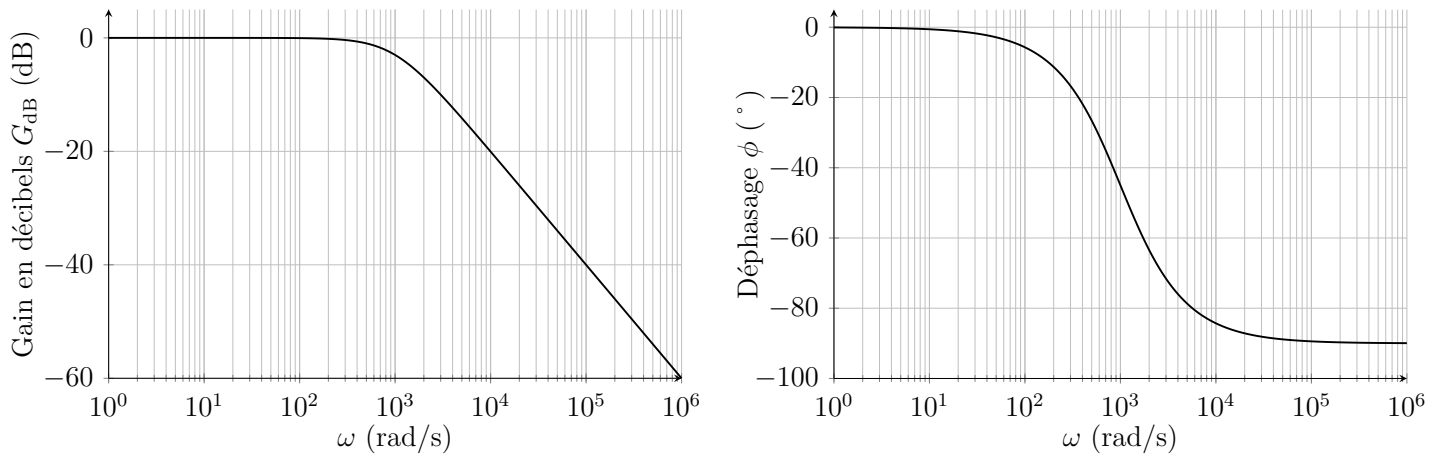
Après avoir rappelé la définition de la pulsation de coupure, établir son expression.

 **Application directe**

En déduire l'expression de la largeur de la bande passante.

### d) Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode associé à la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre  $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$  est représenté ci-dessous :



#### Application directe

Déterminer graphiquement les caractéristiques des asymptotes.

#### Application directe

Déterminer l'approximation de la fonction de transfert à basse fréquence et en déduire les équations des asymptotes à basse fréquence. Comparer au diagramme de Bode fourni.

#### Application directe

Déterminer l'approximation de la fonction de transfert à haute fréquence et en déduire les équations des asymptotes à haute fréquence. Comparer au diagramme de Bode fourni.

## Application directe

Déterminer graphiquement la bande passante.

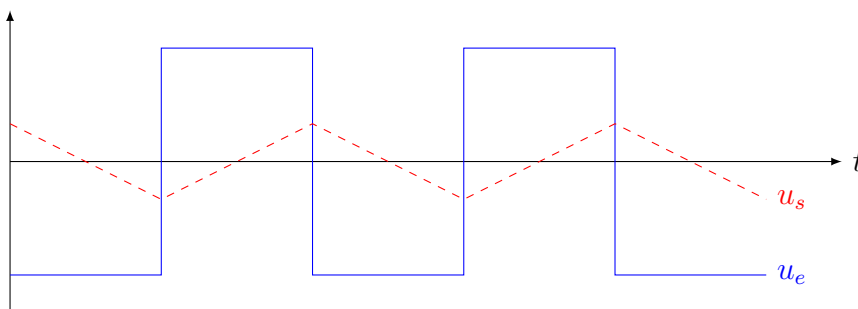
### e) Comportements intégrateur à haute fréquence

En utilisant son approximation à haute fréquence (quand  $\omega \gg \omega_c$ , c'est à dire dans la zone de l'asymptote  $-20$  dB/dec)  $\frac{u_s}{u_e} \approx H_0 \frac{\omega_c}{j\omega}$ , le signal de sortie peut s'exprimer en fonction du signal d'entrée par :

$$u_s(t) = H_0 \omega_c \times \int u_e(t) dt$$

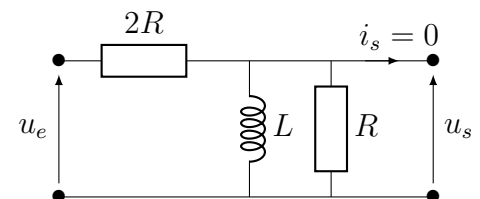
Un filtre passe-bas du premier ordre alimenté par un signal de fréquence très grande devant la fréquence de coupure réalise donc une intégration du signal d'entrée.

