TD du chapitre 16

Exercices d'application directe du cours

Exercice n°1 QCM

Q1. Les moments par rapport à un point sont des vecteurs. ◯ Vrai ◯ Faux

Q2. Les moments par rapport à un axe sont des vecteurs. ◯ Vrai ◯ Faux

Q3. Le moment d'une force a les mêmes dimensions qu'une énergie. ◯ Vrai ◯ Faux

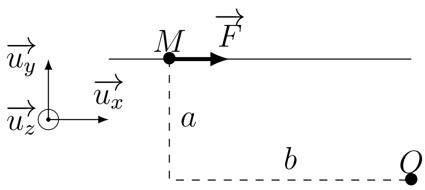
Q4. Le bras de levier est la distance entre le point d'application d'une force et l'axe considéré.
◯ Vrai ◯ Faux

Q5. À quelle(s) autre(s) grandeur(s) physique(s) rencontrée(s) dans le cours de mécanique est homogène le moment d'une force ?
◯ vitesse ◯ énergie ◯ puissance ◯ travail

Q6. Le moment cinétique par rapport à O d'un point matériel M, de masse m, de vitesse $\vec{v}$ et subissant une force $\vec{F}$:
- ◯ s'écrit $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$;
- ◯ s'écrit $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$;
- ◯ est nul si sa trajectoire est une droite passant par le point O.

Q7. Une force dont la droite d'action est normale à un axe (Δ) est appliquée à un point matériel. Son moment par rapport à (Δ) :
- ◯ a la même dimension que le travail d'une force ;
- ◯ permet de savoir si la force modifie la vitesse du point matériel ;
- ◯ a un module inversement proportionnel à son bras de levier par rapport à (Δ).

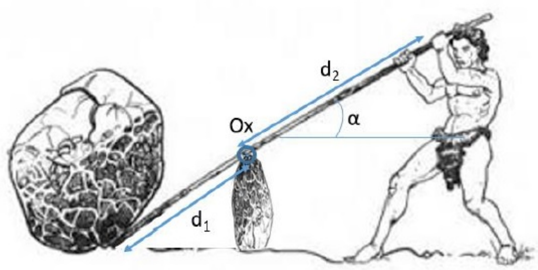
Q8. Le moment $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$ d'intensité F par rapport au point O est :



◯ $Fa\vec{u_z}$ ◯ $-Fb\vec{u_y}$ ◯ $-Fb\vec{u_z}$ ◯ $-Fa\vec{u_z}$

Exercice n°2 Archimède soulève une pierre

Archimède utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200\,\text{kg}$. Les longueurs valent $d_1 = 50\,\text{cm}$ et $d_2 = 1{,}5\,\text{m}$ et $\alpha = 60\,°$. On admet que le rocher commence à se soulever quand les moments par rapport à l'axe Ox du poids du rocher et de la force d'Archimède sont opposés.

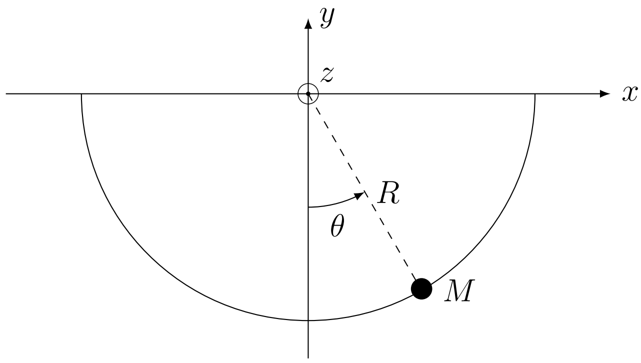


Q1. Archimède se suspend au levier. Quelle doit être la masse minimale pour que le rocher se soulève ?

Q2. Archimède décide de faire varier la direction de la force qu'il exerce sur le levier.Comment doit-il procéder pour être plus efficace et quelle force doit-il exercer ? Quel est le gain par rapport au cas précédent ?

Exercices ★

Exercice n°3 Mouvement sur un guide circulaire



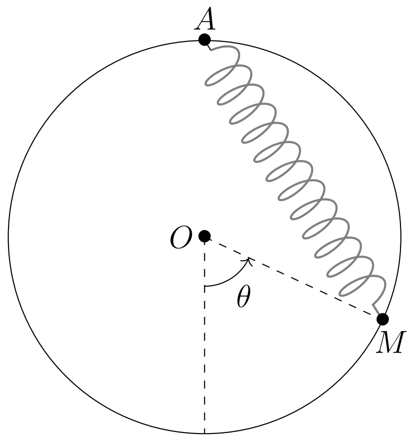
On étudie le mouvement d'un point M astreint à se déplacer sur un support circulaire de centre O et de rayon R.
On repère la position de M avec l'angle θ.
On prend en compte les frottements fluides modélisés par la force $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$.

