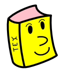
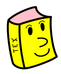
Chapitre 16 : Théorème du moment cinétique pour le point matériel

Quand on tourne le volant d'une voiture, on exerce deux forces opposées en deux points diamétralement opposés. D'après la loi de la quantité de mouvement on vérifie que le centre de masse du système ne se déplace pas. Pourtant, le fait d'exercer ce « couple » de force permet de mettre en mouvement le volant. Le mouvement va donc être décrit par une nouvelle loi, bien adaptée à l'étude des mouvements de rotation : la loi du moment cinétique.

Plan du cours

## À savoir	
Définir le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point.	I.1
Définir le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté.	I.2
Définir le moment d'une force par rapport à un point.	II.1
Définir le moment d'une force par rapport à un axe orienté.	II.2
Énoncer le théorème du moment cinétique pour un point matériel par rapport à un point fixe dans un référentiel galiléen.	III.1
Énoncer le théorème moment cinétique pour un point matériel par rapport à un axe orienté fixe dans un référentiel galiléen.	III.2

## À savoir faire	
Calculer un moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point.	**TD1,4,5,8,9**
Calculer un moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté.	I.2 **TD2,3,4**
Relier la direction et le sens du moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.	I
Calculer un moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant un bras de levier.	II.2 **TD2,4,7**
Utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe ou par rapport à un axe orienté fixe.	**TD4,5,7,8,9**
Reconnaître les cas de conservation du moment cinétique.	III **TD6,9**

I Moment cinétique

— Système étudié : point matériel M de masse m

— Référentiel d'étude : $\mathcal{R}$ lié au repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z}\right)$

I.1 Moment cinétique par rapport à un point

Définition

Moment cinétique par rapport à un point :

Le moment cinétique du point matériel M par rapport au point A dans le référentiel $\mathcal{R}$, noté $\overrightarrow{L_A(M/\mathcal{R})}$, est le vecteur défini par :

$$\overrightarrow{L_A(M/\mathcal{R})} = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{p(M/\mathcal{R})}$$

$$\overrightarrow{L_A(M/\mathcal{R})} = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}$$

Unité : $\left\|\overrightarrow{L_A(M/\mathcal{R})}\right\|$ s'exprime en $\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}} = \mathrm{J{\cdot}s}$

⚠ Le moment cinétique dépend du point par rapport auquel on le calcule. Il est donc indispensable de préciser par rapport à quel point on le calcule.

Remarques

Par définition du produit vectoriel :

- Si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{L_A(M/\mathcal{R})} = \overrightarrow{0}$.
- Si $\overrightarrow{L_A(M/\mathcal{R})} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{L_A(M/\mathcal{R})}$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}$.

Démonstration :

Le moment cinétique dépend du point où on le calcule. Montrer que la relation entre le moment cinétique en un point A et celui en un point B est $\overrightarrow{L_A(M/\mathcal{R})} = \overrightarrow{L_B(M/\mathcal{R})} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{p(M/\mathcal{R})}$

Exercice de cours Ⓐ : Mouvement circulaire

On étudie le mouvement d'un point matériel $M(m)$ en mouvement circulaire de rayon R et de centre O autour de l'axe (Oz).

Q1. Calculer le moment cinétique de $M(m)$ par rapport à O.

Q2. Relier le sens du vecteur $\overrightarrow{L_O(M/\mathcal{R})}$ au signe de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$, puis au sens du mouvement.

Méthode

Déterminer le sens positif de rotation à l'aide de la règle de la main droite :
À l'aide de la main droite, on pointe le pouce dans le sens du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$ de l'axe de rotation orienté Δ. Les autres doigts, légèrement repliés, pointent alors dans le sens positif des rotations autour de cet axe de rotation Δ.