**Exemple :** Quand on alimente un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $10$  Hz avec un signal créneau de fréquence  $1$  kHz, on observe une intégration du signal en sortie :



### III.3 Filtre passe-haut du 1<sup>er</sup> ordre

**Exemple :** On étudie le quadripôle ci-contre alimenté par une tension sinusoïdale  $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$ . On le considère en sortie ouverte, donc  $i_s = 0$ .



#### a) Étude qualitative du filtre

## Application directe

Par une étude qualitative du circuit, à basse et haute fréquences, déterminer la nature du filtre.

## b) Fonction de transfert

**Application directe**

À l'aide de la relation du pont diviseur de tension, déterminer le lien entre  $\underline{u}_s$  et  $\underline{u}_e$ .

**Application directe**

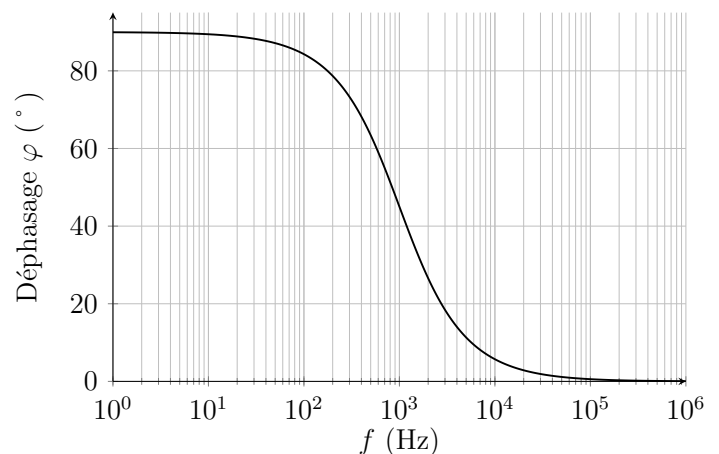
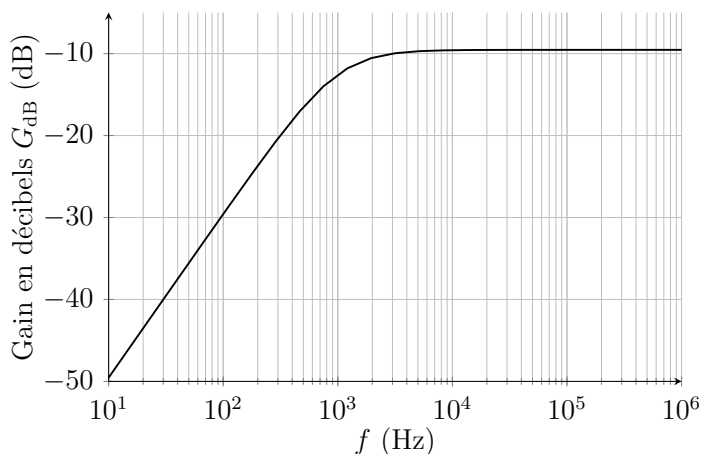
La mettre sous la forme  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{3} \times j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$  et identifier les expressions de  $H_0$  et  $\omega_0$ .

**Application directe**

En identifiant le comportement aux limites de la fonction de transfert, identifier la nature et l'ordre du filtre.

## c) Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode du filtre précédent est représenté ci-dessous :



 **Application directe**

Déterminer graphiquement les caractéristiques des asymptotes.

 **Application directe**

Déterminer l'approximation de la fonction de transfert à basse fréquence et en déduire les équations des asymptotes à basse fréquence. Comparer au diagramme de Bode fourni.

 **Application directe**

Déterminer l'approximation de la fonction de transfert à haute fréquence et en déduire les équations des asymptotes à haute fréquence. Comparer au diagramme de Bode fourni.

 **Application directe**

Déterminer la bande passante.

### d) Comportement dérivateur à basse fréquence

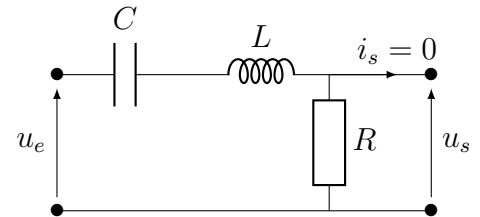
En utilisant son approximation à basse fréquence (quand  $\omega \ll \omega_c$ , c'est à dire dans la zone de l'asymptote  $+20$  dB/dec )  $\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} \approx H_0 \times j \frac{\omega}{\omega_0}$ , le signal de sortie peut s'exprimer en fonction du signal d'entrée par :

$$u_s(t) = \frac{H_0}{\omega_0} \times \frac{du_e(t)}{dt}$$

Un filtre passe-haut du premier ordre alimenté par un signal de fréquence très faible devant la fréquence de coupure réalise donc une dérivation du signal d'entrée.

## III.4 Filtre passe-bande

**Exemple :** On étudie le circuit *RLC* série alimenté par une tension sinusoïdale  $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$ , en sortie ouverte ( $i_s = 0$ ).



### a) Étude qualitative

#### Application directe

Par une étude qualitative du circuit, à basse et haute fréquences, déterminer la nature du filtre.