Q1. Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O et par rapport à (Oz).

Q2. Exprimer le moment des forces par rapport à l'axe (Oz).

Q3. Établir l'équation du mouvement par application d'une loi du moment cinétique.

Exercice n°4 Masselotte sur un cerceau vertical



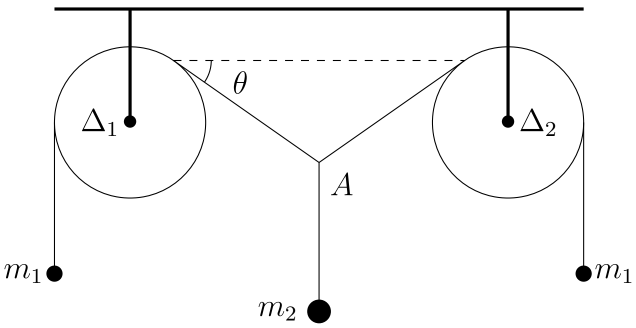
Une masselotte, assimilée à un point matériel M de masse m, est assujettie à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de centre O et de rayon R.

La masselotte est reliée au point A par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0.

Q1. Exprimer les différentes forces subies par la masselotte en fonction de l'angle θ dans la base cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$.

Q2. Établir l'équation du mouvement de la masselotte en appliquant le théorème du moment cinétique.

Exercice n°5 Équilibre de 2 poulies

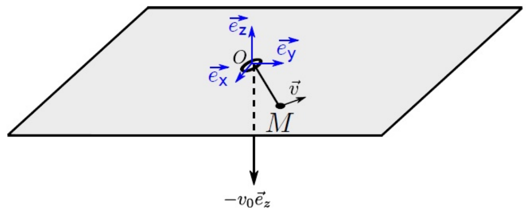


On s'intéresse au dispositif ci-contre, à l'équilibre et dans un plan. Les deux poulies sont identiques, de même rayon R et masse m_0, et les deux liaisons pivot avec le bâti sont modélisées par des liaisons parfaites : les frottements d'axe sont négligés. Les fils sont également tous supposés idéaux, c'est-à-dire qu'ils sont inextensibles et de masse négligeable. Enfin, on suppose que les fils ne glissent pas sur les poulies.

Déterminer l'angle θ et analyser qualitativement à quelle condition l'équilibre est possible.

Exercice n°6 Masse attachée à une ficelle

Un point matériel M de masse m, attaché à une ficelle, peut glisser sans frottement sur un support. La ficelle passe par un trou du support et est tirée vers le bas par un opérateur à une vitesse constante $\overrightarrow{v} = -v_0\overrightarrow{e_z}$ $(v_0 > 0)$. La masse m est lancée initialement avec une vitesse angulaire ω_0 autour de l'axe Oz, et la longueur du fil sur le plan est initialement ℓ_0.



Q1. Choisir un système de coordonnées adaptées. Donner l'expression de la distance $r(t) = OM$ en fonction de ℓ_0, v_0 et t.
Donner l'expression du moment cinétique du point M par rapport à O en fonction des mêmes grandeurs, ainsi que de m et $\dot{\theta}$.

Q2. Appliquer le théorème du moment cinétique au point M .

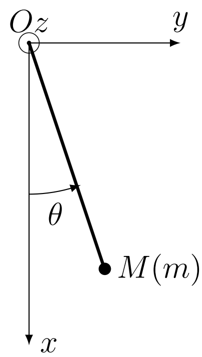
Q3. En déduire l'évolution de la vitesse angulaire $\omega(t)$ du point M .

Q4. Donner l'expression de l'énergie cinétique du point M . Comment varie-t-elle ? D'où provient cette augmentation d'énergie ?

Exercices ★ ★

Exercice n°7 Pendule électrostatique

Un pendule électrostatique est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par un fil de masse négligeable. La boule est préalablement chargée avec une charge électrique $Q = 2{,}3 \times 10^{-4}\,\mathrm{C}$. L'ensemble est placé entre deux plaques de cuivre planes et parallèles soumises à une différence de potentiel telle qu'elles génèrent un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_y}$ avec $E = 500\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$.
La longueur du pendule est $OM = R = 10\,\mathrm{cm}$ et la masse de la boule assimilée à un point M est $m = 20\,\mathrm{g}$.
L'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



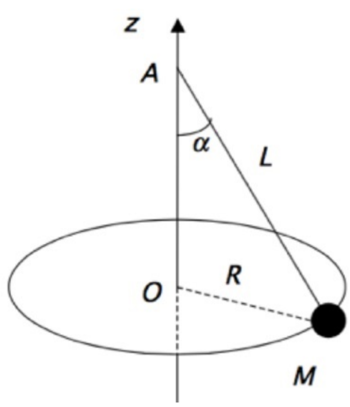
Q1. Appliquer la loi du moment cinétique à M.