I.2 Moment cinétique par rapport à un axe orienté

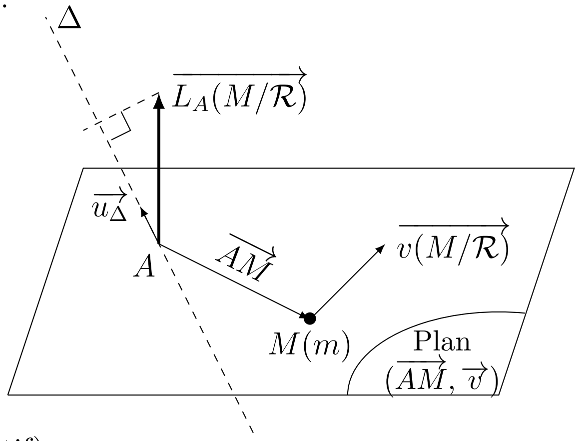
Méthode

Axe orienté : On note $\Delta = (A; \overrightarrow{u_\Delta})$ l'axe orienté Δ passant par le point A et dirigé par le vecteur directeur $\overrightarrow{u_\Delta}$.

Définition

Moment cinétique par rapport à un axe :
Le moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté $\Delta = (A; \overrightarrow{u_\Delta})$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{L_A(M/\mathcal{R})}$ sur l'axe orienté Δ :

$$\begin{aligned} L_\Delta(M/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{L_A(M/\mathcal{R})} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \\ L_\Delta(M/\mathcal{R}) &= \left(\overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} \end{aligned}$$



$L_\Delta(M/\mathcal{R})$ est un scalaire algébrique (positif ou négatif).

Unité : $L_\Delta(M/\mathcal{R})$ s'exprime en kg·m^2·s^{-1}

⚠ Le moment L_Δ par rapport à un axe ne dépend pas du point de l'axe utilisé pour le calculer.

Remarques

- Lorsqu'on écrit $L_\Delta(M/\mathcal{R}) = \left(\overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v(M/\mathcal{R})}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$, les parenthèses $\Big(\quad \Big)$ sont indispensables : il faut d'abord calculer le produit vectoriel, puis calculer le produit scalaire.
- Le sens de l'axe Δ doit être connu et impérativement précisé avant de définir/calculer le moment cinétique par rapport à Δ.
- Il ne faut pas confondre : $\overrightarrow{L_A}$ et L_Δ
  — $\overrightarrow{L_A}$ est le moment cinétique par rapport à un point, il est défini par un produit vectoriel, donc c'est un vecteur, qui a donc une direction, un sens et une norme.
  — L_Δ est le moment cinétique par rapport à un axe, il est défini par un produit mixte = un produit vectoriel suivi d'un produit scalaire, c'est donc un scalaire.

Exercice de cours (B) : Mouvement circulaire

On étudie le mouvement d'un point matériel $M(m)$ en mouvement circulaire de rayon R et de centre O autour de l'axe (Oz).

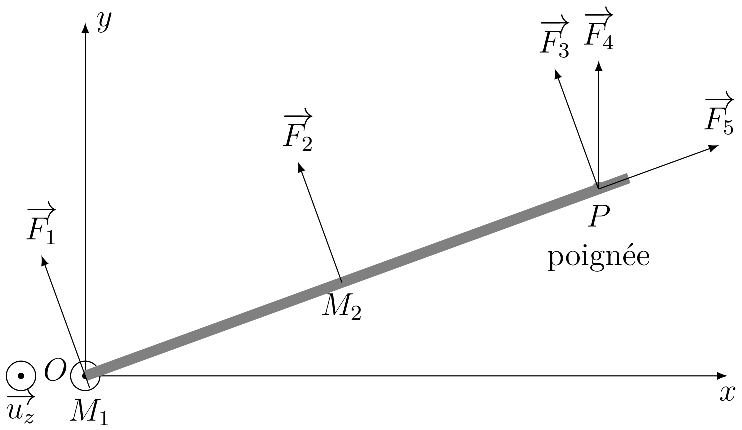
Q1. Calculer le moment cinétique de $M(m)$ par rapport à l'axe orienté $(Oz) = (O; \overrightarrow{e_z})$.

Q2. Relier le signe de $L_{Oz}(M/\mathcal{R})$ au signe de $\dot{\theta}$, puis au sens du mouvement.