### b) Fonction de transfert

#### Application directe

À l'aide de la relation du pont diviseur de tension, déterminer le lien entre  $\underline{u}_s$  et  $\underline{u}_e$ .



** Application directe**

La mettre sous la forme  $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$  et identifier les expressions de  $H_0$ ,  $Q$  et  $\omega_0$ .

**c) Gain et bande passante**** Application directe**

Exprimer le gain  $G(\omega)$  à partir de la fonction de transfert.

** Application directe**

Quelle est la valeur maximale du gain ?

** Application directe**

Poser le calcul permettant de déterminer les expressions des pulsations de coupure, et montrer que l'écart entre elles vérifie  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ .

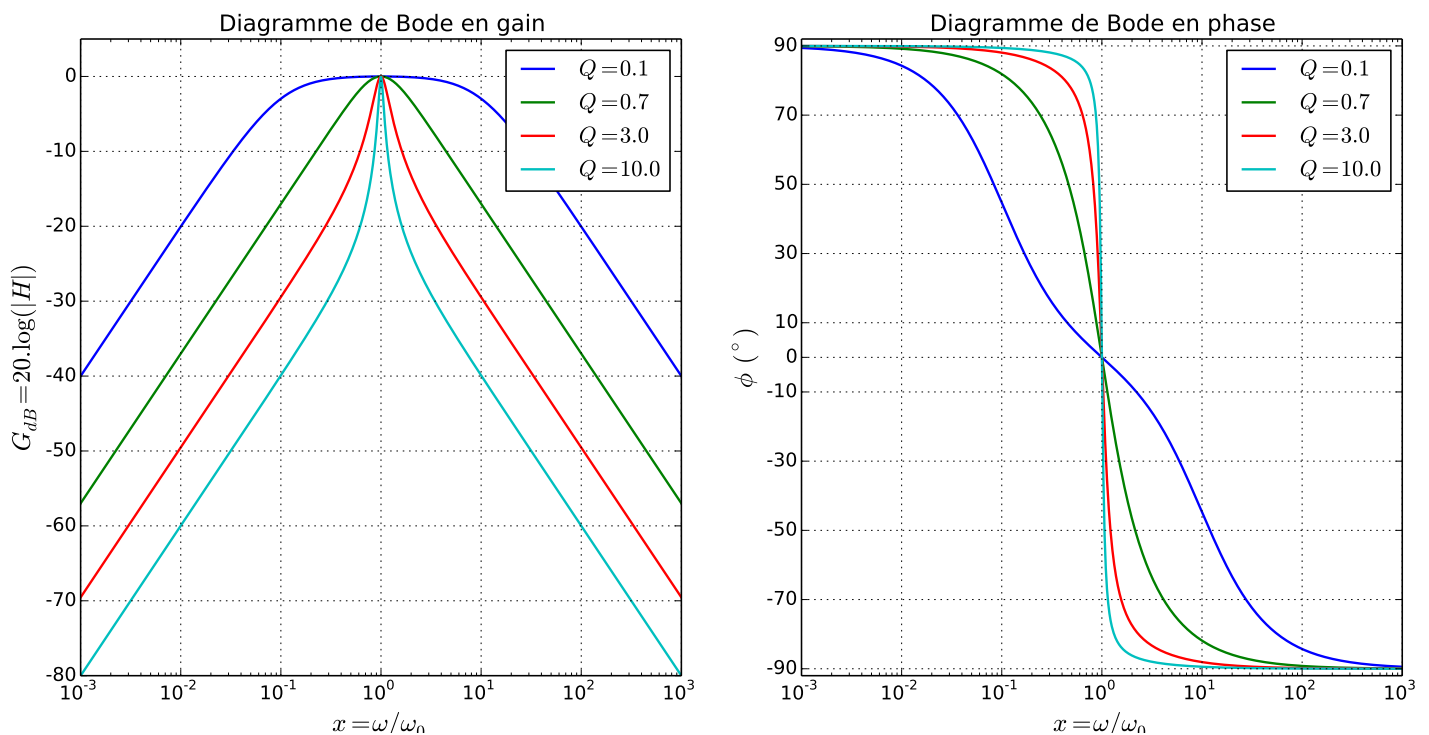
### ♥ Propriété

La largeur de la bande passante du filtre passe-bande, de pulsation propre  $\omega_0$  et de facteur de qualité  $Q$  :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

#### d) Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode du filtre précédent est donné ci-dessous pour différentes valeurs de  $Q$  :



#### 🔪 Application directe

Déterminer graphiquement les caractéristiques des asymptotes. Dépendent-elles du facteur de qualité ?

 **Application directe**

Vérifier que ces résultats sont cohérents avec la fonction de transfert établie précédemment.

 **Application directe**

Déterminer graphiquement la bande passante du filtre pour  $Q = 0, 1$ . Vérifier la cohérence avec la formule  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ .

 **Application directe**

Dans quels cas peut-on considérer qu'il est sélectif ?