Q2. Déterminer la position d'équilibre θ_e du pendule.

Q3. On écarte le pendule légèrement de sa position d'équilibre. Déterminer la pulsation ω_0 des oscillations puis calculer sa période T_0.
On admettra que pour $|\varepsilon| \ll \theta_e$, on a $\cos(\theta_e+\varepsilon) \approx \cos(\theta_e) - \varepsilon\sin(\theta_e)$ et $\sin(\theta_e+\varepsilon) \approx \sin(\theta_e) + \varepsilon\cos(\theta_e)$.

Exercice n°8 Pendule conique

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur L attaché en un point A fixe d'un axe Az. On donne une certaine vitesse initiale à la masse, afin de la faire tourner autour l'axe z. On note ω la vitesse angulaire ainsi atteinte. On note Oxy le plan dans lequel ce mouvement a lieu, et α l'angle qui s'établit entre l'axe et le fil. On suppose un régime stationnaire atteint : α et ω restent constants.
On utilisera la base cylindrique dans le plan Oxy, d'axe Oz. La pesanteur est dirigée selon $-\overrightarrow{e_z}$.

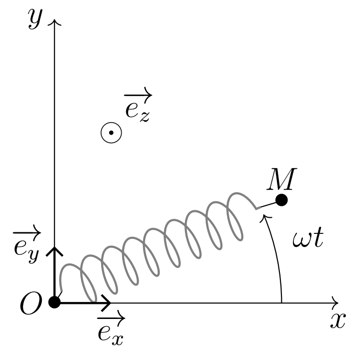


Q1. Étant donné que la force de tension du fil sur la masse est inconnue, par rapport à quel point va-t-il être judicieux de calculer les moments des forces ?

Q2. À l'aide du théorème du moment cinétique, donner l'expression de l'angle α en fonction de L, ω et g.

Exercice n°9 Ressort tournant

Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen et associé à un repère $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Un palet M de masse m peut se mouvoir sans frottement dans le plan (O, x, y, z) horizontal (table à coussin d'air par exemple). Le champ de pesanteur est suivant la verticale Oz : $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$. Un point M (masse m) est fixé à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, l'autre extrémité étant fixée en O.



Q1. Faire un bilan des forces. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique par rapport à O.

À $t = 0$, la masse est lâchée, sans vitesse initiale d'une longueur $\ell_i = 1,2\ell_0$ soit $\overrightarrow{OM}(t = 0) = 1,2\ell_0\overrightarrow{e_x}$

Q2. Calculer $\overrightarrow{L_O}$. Quelle est la nature de la trajectoire ?

Q3. Déterminer l'évolution temporelle de la longueur du ressort $\ell(t) = OM(t)$. Préciser l'intervalle de variation de ℓ.

On lance la particule d'un point $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OM}(t = 0) = \ell_1\overrightarrow{e_x}$ avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = \ell_1\omega\overrightarrow{e_y}$, orthogonale à $\overrightarrow{OM_0}$. Dans la suite, on travaillera en coordonnées polaires dans le plan (O, x, y).

Q4. Préciser $\overrightarrow{L_O}$ en fonction de r et $\dot{\theta}$ puis en fonction des conditions initiales et des vecteurs de base. On notera L le module de $\overrightarrow{L_O}$.

Q5. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique. Doit-on tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur pour étudier le mouvement ? Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique E_m. Préciser l'expression de E_m en fonction des conditions initiales et en fonction de r, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, m, k et ℓ_0.

Q6. Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire $E_m = \frac{1}{2}mr^2 + E_{p,\text{eff}}(r)$. Préciser l'expression de $E_{p,\text{eff}}(r)$ et tracer son allure.

Q7. La masse peut-elle s'éloigner indéfiniment du pôle d'attraction ?

Q8. La vitesse de la particule peut-elle s'annuler au cours du mouvement ?

Q9. La particule peut-elle passer par le centre d'attraction au cours de son mouvement ?

On cherche à déterminer une condition entre ℓ_1 et v pour avoir un mouvement circulaire.

Q10. Montrer que dans ce cas, le mouvement est uniforme.

Q11. Déterminer ℓ_1 en fonction de k, ℓ_0 et ω. Est-elle valable pour tout ω ?