II Moment d'une force

Pour comprendre l'importance de définir le moment d'une force, imaginons la situation suivante : « Une personne cherche à ouvrir une porte avec une force $\overrightarrow{F}$ de norme F donnée. En quel point et dans quelle direction doit-elle exercer cette force pour que son action soit la plus efficace ? »

Laquelle des 5 forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{F_4}$, $\overrightarrow{F_5}$ est la plus efficace pour ouvrir la porte ? Pourtant elles sont toutes de même norme . . .



II.1 Moment d'une force par rapport à un point

— Système étudié : point matériel M de masse m

— Référentiel d'étude : référentiel $\mathcal{R}$

— M est soumis à une force $\overrightarrow{f}$ (autrement dit $\overrightarrow{f}$ s'exerce sur le point M)

Définition

Moment d'une force par rapport à un point :

Le moment en un point A de la force $\overrightarrow{f}$ qui s'exerce sur M est le vecteur défini par :

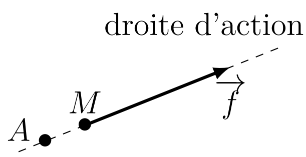
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right) = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f}$$

Unité : $\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right)\right\|$ s'exprime en N·m=kg·m^2·s^{-2} = J

Remarques

Par définition du produit vectoriel :

- $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right) = \overrightarrow{0}$, si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{f}$ sont colinéaires.
  Le moment d'une force par rapport à au point A est nul si le point A appartient à la droite d'action de $\overrightarrow{f}$.



- Si $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right) \neq \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right)$ est perpendiculaire au plan défini par $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{f}$.
- $\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \times \left\|\overrightarrow{f}\right\| \times \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{f}}\right)\right|$

Exercice de cours Ⓒ : Comment ouvrir une porte efficacement ?

Q1. Calculer les moments des différentes forces par rapport à O. On note $OP = L$.

Q2. Quand la norme du moment d'une force est-elle maximale ?

Q3. Conclure sur le lien entre l'efficacité de la force pour ouvrir la porte et la norme du moment.

Exercice de cours Ⓓ : Pendule simple

On étudie le maintenant classique pendule simple : un point matériel M est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ. On note O le point d'attache du fil.
Déterminer le moment de la tension du fil $\overrightarrow{T}$ et du poids par rapport à O.

II.2 Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Définition

Moment d'une force par rapport à un axe :
Le moment de la force $\overrightarrow{f}$ qui s'exerce sur M par rapport à l'axe orienté $\Delta = (A; \overrightarrow{u_\Delta})$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right)$ sur Δ :

$$\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right) = \left(\overrightarrow{\mathscr{M}_A}\left(\overrightarrow{f}\right)\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \left(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

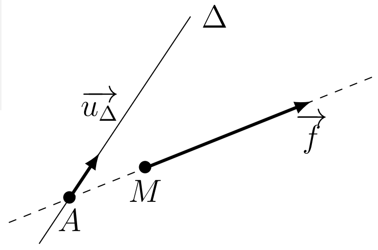
$\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right)$ est un scalaire algébrique (positif ou négatif).
Unité : $\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right)$ s'exprime en N·m = J

⚠ Le moment $\mathscr{M}_\Delta$ par rapport à un axe ne dépend pas du point de l'axe utilisé pour le calculer.

a) Cas d'une force dont la droite d'action passe par l'axe Δ

Démonstration :

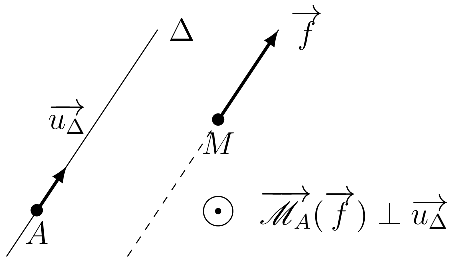
Montrer que le moment $\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right)$ d'une force dont la droite d'action passe par un point A de l'axe Δ est nul.



b) Cas d'une force dont la droite d'action est parallèle à l'axe Δ

Démonstration :

Montrer que le moment $\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right)$ d'une force dont la droite d'action est parallèle à l'axe Δ est nul.



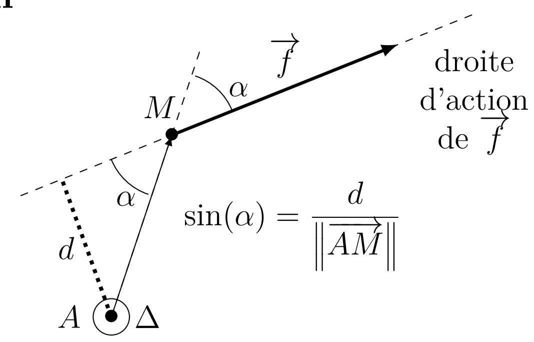
c) Cas d'une force dont la droite d'action est perpendiculaire à l'axe Δ

Le calcul du moment d'une force par rapport à un axe peut se faire plus simplement et plus rapidement qu'en calculant un produit vectoriel suivi d'un produit scalaire.

Définition

Bras de levier :

Le bras de levier d'une force $\overrightarrow{f}$ appliquée en un point M est la distance d entre la droite d'action de la force perpendiculaire à l'axe Δ et l'axe $\Delta = (A; \overrightarrow{u_\Delta})$ par rapport auquel on calcule le moment de la force.



$$\sin(\alpha) = \frac{d}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|}$$

Formule

La valeur absolue du moment de la force $\overrightarrow{f}$ par rapport à l'axe Δ s'exprime, à l'aide du bras de levier d, par :

$$\left|\mathscr{M}_\Delta\right| = d \times \left\|\overrightarrow{f}\right\|$$

Démonstration :

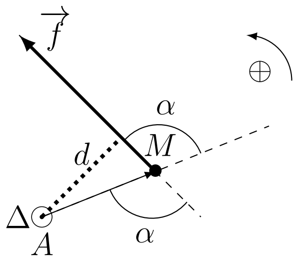
Démontrer la formule précédente.

Remarque

- Cette règle peut s'appliquer à une force quelconque, en décomposant celle-ci en une force parallèle à Δ et une force orthogonale à Δ.

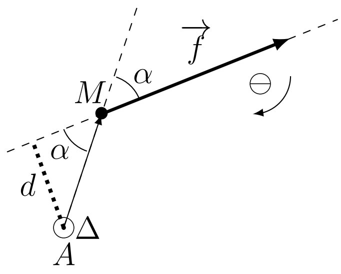
Pour connaître complètement $\mathscr{M}_\Delta$, il faut déterminer le signe de $\mathscr{M}_\Delta$:

$\mathscr{M}_\Delta > 0$ si la force $\overrightarrow{f}$ fait tourner M autour de Δ dans le sens positif.



$$\mathscr{M}_\Delta = +d \times \left\|\overrightarrow{f}\right\|$$

$\mathscr{M}_\Delta < 0$ si $\overrightarrow{f}$ tend à faire tourner M autour de Δ dans le sens indirect.



$$\mathscr{M}_\Delta = -d \times \left\|\overrightarrow{f}\right\|$$

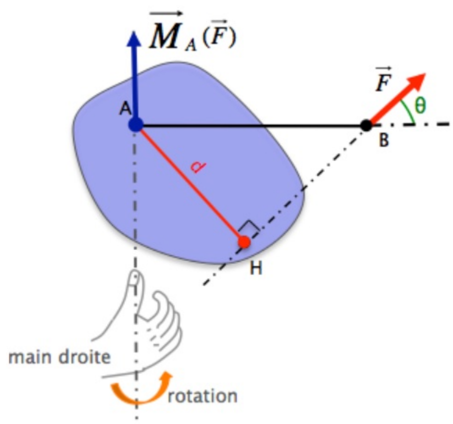
Méthode

Déterminer le signe de $\mathscr{M}_\Delta$ à l'aide de la règle de la main droite :

On place le pouce de la main droite parallèlement à l'axe de sorte que les autres doigts, légèrement repliés, pointent dans la direction et le sens $\overrightarrow{f}$.

— Si le pouce est dans le sens du vecteur unitaire de l'axe, c'est que la force a tendance à faire tourner dans le sens direct (positif), alors $\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right) > 0$.

— Si le pouce est dans le sens contraire au vecteur unitaire de l'axe, c'est que la force a tendance à faire tourner dans le sens indirect (négatif), alors $\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right) < 0$.



Méthode

Comment utiliser le bras de levier ?

1. Déterminer, à l'aide d'un schéma, le bras de levier d, c'est-à-dire la distance entre la droite d'action de la force et l'axe orienté Δ.
2. Calculer la valeur absolue du moment $\left|\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right)\right| = \left\|\overrightarrow{f}\right\| \times d$, avec d le bras de levier.
3. Déterminer le signe de $\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right)$:

— si $\overrightarrow{f}$ fait tourner dans le sens direct par rapport à l'axe orienté Δ : $\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right) = +d \times \left\|\overrightarrow{f}\right\|$

— si $\overrightarrow{f}$ fait tourner dans le sens indirect par rapport à l'axe orienté Δ : $\mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f}\right) = -d \times \left\|\overrightarrow{f}\right\|$

Exercice de cours (E) : Comment ouvrir une porte efficacement ?

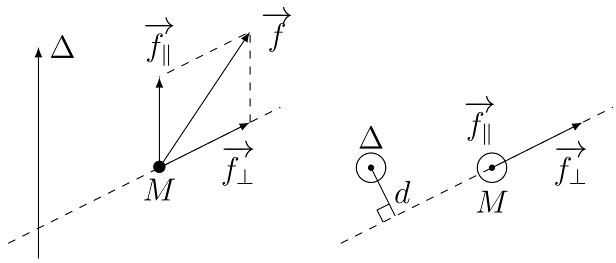
Déterminer les moments des forces $\overrightarrow{F_1}$ à $\overrightarrow{F_5}$ par rapport à l'axe de rotation (Oz) de la porte à l'aide du bras de levier (schéma page 4).

Exercice de cours Ⓕ : Pendule simple

Q1. Déterminer le moment de la tension du fil $\overrightarrow{T}$ par rapport à l'axe (Oz).

Q2. Déterminer le moment du poids par rapport à l'axe (Oz) en utilisant le bras de levier.

d) Cas d'une force quelconque



Dans le cas général, on peut noter que le vecteur force $\overrightarrow{f}$ peut se décomposer :

— en une force parallèle à l'axe Δ, notée $\overrightarrow{f_\parallel}$, et

— en une force perpendiculaire à l'axe Δ, notée $\overrightarrow{f_\perp}$.

Soit : $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f_\parallel} + \overrightarrow{f_\perp}$

Le moment de $\overrightarrow{f}$ par rapport à l'axe Δ s'écrit alors $\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f}) = \mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f_\parallel}) + \mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f_\perp})$, avec :

— le moment d'une force parallèle à l'axe Δ nul, donc $\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f_\parallel}) = 0$;

— et le moment d'une force perpendiculaire à l'axe Δ qui se calcule très facilement à l'aide du bras de levier, donc $\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f_\perp}) = \pm d \times \left\|\overrightarrow{f_\perp}\right\|$, avec d le bras de levier, c'est-à-dire la distance entre la droite d'action de $\overrightarrow{f_\perp}$ et l'axe Δ.

Soit $\mathscr{M}_\Delta(\overrightarrow{f}) = \pm d \times \left\|\overrightarrow{f_\perp}\right\|$, avec « + » si $\overrightarrow{f_\perp}$ fait tourner M dans le sens direct (positif) par rapport à Δ et « − » si $\overrightarrow{f_\perp}$ fait tourner M dans le sens indirect (négatif) par rapport à Δ.

III Théorème du moment cinétique pour le point matériel

- Système étudié : point matériel M de masse m
- Référentiel d'étude : référentiel $\mathcal{R}$, considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.
- Bilan des forces : forces $\overrightarrow{f_i}$ de résultante $\sum \overrightarrow{f_i}$

III.1 Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe en référentiel galiléen

Loi fondamentale

Théorème du moment cinétique (TMC) pour un point matériel par rapport à un point fixe :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O fixe d'un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, est égale à la somme des moments des forces qui s'exercent sur ce point.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O\left(M/\mathcal{R}\right)}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_O\left(\overrightarrow{f_i}\right)} = \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_i}$$

Méthode

Appliquer le TMC pour un point matériel par rapport à un point fixe :

① Définir le **système** étudié.

② Préciser le **référentiel d'étude**. *En 1ère année, il sera considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.*

③ Choisir le **système de coordonnées adapté** à la description du mouvement.
Faire un **grand schéma clair** sur lequel sur lequel figurent le système et le système de coordonnées choisi.

④ Faire un **bilan de forces** précis et complet.
⚠ Il ne pas oublier les forces de liaison (réaction du support notamment).

⑤ Représenter toutes les forces sur le schéma précédent.

⑥ **Choisir le point fixe du référentiel** par rapport auquel vous appliquez le théorème du moment cinétique.

⑦ Écrire le **théorème du moment cinétique par rapport au point fixe** du référentiel galiléen.
- Exprimer le moment cinétique par rapport au point fixe en calculant le produit vectoriel des vecteurs exprimés dans la base du système de coordonnées adapté choisi.
- Calculer la dérivée temporelle du moment cinétique obtenu précédemment.
- Exprimer le moment des différentes forces par rapport au point fixe (**calculer chaque moment l'un après l'autre**) en calculant le produit vectoriel des vecteurs exprimés dans la base du système de coordonnées adapté choisi.

⑧ En déduire l'équation horaire du mouvement.

Exercice de cours Ⓖ : Pendule simple

Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la variable d'espace pertinente du problème à l'aide du TMC par rapport au point d'attache O du fil.

Propriété

Conservation du moment cinétique :
Le moment cinétique d'un point matériel par rapport au point O se conserve si et seulement si

— La résultante des forces appliquées au système est nulle
ou

— Les forces appliquées au système sont colinéaires au vecteur $\overrightarrow{OM}$ (cas des forces centrales)

III.2 Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe en référentiel galiléen

Loi fondamentale

Théorème du moment cinétique (TMC) pour un point matériel par rapport à un axe fixe :
La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un axe orienté $\Delta = (O; \overrightarrow{u_\Delta})$ fixe d'un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, est égale à la somme des moments des forces par rapport à Δ.

$$\left(\frac{\mathrm{d}L_\Delta\left(M/\mathcal{R}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}} = \sum_i \mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{f_i}\right) = \sum_i \left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f_i}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Méthode

Appliquer le TMC pour un point matériel par rapport à un axe fixe :

① Définir le **système** étudié.

② Préciser le **référentiel d'étude**. *En 1ère année, il sera considéré galiléen à l'échelle de l'expérience.*

③ Choisir le **système de coordonnées adapté** à la description du mouvement.
Faire un **grand schéma clair** sur lequel figurent le système et le système de coordonnées choisi.

④ Faire un **bilan de forces** précis et complet.

⑤ **Représenter toutes les forces** sur le schéma précédent.
Attention à ne pas oublier les forces de liaison (réaction du support notamment).

⑥ **Choisir l'axe orienté fixe du référentiel** par rapport auquel vous appliquez le théorème du moment cinétique.

⑦ Écrire le **théorème du moment cinétique par rapport à l'axe fixe** du référentiel galiléen.
- Exprimer le moment cinétique par rapport à l'axe fixe en calculant le produit mixte des vecteurs exprimés dans la base du système de coordonnées adapté choisi.
- Calculer la dérivée temporelle du moment cinétique calculé précédemment.
- Exprimer le moment des différentes forces par rapport à l'axe fixe en utilisant le bras de levier (**calculer chaque moment l'un après l'autre**).

⑧ En déduire l'équation horaire du mouvement.

Exercice de cours Ⓗ : Pendule simple

Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la variable d'espace pertinente du problème à l'aide du TMC par rapport à un axe orienté bien choisi.